TD 1
Champ et potentiel électriques : charges ponctuelles

Exercice 1 : Système de 4 charges ponctuelles

On considère 4 charges ponctuelles q_A,q_B,q_C et q_D placées aux sommets d'un carré ABCD de côté a.

1.1 Les charges valent $q_A = q_C = 0,2\,\mu$C, et $q_B = q_D = 0,4\,\mu$C et $a = 1$ m. Exprimez le champ électrique et le potentiel au centre O du carré, et donner leurs valeurs.

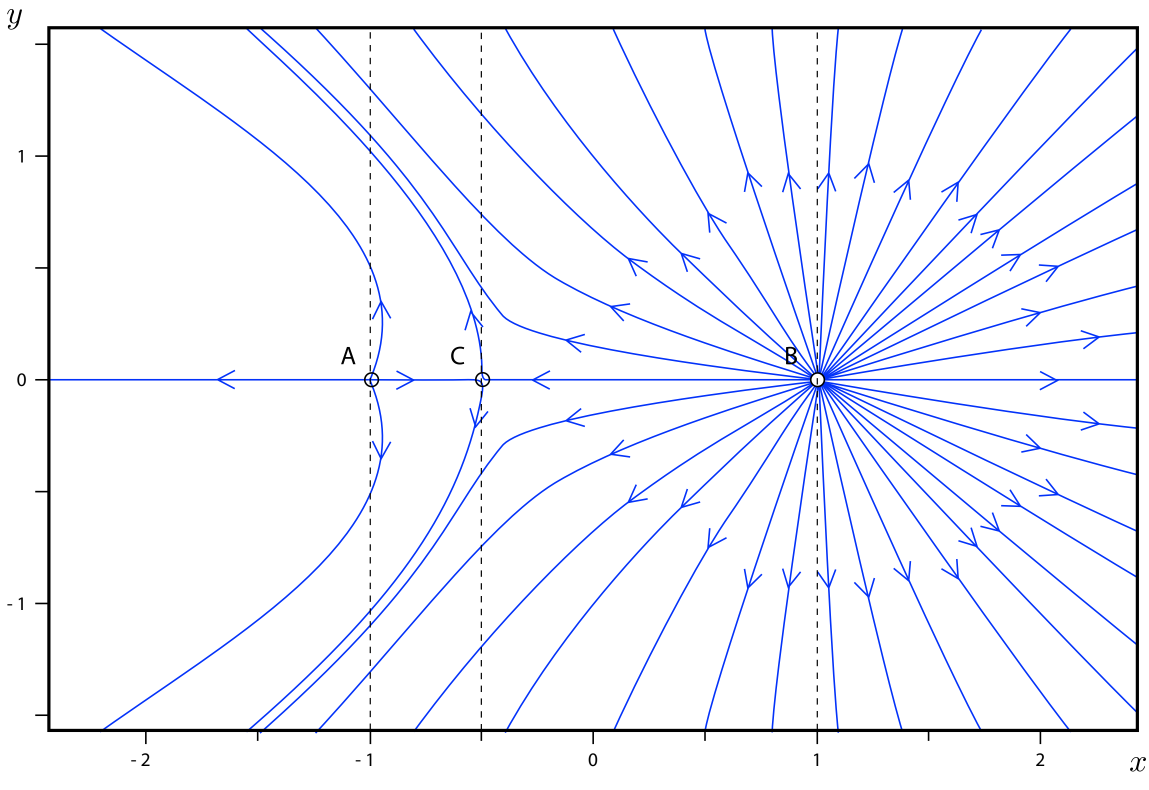
1.2 Les charges valent $q_A = 2q_B$ et $q_C = q_D = 0$. Précisez la position où le champ créé est nul.

1.3 Les charges valent $q_A = -q$ et $q_B = q_C = q_D = q$. Déterminer la force électrostatique exercée par les trois charges placées en B, C et D sur la charge placée en A. Donner la valeur du module de cette force pour $q = 0,2\,\mu$C.

1.4 Les quatre charges valent $q > 0$. On place une cinquième charge au centre du carré. L'ensemble est électriquement neutre. Quelle est la force exercée sur chaque charge ? Comment évolue le système si on libère les charges ?

Exercice 2 : Etude d'une carte de champ.

Le but de cet exercice est de déterminer les caractéristiques d'une distribution de charges ponctuelles connaissant la carte de champ électrostatique $\vec{E}$.



1. Déterminer les coordonnées et le signe des charges ponctuelles responsables du champ électrique représenté par ces lignes de champ. Donner sans calcul le rapport entre ces charges.

2. Montrer en utilisant des arguments de symétrie que le champ $\vec{E}$ appartient à l'axe Ox en tout point de cet axe.
3. Que peut-on dire du point C ? Que vaut le champ $\vec{E}(\mathrm{C})$ en ce point ? En déduire, par le calcul, le rapport entre les charges trouvé à la question 1.
4. On se place en un point $M(r,\theta,\varphi)$ repéré par ses coordonnées sphériques r,θ et φ tel que $r \gg \mathrm{AB}$ (M est donc hors de la figure). Donner sans faire aucun calcul une expression approchée du champ $\vec{E}$ et du potentiel V en M. En déduire la forme des surfaces équipotentielles loin de l'origine O. Quelle est la forme des surfaces équipotentielles au voisinage ($r << \mathrm{AB}$) des charges ?

Exercice 3 : Système de deux charges identiques

On considère deux charges identiques q placées sur l'axe Oz en $z = a$ et $z = -a$.

3.1 Etude générale du champ $\vec{E}$

On cherche à déterminer l'expression générale du champ électrostatique en un point $\mathrm{P}(x, y, z)$ quelconque de l'espace.

3.1.1 Quels sont les plans de symétrie de la distribution de charges ? En déduire l'expression générale du champ $\overrightarrow{E}$ dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques.

3.1.2 Quelles sont les invariances de la distribution de charges ? De quelles variables dépendent les composantes du champ $\overrightarrow{E}$? En déduire l'expression finale du champ $\overrightarrow{E}$ dans les deux systèmes de coordonnées.

3.1.3 Le point $\mathrm{P}(x, y, 0)$ appartient au plan $(x\mathrm{O}y)$. Quelle est la direction du champ $\overrightarrow{E}$ en tout point de ce plan ? Donnez l'expression générale du champ $\overrightarrow{E}$ dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques.

3.2 Etude du champ $\vec{E}$ sur l'axe Ox

3.2.1 Quelle est la direction du champ $\overrightarrow{E}$ sur l'axe (Ox) ?

3.2.2 Calculez l'expression du champ $\overrightarrow{E}$ en tout point de l'axe (Ox) et représenter la fonction $E_x(x)$.

3.3 Un peu de mécanique

Un opérateur déplace une charge $Q = \pm q$ le long de l'axe (Ox) de $x = +\infty$ au point O.

3.3.1 Quel est le travail fourni par l'opérateur ?

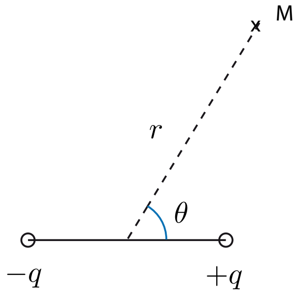
3.3.2 Discuter l'équilibre de la charge vis à vis d'un déplacement de celle-ci le long de l'axe (Ox) (on fera un bilan des forces).

3.3.3 Déterminer la période des petites oscillations au voisinage de O le long de l'axe (Ox).

Exercice 4 : Dipôle électrique

On considère un dipôle électrique composé d'une charge $-q$ placée au point de coordonnées cartésiennes (-a ; 0 ; 0) et d'une charge $+q$ au point (a ;0 ;0).

1. Donner l'expression du vecteur moment dipolaire dans le repère $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$.
2. Calculer le potentiel électrique créé par le dipôle en un point M situé à la distance OM = r du centre du dipôle et telle que $r >> a$.



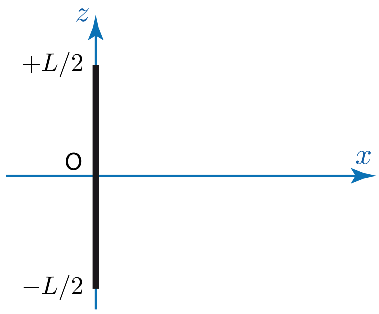
Solution, vue en cours : $V(r,\theta) = \frac{Kp\cos\theta}{r^2}$

3. Utiliser les considérations de symétrie de la distribution de charge pour réduire au plus simple l'expression du champ électrique $\vec{E}(\mathrm{M})$ créé par le dipôle au point M.
4. Utiliser les résultats des deux questions précédentes pour donner l'expression de $\vec{E}(\mathrm{M})$.

TD 2
Champ et potentiel électriques : distributions continues de charges

Exercice 1 : Segment et fil rectiligne uniformément chargés

Une charge Q est répartie de manière uniforme (densité linéique de charge λ) sur un segment de fil :



1.1 Analyser les éléments de symétrie et les invariances de cette distribution de charge. Quel système de coordonnées choisir pour simplifier l'expression générale du champ électrique $\vec{E}$?

1.2 **calcul direct.** Déterminer en tout point de l'axe Ox le champ électrique $\vec{E}$ et le potentiel électrique V. On donne les intégrales suivantes :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + \text{constante}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}\left[\ln(1+\sin\alpha) - \ln(1-\sin\alpha)\right] + \text{constante}$$

1.3 **Théorème de Gauss.** Reprendre la question précédente en utilisant le théorème de Gauss.

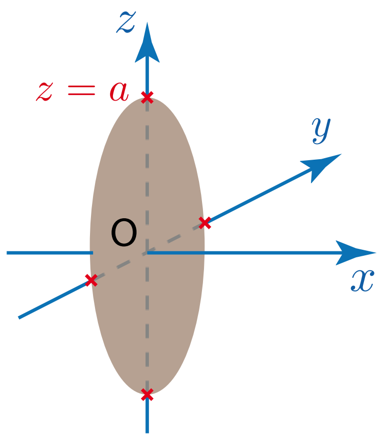
1.4 En déduire les expressions du champ et du potentiel électrique créés en tout point de l'espace par un fil de longueur infini d'axe $-z$Oz.

1.5 **calcul direct.** Reprendre le calcul direct pour déterminer en tout point de l'axe Ox le champ électrique $\vec{E}$ créé par le fil infini.

1.6 **Théorème de Gauss.** Reprendre la question précédente en utilisant le théorème de Gauss.

Exercice 2 : Disque uniformément chargé

Une charge $Q = 30\,\mu$C est répartie de manière uniforme sur un disque de rayon $a = 30\,$cm, de centre O et contenu dans le plan yOz :



2.1 Calculer la densité surfacique de charge σ.

2.2 Analyser les éléments de symétrie et les invariances de cette distribution de charge.

2.3 Calculer le potentiel électrique V en un point de l'axe Ox .

2.4 En déduire le champ électrique en un point de l'axe Ox.

2.5 **calcul direct.** Retrouver le résultat précédent par le calcul direct du champ électrique $\vec{E}$.

2.6 **Théorème de Gauss.** Retrouver (encore) le résultat précédent en utilisant le théorème de Gauss.

2.7 En déduire le champ électrique et le potentiel électrique créés par un plan infini.

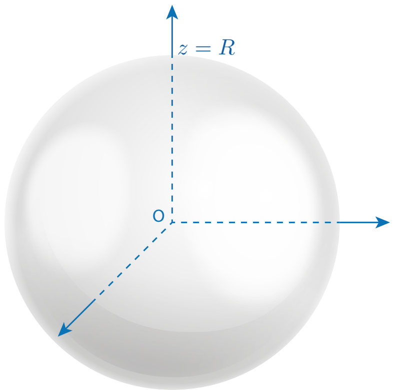
2.8 Retrouver l'expression du champ créé par un plan infini en utilisant le théorème de Gauss.

2.9 On considère la distribution de charge pour laquelle le plan yOz est uniformément chargé, à l'exception d'un trou circulaire (correspondant au disque de la question 2.1). Calculer le champ électrique sur l'axe Ox.

TD 3
Champ et potentiel électriques : distributions de charges 3D

Exercice 1 : Sphère diélectrique

Une sphère diélectrique de rayon R est uniformément chargée en volume avec la densité volumique de charge ρ.



1.1 De quel type de matériau cette sphère peut-elle être constituée ?

1.2 Analyser les éléments de symétrie et les invariances de cette distribution de charge. Simplifier au mieux l'expression générale du champ électrique $\vec{E}$ en tout point de l'espace. En déduire l'allure des lignes de champ et des équipotentielles.

1.3 Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ en tout point de l'espace en utilisant le théorème de Gauss.

1.4 En déduire l'expression du potentiel électrique créé en tout point de l'espace par cette distribution de charge sphérique.

Exercice 2 : Sphère conductrice

Une sphère conductrice de rayon R est uniformément chargée en surface avec la densité surfacique de charge σ.

2.1 Comparer les éléments de symétrie / invariances de la distribution de charge avec celle de l'exercice précédent (sphère chargée en volume).

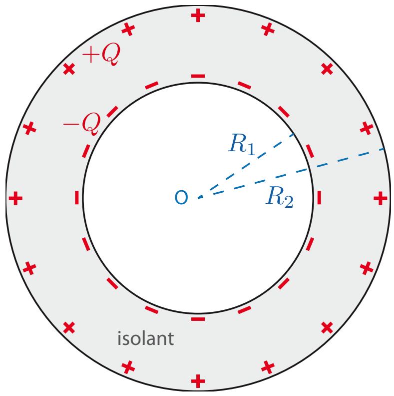
2.2 Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ en tout point de l'espace en utilisant le théorème de Gauss.

2.3 Déterminer l'expression du potentiel électrique créé en tout point de l'espace par cette distribution de charge sphérique.

2.4 En déduire l'expression de la capacité électrique d'une sphère métallique.

Exercice 3 : Condensateur sphérique

Un condensateur est composé de deux sphères (creuses et concentriques) de rayon R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$) :



3.1 Comparer les éléments de symétrie / invariances de la distribution de charge avec celles des exercices précédents.

3.2 Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ en tout point de l'espace.

3.3 Déterminer l'expression du potentiel électrique créé en tout point de l'espace.

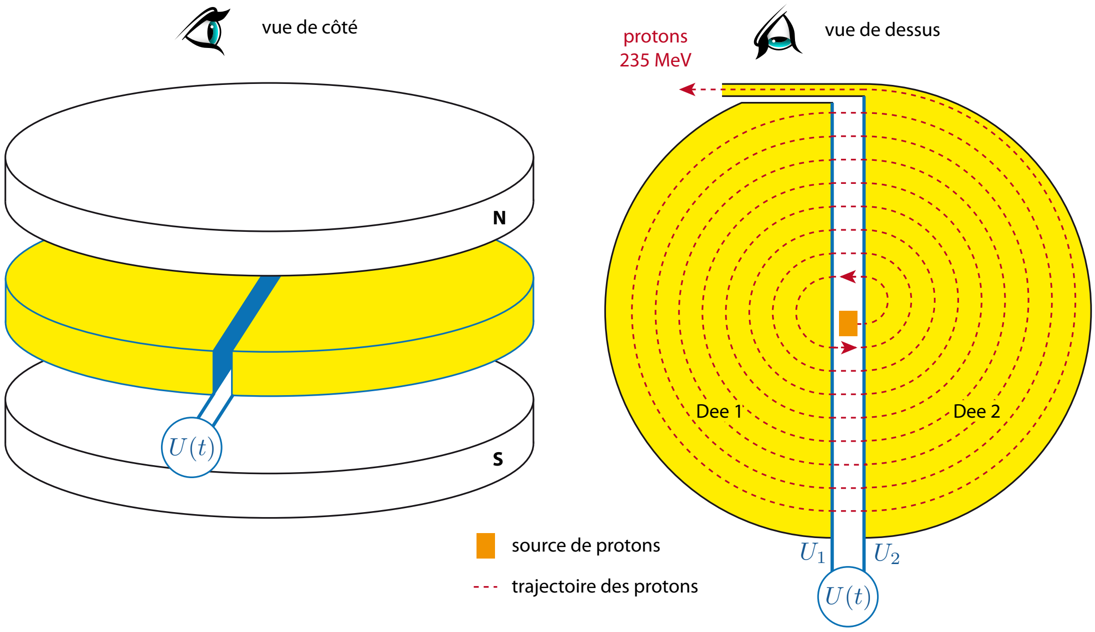
3.4 Déduire la capacité du condensateur à partir de la différence de potentiel entre les deux sphères, puis retrouver la capacité d'une sphère métallique seule lorsque $R_2 \to \infty$.

PeiP2 : **Electricité et magnétisme**

TD 4
Force de Lorentz - Mouvement des particules chargées

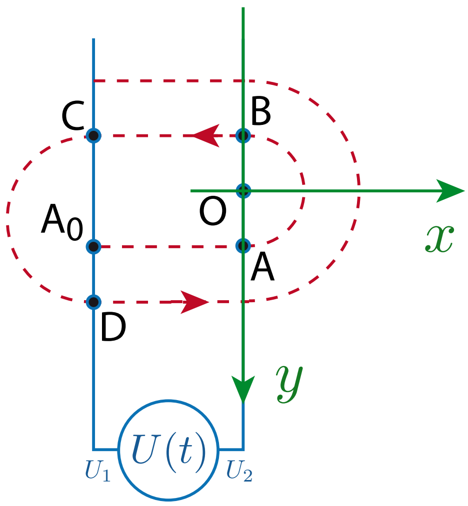
Exercice 1 : Cyclotron

Un cyclotron comme celui du centre de protonthérapie d'Orsay (bât. 101) peut être schématisé ainsi :



Il se compose de deux demi-cylindres horizontaux de rayon R très légèrement écartés et creux, les « Dees », au sein desquels règne un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et constant d'intensité $B = 1,67$ T. A l'intérieur des Dees, il règne un vide poussé. Entre ces deux Dees une tension haute fréquence en créneau de valeur maximale $U = \pm 100$ kV crée un champ $\vec{E}$ uniforme et constant, perpendiculaire aux faces en regard des Dees.
Les protons ($m_\mathrm{p} = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg et $e = 1,67 \cdot 10^{-19}$ C) sont produits près du centre, au point A_0 avec une vitesse v_0 négligeable. On négligera également le poids des protons devant les forces électriques et magnétiques qu'ils subissent.

1.1 Les protons sont accélérés sous l'effet de la différence de potentiel $U(t)$. Compléter le schéma ci-dessous pour que les protons se déplacent du point A_0 au point A (polarité du générateur de tension, direction du champ électrique) :



1.2 Calculer la vitesse v_A avec laquelle les protons entrent au point A dans le Dee 2, en fonction du champ électrique E. On donne la distance entre les deux Dee : $d = 2\,\mathrm{cm}$. Décrire le mouvement du proton sur la trajectoire $\mathrm{A}_0 \to \mathrm{A}$ et exprimer $\vec{v}_\mathrm{A}$.

1.3 Dans les Dees le champ électrique est nul, mais les protons sont soumis au champ magnétique $\vec{B}$ constant et uniforme. Avec la contrainte que le proton puisse aller de A vers B, donner l'expression réduite de $\vec{B}$ en coordonnées cartésiennes ($\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ sont déjà placés sur le schéma) et tracer un vecteur représentatif sur le schéma. Tracer la force magnétique $\vec{F}_\mathrm{B}$ qui s'exerce sur le proton en un point de sa trajectoire A→B représentée en pointillés. En déduire que le mouvement est uniforme entre A et B.

1.4 La vitesse $\vec{v}$ du proton change de direction au cours du mouvement. En écrivant le principe fondamental de la dynamique, montrer que les composantes v_x et v_y de la vitesse sont les solutions du système d'équations différentielles :

$$\dot{v}_x - \omega_\mathrm{C} \cdot v_y = 0$$
$$\dot{v}_y + \omega_\mathrm{C} \cdot v_x = 0$$

Déterminer ω_C et vérifier que ces équations admettent comme solution les équations horaires du mouvement suivantes :

$$x(t) = \frac{v_\mathrm{A}}{\omega_\mathrm{C}} \sin(\omega_\mathrm{C} t)$$
$$y(t) = \frac{v_\mathrm{A}}{\omega_\mathrm{C}} \cos(\omega_\mathrm{C} t)$$

Vérifier également que les conditions initiales du mouvement (position et vitesse au point A à $t = 0$) sont respectées.

1.5 En déduire la nature et l'équation de la trajectoire des protons.

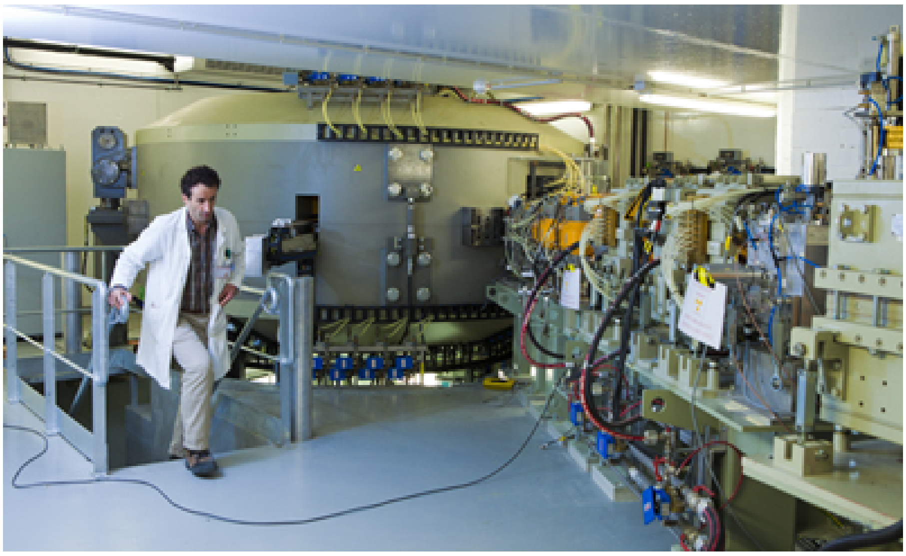
1.6 Combien de temps le proton reste-t-il dans le Dee 2 lors de son premier passage ? Lors de son deuxième passage ?

1.7 Pour que le proton soit accéléré à chaque passage entre les Dees, il est nécessaire d'alterner la polarité à chaque fois. Calculer la fréquence du générateur nécessaire (on néglige le temps de traversée entre les Dees qui sont très proches).

1.8 Les protons possèdent après leur dernier demi-tour une énergie cinétique $K = 235\,\mathrm{MeV}$. Quelle est leur vitesse ? On donne :

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{K + mc^2}\right)^2}$$

En déduire le diamètre approximatif de ce cyclotron.



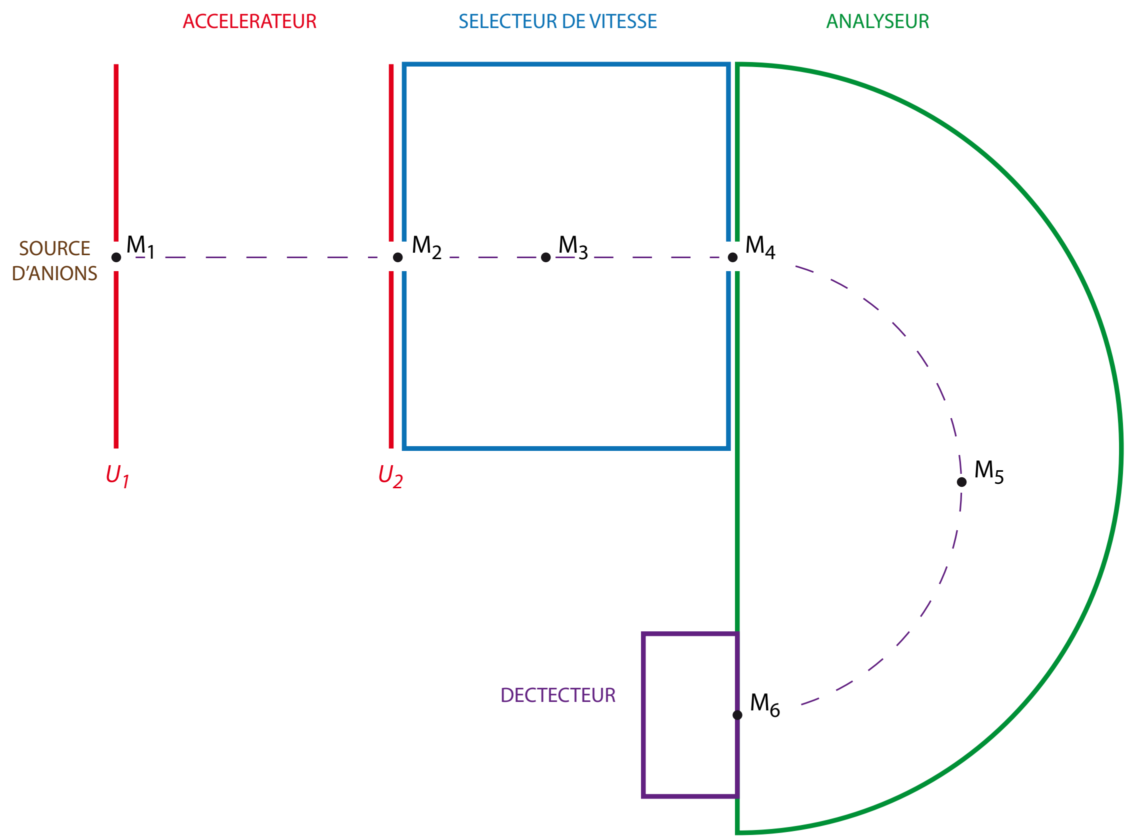
Exercice 2 : Spectromètre de masse

Un spectromètre de masse est constitué :

- d'une source d'anions (ions de masse m et de charge q négative),
- d'un accélérateur, caractérisé par un champ électrique uniforme $\vec{E}_0$,
- d'un sélecteur de vitesse, caractérisé par des champs électrique et magnétique uniformes et constants : $\vec{E}_1$ et $\vec{B}_1$,
- d'un analyseur, caractérisé par un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}_2$,
- d'un détecteur.

On néglige l'effet de la pesanteur sur les anions.

Le spectromètre de masse est représenté à la figure suivante :



2.1 Donner le signe de la différence de potentiel $(U_2 - U_1)$ entre les points M_1 et M_2 afin que les anions soient accélérés, puis déterminer son expression en fonction du champ électrique $\vec{E}_0$ et de la distance L_0 qui sépare les points M_1 et M_2.

2.2 Déterminer l'expression de la vitesse v_2 qu'atteindrait au point M_2 un anion initialement immobile au point M_1 $(v_1 = 0)$.

2.3 Représenter avec soin sur la figure de la page précédente les vecteurs $\vec{E}_0$, $\vec{E}_1$, $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$, de sorte que les anions soient bien accélérés, puis sélectionnés en vitesse et enfin correctement déviés dans l'analyseur pour atteindre le détecteur (ils suivent donc la trajectoire en pointillés, dans le plan de la feuille).

2.4 Représenter avec soin les forces électrique et magnétique $\vec{F}_{E_1}$ et $\vec{F}_{B_1}$ agissant sur l'anion au point M_3.

2.5 Représenter avec soin la force magnétique $\vec{F}_{B_2}$ agissant sur l'anion au point M_5.

2.6 Démontrer que la distance M_4M_6, entre le point d'entrée dans l'analyseur et le point d'impact des anions sur le détecteur, vaut :
$M_4M_6 = \frac{2mE_1}{qB_1B_2}$

2.7 Calculer le travail de la force magnétique $\vec{F}_{B_2}$ sur le trajet M_4M_6.

2.8 Donner l'expression de l'énergie cinétique des anions lorsqu'ils arrivent sur le détecteur en M_6.

2.9 Un anion suit la trajectoire représentée en pointillés sur le schéma. Quelle est la nature de ses mouvements successifs :

- entre les points M_1 et M_2 ?
- entre les points M_2 et M_4 ?
- entre les points M_4 et M_6 ?

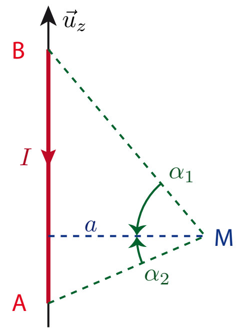
PeiP2 : **Electricité et magnétisme**

TD 5
Champ magnétique : loi de Biot et Savart

Exercice 1 : Les éléments simples : le segment, la droite

On considère une portion rectiligne $\vec{AB} = AB \cdot \vec{u}_z$ de conducteur, parcourue par un courant $\vec{I} = -I \cdot \vec{u}_z$.

1.1 Etudier les éléments de symétrie et les invariances de cette distribution de courant. Quelles conséquences sur le champ magnétique $\vec{B}$ créé par cette distribution ? Sur les lignes de champ ?



1.2 Rappeler la loi de Biot et Savart donnant le champ magnétique créé par une portion de fil $\mathrm{d}\vec{l}$.

1.3 Montrer que le champ magnétique créé par le conducteur $\vec{AB} = AB \cdot \vec{u}_z$ vaut, au point M (voir schéma) :

$$B = \frac{\mu_o I}{4\pi a} \left(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right)$$

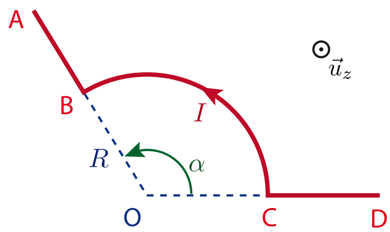
Donner son expression vectorielle.

1.4 En déduire le champ magnétique créé en M par les demi-droite [A ;+∞) et (−∞ ;B].

1.5 En déduire le champ magnétique créé en M par un fil de longueur infinie.

Exercice 2 : Les éléments simples : l'arc de cercle, le cercle

On considère le circuit ABCD suivant, composé de deux portions rectilignes AB et CD, et d'un arc de cercle BC (centre O, rayon R, angle α).



2.1 Déterminez les contribution $\vec{B}_{\mathrm{AB}}(\mathrm{O})$ et $\vec{B}_{\mathrm{CD}}(\mathrm{O})$ des deux segments AB et CD au champ magnétique total au point O.

2.2 Etudiez les éléments de symétrie et les invariances de la distribution de courant parcourant l'arc BC. Quelles conséquences sur le champ magnétique $\vec{B}_{\mathrm{BC}}(\mathrm{O})$ créé par cet arc de courant au point O ?

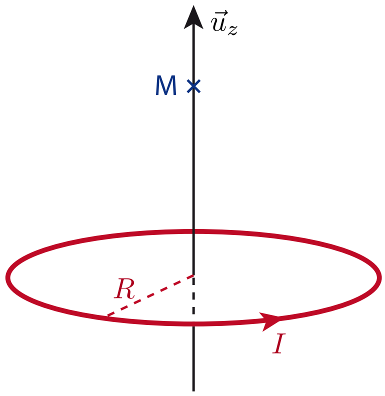
2.3 Montrez que le champ magnétique $\vec{B}_{\mathrm{BC}}$ au point O vaut :

$$\vec{B}_{\mathrm{BC}}(\mathrm{O}) = \frac{\mu_o I \alpha}{4\pi R} \cdot \vec{u}_z$$

2.4 En déduire le champ magnétique créé par une spire de courant de rayon R en son centre.

Exercice 3 : Champ magnétique sur l'axe d'une spire de courant

On souhaite déterminer le champ magnétique $\vec{B}(\mathrm{M})$ créé par une spire de courant (centre O, rayon R, contenue dans le plan $x\mathrm{O}y$) en un point M de son axe $(\mathrm{O}z)$.



3.1 Etudiez les symétries et invariances.

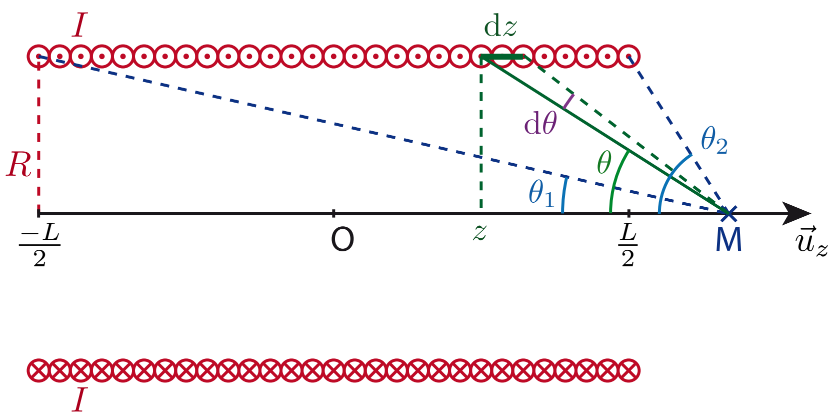
3.2 Déterminez l'expression du champ magnétique élémentaire $\mathrm{d}\vec{B}(\mathrm{M})$ créé par une portion $\mathrm{d}\vec{l}$ de spire.

3.3 Déterminez la projection de $\mathrm{d}\vec{B}(\mathrm{M})$ sur $\vec{u}_z$.

3.4 En déduire le champ magnétique $\vec{B}(\mathrm{M})$ créé par la spire de courant au point M.

Exercice 4 : Champ magnétique sur l'axe d'un solénoïde de longueur finie L

Un solénoïde de longueur L et de rayon R est constitué d'un enroulement jointif de N spires. On notera n le nombre de spires par unité de longueur. L'origine O est choisie au centre de la bobine, et l'axe de la bobine est $(\mathrm{O}z)$.



4.1 Déterminez quels sont les plans de symétrie Π et d'anti-symétrie Π^* de la distribution de courant.

4.2 Déterminez les invariances de la distribution. En déduire l'expression générale du champ magnétique $\vec{B}$ créé par le solénoïde en tout point de l'espace.

4.3 En utilisant des arguments de symétrie, étudiez la parité en z des composantes du champ magnétique.

4.4 Quelle est la direction et le sens du champ magnétique $\vec{B}$ en tout point de l'axe du solénoïde $(\mathrm{O}z)$?

4.5 Déterminez, en fonction de l'angle θ (voir schéma), l'expression du champ magnétique élémentaire $\mathrm{d}\vec{B}(\mathrm{M})$ créé en M par une portion de solénoïde située entre z et $z + \mathrm{d}z$?

4.6 En déduire l'expression du champ magnétique créé par le solénoïde en tout point de son axe (en fonction des angles θ_1 et θ_2, voir schéma).

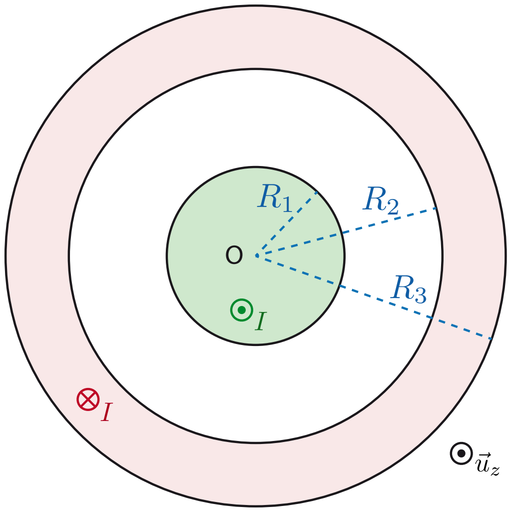
4.7 On considère un solénoïde tel que $L \gg R$. Déterminez l'expression du champ magnétique au centre du solénoïde et à son extrémité ($z = L/2$). Retrouver l'expression du champ magnétique en tout point de l'axe d'un solénoïde de longueur infinie.

PeiP2 : **Electricité et magnétisme**

TD 6
Théorème d'Ampère — dipôle magnétique

Exercice 1 : Cable coaxial

Un câble coaxial est constitué de deux matériaux conducteurs cylindriques et concentriques. Le conducteur central, parcouru par le courant uniforme $(+I \cdot \vec{u}_z)$ a pour rayon R_1. Le conducteur externe, parcouru par le courant uniforme $(-I \cdot \vec{u}_z)$, a pour rayon intérieur R_2 et rayon extérieur R_3.



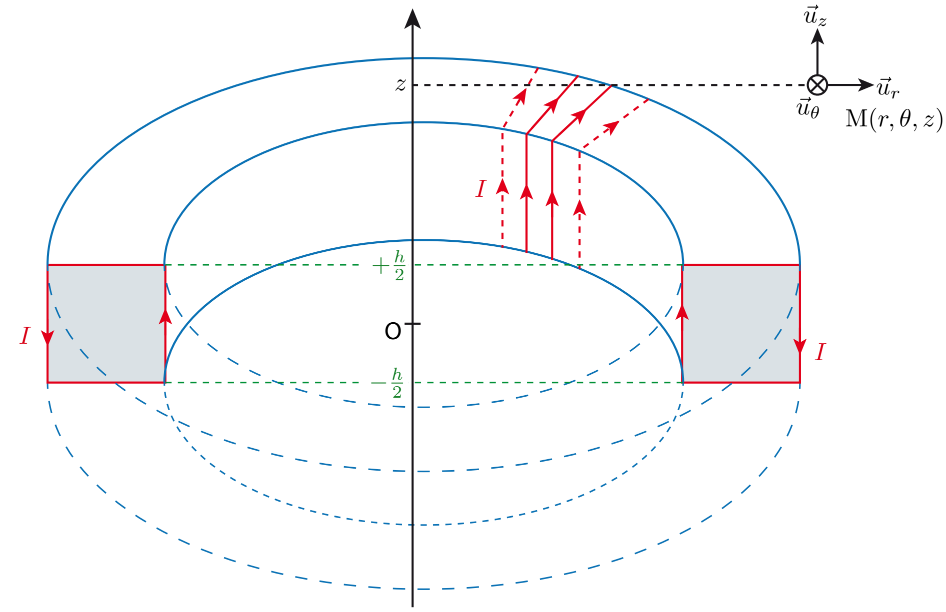
1.1 Etudier les éléments de symétrie et les invariances de cette distribution de courant. En déduire, dans un système de coordonnées adapté, l'expression réduite du champ magnétique $\vec{B}$ créé par cette distribution. On supposera que le cable est rectiligne et de longueur infinie.

1.2 Quelles formes ont les lignes de champ magnétique ?

1.3 Utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace.

Exercice 2 : Bobine torique de section carrée

On considère une bobine torique de section carrée (un donut dont les tranches auraient deux faces carrées). Cette bobine est constituée de N spires jointives carrées, de côté h et parcourues par courant d'intensité I (comme indiqué sur le schéma). Le tore est centré sur le point O, son rayon intérieur est r_1 et son rayon extérieur est r_2. On repère un point $\mathrm{M}(r, \theta, z)$ dans le système de coordonnées cylindriques (représenté sur le schéma dans le plan de la feuille qui coupe le tore en deux parties égales).



2.1 Etudier les éléments de symétrie et les invariances de cette distribution de courant. En déduire, dans un système de coordonnées adapté, l'expression réduite du champ magnétique $\vec{B}$ créé par cette distribution.

2.2 Utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétique en toute région de l'espace.