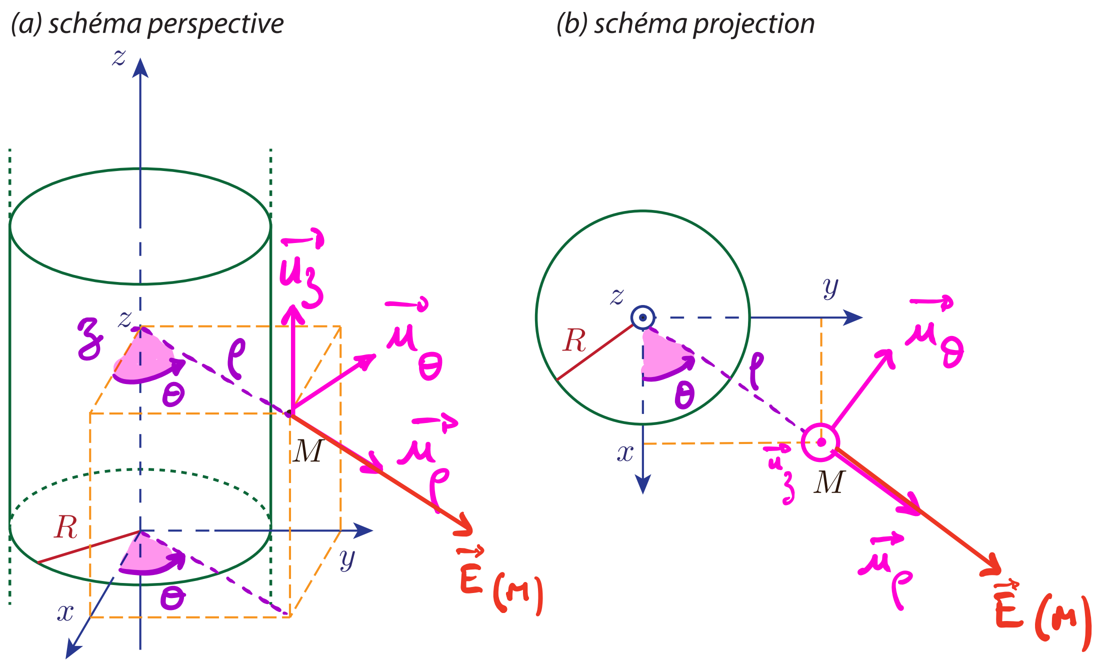
4 Problème — Barreau cylindrique chargé en volume

On considère un barreau cylindrique de longueur infinie, d'axe de révolution (z), de section circulaire de rayon R. Une charge positive est répartie uniformément dans tout le volume du barreau, avec la densité volumique de charge $q_v > 0$. On donne, en coordonnées cylindriques : $\vec{\text{grad}}(f(\rho,\theta,z)) = \frac{\partial f}{\partial \rho}\cdot\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\cdot\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\vec{u}_z$



Question 12 Définir un système de coordonnées cylindriques. Sur les deux schémas (a) et (b) ci-dessus, représenter graphiquement les coordonnées cylindriques du point M et dessiner les vecteurs unitaires correspondants (au point M).

.... ☐0 ☐0.5 ☐1 ☐1.5 ■2 *reservé au correcteur*

Coordonnées cylindriques (ρ, θ, z)

Question 13 Définir, dans le système de coordonnées cylindrique, chacun des trois éléments de symétrie de la distribution de charge qui passent par le point M. Quelles conséquences sur les composantes du champ électrique $\vec{E}(M)$ au point M ? Dessiner le vecteur $\vec{E}(M)$ sur le schéma (b).

.... ☐0 ☐0.5 ☐1 ☐1.5 ☐2 ■2.5 *reservé au correcteur*

Le point M appartient à deux plans de symétrie $(M, \vec{u}_\rho, \vec{u}_z)$ et $(M, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$, ainsi qu'à un axe de symétrie de la distribution de charge $(M, \vec{u}_\rho)$. Donc le champ électrique $\vec{E}(M)$ est colinéaire de $\vec{u}_\rho$: $\vec{E}(\rho,\theta,z) = E(\rho,\theta,z)\cdot\vec{u}_\rho$

Question 14 Déterminer les opérations sur les coordonnées d'espace qui laissent invariante cette distribution de charge. En déduire l'expression la plus simplifiée possible du champ électrique $\vec{E}(M)$.

.... ☐0 ☐0.5 ☐1 ☐1.5 ■2 *reservé au correcteur*

La distribution de charge est invariante :

- par rapport à une translation de vecteur directeur $\vec{u_z}$
- par rapport à une rotation d'angle θ

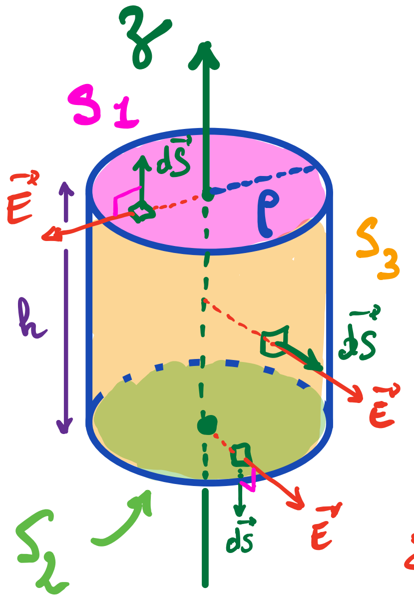
On en déduit que le champ électrique est indépendant des variables d'espace z et θ.

L'expression simplifiée du champ se réduit à :

$$\boxed{\vec{E}(\rho, \theta, z) = E(\rho) \cdot \vec{u_\rho}}$$

Question 15 Dans les questions suivantes vous utiliserez le théorème de Gauss pour déterminer le champ électrique $\vec{E}$ en tout point de l'espace en fonction de q_v. Ecrire le théorème de Gauss (en précisant les notations) puis justifier votre choix de surface fermée.

.... ☐0 ☐0,5 ☐1 ☐1,5 ■2 *reservé au correcteur*



Théorème de Gauss : $\oiint_{\text{surface fermée}} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

Je choisi comme surface fermée Σ un cylindre droit à base circulaire de rayon ρ, d'axe de révolution (Oz), de hauteur h.

Sur S_1 : $\vec{E} \perp \vec{dS}$

Sur S_2 : $\vec{E} \perp \vec{dS}$

Sur S_3 : $\vec{E} \,//\, \vec{dS}$ et $\rho = cte$ (donc $E(\rho) = cte$)

$\Sigma = S_1 + S_2 + S_3$

Question 16 Calculer $\vec{E}$ en tout point extérieur au cylindre chargé, en détaillant vos calculs (définir toutes les variables introduites, faites des schémas si nécessaire, justifier les étapes de vos calculs...).

.... ☐0 ☐0.5 ☐1 ☐1.5 ☐2 ■2.5 *reservé au correcteur*

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iint_{S_1} \underbrace{\vec{E}\cdot\vec{dS}}_{0} + \iint_{S_2} \underbrace{\vec{E}\cdot\vec{dS}}_{0} + \iint_{S_3} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iint_{S_3} E(\rho)\cdot dS$$

car $\vec{E} \perp \vec{dS}$

car $\vec{E} = E(\rho)\cdot\vec{u}_\rho$, $\vec{dS} = dS\cdot\vec{u}_\rho$

car $\rho = cte$ sur S_3

$$= E(\rho)\cdot\iint_{S_3} dS = E(\rho)\cdot[2\pi\rho\cdot h]$$

Si $\rho > R$ (extérieur du cylindre chargé)

$$E(\rho)\cdot 2\pi\rho h = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

or $Q_{int} = q_v \cdot \underbrace{\pi R^2 h}$

volume du cylindre chargé à l'intérieur de la surface de Gauss.

$$\Rightarrow \boxed{E(\rho) = \frac{q_v \cdot R^2}{2\varepsilon_0 \cdot \rho}}$$

Question 17 Calculer $\vec{E}$ en tout point à l'intérieur au cylindre chargé.

.... ☐ 0 ☐ 0.5 ☐ 1 ☐ 1.5 ☐ 2 ■ 2.5 *reservé au correcteur*

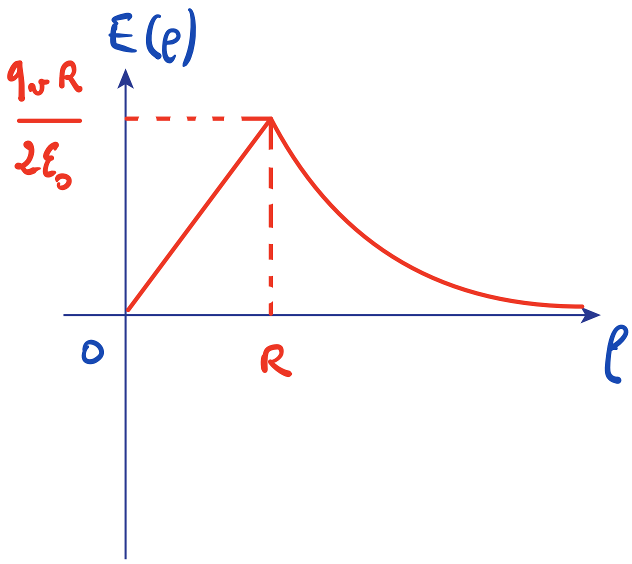
Si $\rho < R$ (intérieur du cylindre chargé)

$$E(\rho) \cdot 2\pi\rho h = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \text{or} \quad Q_{int} = q_v \cdot \underbrace{\pi \rho^2 h}$$

fraction du volume du cylindre chargé à l'intérieur de la surface de Gauss.

$$\Rightarrow \boxed{E(\rho) = \frac{q_v}{2\varepsilon_0} \cdot \rho}$$

Question 18 Tracer le graphe du module du champ électrique E en fonction de la coordonnée d'espace adéquate. .... ☐0 ☐0,5 ■1 *reservé au correcteur*



note : $\forall \rho$, $E(\rho) > 0$ car $q_v > 0$

Question 19 En déduire l'expression du potentiel électrique créé en tout point de l'espace (à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre). On choisira comme référence des potentiels $V = 0$ sur l'axe (z) du cylindre chargé. On considèrera que le potentiel électrique est une fonction continue.
.... ☐0 ☐0.5 ☐1 ☐1.5 ☐2 ■2.5 *reservé au correcteur*

Par définition : $\vec{E}(\rho,\theta,z) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V(\rho,\theta,z)$

$$\begin{vmatrix} E(\rho) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \partial V/\partial \rho \\ \frac{1}{\rho}.\partial V/\partial \theta \\ \partial V/\partial z \end{vmatrix} \Rightarrow E(\rho) = -\frac{dV}{d\rho}$$

et $V(\rho) = \int dV = -\int E(\rho).d\rho$

1) si $\rho > R$ $\quad V(\rho) = -\frac{q_v R^2}{2\varepsilon_0}\int \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{q_v R^2}{2\varepsilon_0}\ln\rho + \underbrace{V_1}$

constantes

2) si $\rho < R$ $\quad V(\rho) = -\frac{q_v}{2\varepsilon_0}\int \rho.d\rho = -\frac{q_v}{4\varepsilon_0}.\rho^2 + \overbrace{V_2}$

3) référence du potentiels $\quad V(\rho=0) = 0$

$\Leftrightarrow \quad V_2 = 0$

4) continuité du potentiel en $\rho = R$

$$-\frac{q_v R^2}{2\varepsilon_0}\ln R + V_1 = -\frac{q_v}{4\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad V_1 = \frac{q_v}{4\varepsilon_0}\left(2\ln R - 1\right)$$

note : $q_v > 0$ donc $V(\rho) < 0$, $\forall \rho$

Question 20 Tracer le graphe du potentiel électrique en fonction de la coordonnée d'espace adéquate.

.... ☐0 ☐0,5 ■1 *reservé au correcteur*