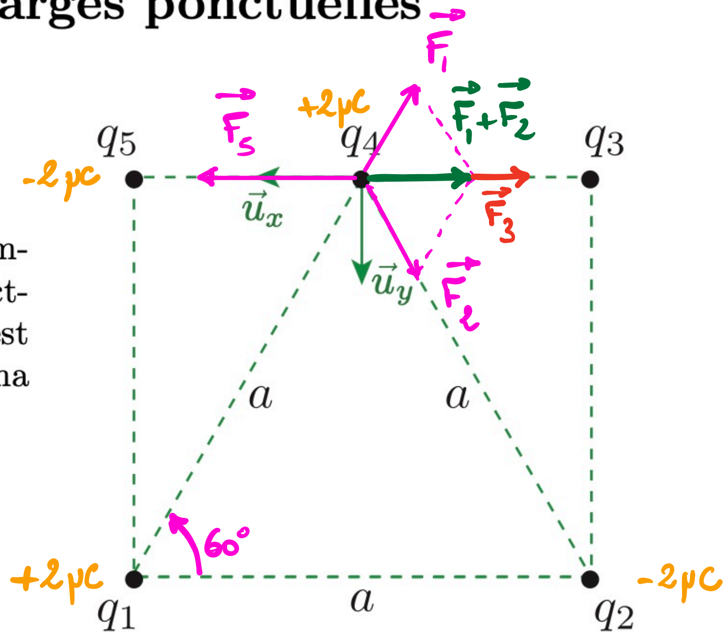
4 Exercice — Système de 5 charges ponctuelles



On considère 5 charges ponctuelles placées aux sommets d'un triangle équilatéral de côté a et d'un rectangle dans lequel le triangle est inscrit. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\vec u_x, \vec u_y)$. Voir le schéma ci-contre.
Quatre charges sont connues :
$q_1 = q_4 = 2\,\mu\text{C}$ et $q_2 = q_5 = -2\,\mu\text{C}$.

Question 13 Déterminez la valeur de la charge q_3 pour que la charge q_4 soit à l'équilibre.

On peut exprimer la condition d'équilibre de deux façons équivalentes

Equilibre mécanique : $\sum \vec F = \vec F_1 + \vec F_2 + \vec F_5 + \vec F_3 = \vec 0$

ou champ $\vec E$ subi par q_4 : $\vec E = \vec E_1 + \vec E_2 + \vec E_5 + \vec E_3 = \vec 0$

On exprime les $\vec F_i$ (ou $\vec E_i$) dans le repère $\vec u_x, \vec u_y$:

$$\vec E_1 = K \frac{|q_1|}{a^2}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).\vec u_x - \cancel{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right).\vec u_y}\right]$$

$$\vec E_2 = K.\frac{|q_2|}{a^2}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).\vec u_x + \cancel{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right).\vec u_y}\right]$$

$$\vec E_5 = K \frac{|q_5|}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}\left[\vec u_x\right]$$

$$\Rightarrow \vec E_3 = -\left(\vec E_1 + \vec E_2 + \vec E_5\right) = -K\frac{q}{a^2}\left[\underbrace{-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 4}_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-4}\right].\vec u_x$$

avec $q = 2\mu C$
$= |q_1| = |q_2|$
$= |q_5|$

$$\vec E_3 = -K\frac{3q}{a^2}.\vec u_x$$

$$\text{or } \vec E_3 = K\frac{q_3}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}.\vec u_x \Rightarrow -\frac{3q}{a^2} = \frac{4q_3}{a^2} \Rightarrow q_3 = -\frac{3}{4}q = \underline{-1{,}5\,\mu C}$$