

# Chapitre 6

## Distributions de courants

En électrostatique, les charges restent immobiles. Leur déplacement est à l'origine des courants électriques qui sont la source du champ magnétique que nous étudierons au prochain chapitre. Comme pour les distributions de charges, nous décrirons ici les distributions de courants et leurs modélisations.

### 6.1 Charges en mouvement - Courant et intensité électriques

Considérons une surface  $S$  munie en tout point d'une normale orientée par un vecteur unitaire  $\vec{n}$  (figure 5.1). On note  $\delta Q_m$  la charge mobile traversant cette surface entre les instants  $t$  et  $t + \delta t$ , comptée positivement dans le sens choisi par l'orientation de  $S$ . L'intensité  $I(S, t)$  du courant électrique à travers une surface  $S$  est liée à la charge  $\delta Q_m$  qui traverse  $S$  entre les instants  $t$  et  $t + \delta t$  par la relation  $\delta Q_m = I(S, t)\delta t$ . L'intensité, grandeur électrique, dépend de l'orientation de  $S$ . Elle s'exprime en ampère (symbole : A), unité de base du Système International d'unités. Pour un système fermé qui n'échange pas de matière avec le milieu qui l'entoure, l'expérience montre que la charge reste constante.

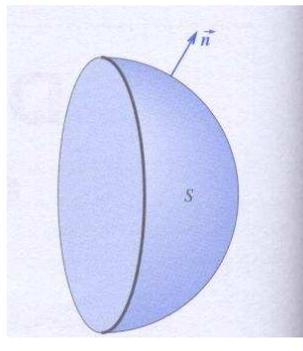


FIG. 6.1 – surface  $S$  orientée par un vecteur unitaire  $\vec{n}$

On appelle courant électrique tout mouvement d'ensemble (mouvement ordonné) de particules chargées dans un référentiel. On distingue plusieurs types de courants :

- **Les courants de conduction** sont associés au déplacement d'ensemble des électrons dans les métaux, d'ions dans les solutions d'électrolytes, d'électrons ou de lacunes électroniques (trous) dans les semi-conducteurs. Pour un conducteur métallique, ce sont les électrons dits de conduction qui autorisent l'existence d'un courant électrique. En générale, la densité des électrons libres est très élevée ( $n_e = 8,4 \cdot 10^{28} m^{-3}$  pour le cuivre). Lorsque le conducteur est soumis à une différence de potentiel, il apparaît un champ électrique au sein du conducteur. Ce champ est à l'origine du mouvement d'ensemble (ou de dérive) des électrons. Ce mouvement d'ensemble est caractérisé par une vitesse de l'ordre de  $10^{-4} ms^{-1}$  pour un courant de 5 A.
- **Les courants de convection** résultent du déplacement dans un référentiel donné d'un support matériel portant des charges. C'est par exemple le cas d'un disque chargé tournant autour de son axe. Ce mouvement crée des courants annulaires ou orthoradiaux.
- **Les courants particuliers** : On associe un courant électrique dit particulière à un faisceau de particules chargées (électrons ou ions dans un tube à vide )

## 6.2 Distributions de courants

### 6.2.1 Courants filiformes

#### Conducteur filiforme

Un fil conducteur (en général métallique) de faible section à l'échelle macroscopique peut être assimilé à une courbe  $\mathcal{C}$  (sans épaisseur). Dans cette modélisation, la seule information à laquelle nous avons accès est la quantité de charge passant au point  $M$  par unité de temps, c'est à dire l'intensité  $i(M, t)$ . L'intensité  $i(M, t)$  du courant dépend en général à la fois du point  $M$  considéré et du temps. La flèche tracée sur la figure 5.2 indique l'orientation du vecteur unitaire normal à une section du fil. Un déplacement de charges positives dans le sens de la flèche ou de charges négatives dans le sens contraire correspond à un courant  $i(M, t) > 0$ .

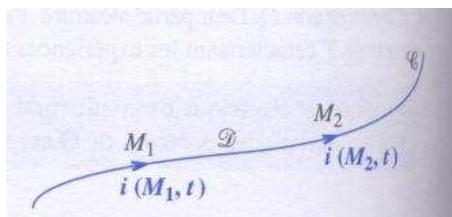


FIG. 6.2 – Courant filiforme

En régime permanent, la charge mobile étant uniformément répartie dans le conducteur et ne pouvant s'accumuler en aucun point du fil, nous pouvons en déduire les propriétés suivantes :

En régime permanent, un courant filiforme ne peut exister que sur un circuit fermé et l'intensité  $i$  a la même valeur en tout point d'un fil sans dérivation.

## 6.2.2 Courants volumiques

### Définition

Dans un conducteur, (métal, électrolyte,...) nous considérons un ensemble de particules de charge  $q$ , de densité  $n$  et animées d'un mouvement d'ensemble de vitesse  $\vec{v}$ . La densité volumique de charges mobiles est :  $\rho_m = nq$ . Il est important de ne pas confondre la densité de charges mobiles (électrons libres dans un métal, ions dans une solution,...) avec la densité totale de charges qui tient compte des charges fixes (ions d'un réseau cristallin par exemple).

Le vecteur densité volumique de courant associé à un mouvement d'ensemble à vitesse  $\vec{v}$  est :

$$\vec{j} = nq\vec{v} = \rho_m\vec{v}$$

Ce vecteur est une grandeur nivelée et la valeur de son module s'exprime en  $\text{A.m}^{-2}$ .

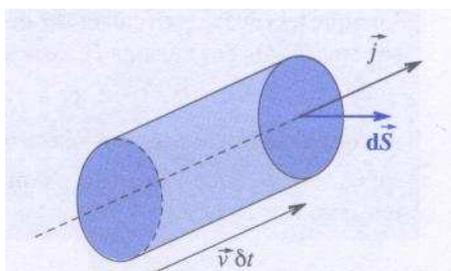


FIG. 6.3 – Les charges traversant la surface  $dS$  pendant le temps  $\delta t$  sont situées dans un cylindre de base  $dS$  et de génératrice  $\vec{v}\delta t$

Pour ce mouvement, la charge mobile  $\delta Q_m$  traversant entre les instants  $t$  et  $t + \delta t$  la surface élémentaire  $\vec{dS}$  représentée sur la figure 5.3, est contenue à la date  $t$  dans le cylindre oblique de hauteur  $v\delta t$  et de volume  $d\tau = \vec{v}\delta t \cdot \vec{dS}$ . Par conséquent :

$$\delta Q_m = nqd\tau = nq\vec{v}\delta t \cdot \vec{dS}$$

L'intensité  $dI$  traversant une surface  $S$  est :  $dI = nq\vec{v} \cdot \vec{dS}$

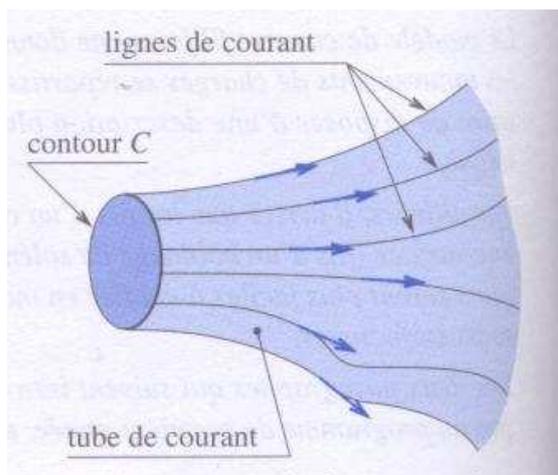


FIG. 6.4 – Lignes et tube de courant s'appuyant sur un contour  $C$

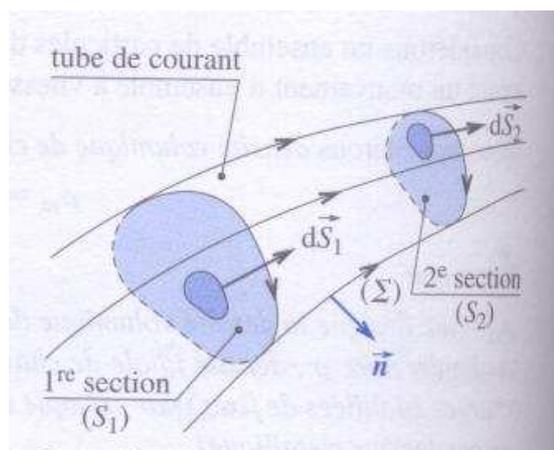


FIG. 6.5 – Flux du vecteur densité de courant  $\vec{j}$  à travers une surface fermée

**L'intensité du courant électrique traversant une surface  $S$  est égale au flux du vecteur densité de courant  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  à travers cette surface :**

$$I(S, t) = \iint \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}$$

DÉFINITIONS (figure 5.4) : Une **ligne** de courant est une ligne en tout point de laquelle le vecteur densité volumique de courant  $\vec{j}$  est tangent.

Un **tube** de courant est un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour.

### Flux conservatif de $\vec{j}$ en régime permanent statique

On appelle régime permanent statique un régime pour lequel le vecteur  $\vec{j}$  n'évolue pas dans le temps. Dans ce cas, la charge contenue à l'intérieur d'une surface  $S$  fixe n'évolue pas. L'intensité traversant cette surface est donc nulle, c'est à dire que le flux sortant de  $\vec{j}$  à travers  $S$  est nul. Nous pouvons appliquer ce résultat à une surface fermée obtenue par l'association de deux surfaces (sections)  $S_1$  et  $S_2$  d'un même tube de courant et de la surface latérale  $\Sigma$  (figure 5.5). Comme il n'y a aucun mouvement de charge à travers la surface ( $\vec{j} \cdot \vec{n} = 0$  où  $\vec{n}$  est le vecteur normal à la surface latérale  $\Sigma$ ), l'intensité traversant la surface  $S_1$  ( $I_1 = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}_1$ ) est égale à celle traversant la surface  $S_2$  ( $I_2 = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}_2$ ).

**En régime permanent statique (indépendant du temps), le vecteur  $\vec{j}$  a un flux conservatif : le courant électrique est le même à travers toutes les sections d'un même tube de courant**

### 6.2.3 Courants surfaciques

Lorsque la distribution de courants volumique se trouve confinée dans une nappe d'épaisseur faible à l'échelle macroscopique, nous pouvons assimiler celle-ci à une distribution surfacique de courants.

#### Définition

On considère une surface portant une densité surfacique de charges mobiles  $\sigma_m$  animées d'un mouvement d'ensemble à vitesse  $\vec{v}$  :

**Le vecteur densité surfacique de courant associé à un mouvement d'ensemble à vitesse  $\vec{v}$  est :**

$$\vec{j}_s = \sigma_m \vec{v}$$

**Ce vecteur est une grandeur nivelée et la valeur de son module s'exprime en  $A.m^{-1}$ .**

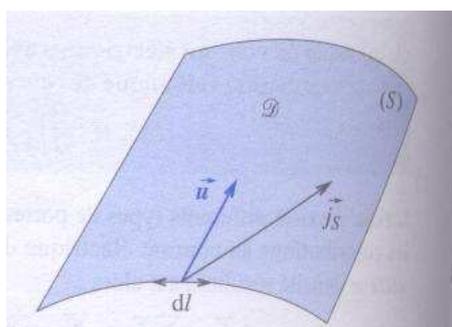


FIG. 6.6 – Vecteur densité de courant surfacique

Lorsque les courants circulent sur des nappes surfaciques, le vecteur densité surfacique de courants  $\vec{j}_s$ , associé est défini par :

$$dI = \vec{j}_s \cdot dl\vec{u} = \vec{j}_s \cdot d\vec{l}$$

$dI$  étant l'intensité traversant l'élément de longueur  $dl$  tracé sur la surface (figure 5.6).  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire normal à  $dl$ . L'expression de l'intensité  $I$  traversant une ligne  $\mathcal{L}$  reliant deux points  $A$  et  $B$  de la surface est donnée par l'expression :

$$I_{AB} = \int_A^B \vec{j}_s \cdot dl\vec{u}$$

#### Exemples

1. **Disque en rotation** : Un disque chargé uniformément en surface tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire  $\omega$ . Le vecteur vitesse en tout point du disque est  $\vec{v} = r\omega\vec{u}_\theta$ . Le vecteur densité surfacique de courant est donc :  $\vec{j}_s = \sigma\vec{v} = \sigma r\omega\vec{u}_\theta$ .

Le calcul de l'intensité traversant une ligne matérialisée par le rayon  $R$  du disque est :

$$I = \int_0^R \vec{j}_s dr \vec{u}_\theta = \int_0^R \sigma_m r \omega \vec{u}_\theta \cdot dr \vec{u}_\theta = \frac{\sigma_m \omega R^2}{2}$$

2. **Courant solénoïdal** : Un solénoïde d'axe  $Oz$  est constitué de  $n$  spires jointives par unité de longueur (figure 5.7). On peut considérer que le courant  $i$  parcourant les spires est orienté suivant le vecteur  $\vec{u}_\theta$ . Le courant total  $I$  traversant une longueur  $L$  tangente au solénoïde et parallèle à son axe est donné par  $I = niL$ . Si l'épaisseur du bobinage est faible, nous pouvons assimiler ce courant linéique à un courant de surface  $\vec{j}_s$  orienté selon  $\vec{u}_\theta$ . Le courant  $I$  est donné par l'expression suivante :

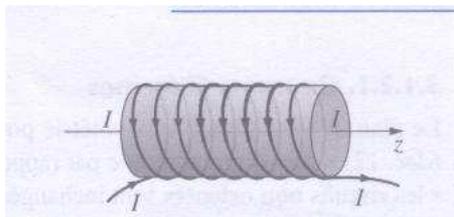


FIG. 6.7 – Courant solénoïdal

$$I = \int_0^L j_s \vec{u}_\theta \cdot dz \vec{u}_\theta$$

On en déduit l'expression du vecteur  $\vec{j}_s$  :  $\vec{j}_s = ni \vec{e}_\theta$

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Le champ magnétique</b>	<b>3</b>
1.1	Introduction et historique . . . . .	3
1.1.1	Les phénomènes magnétiques . . . . .	3
1.1.2	Le Champ magnétique . . . . .	4
1.2	Définition du champ magnétique . . . . .	4
1.3	La loi de Biot et Savart . . . . .	5
1.4	Exemples de calcul de champ magnétique . . . . .	7
1.4.1	Courants linéiques . . . . .	7
1.4.2	courants surfaciques . . . . .	10
1.5	Topographie du champ magnétique . . . . .	11
1.5.1	Exemples de cartes de champ . . . . .	12



# Chapitre 1

## Le champ magnétique

### 1.1 Introduction et historique

Le domaine de l'électrostatique est celui de l'interaction entre charges immobiles et de ses effets. Nous allons compléter notre étude en nous intéressant à une interaction nouvelle qui apparaît entre courants électriques, c'est à dire entre charges électriques en mouvement. C'est le domaine du magnétisme. Notre propos se limitera à la magnétostatique, c'est à dire à la description des phénomènes magnétiques indépendants du temps. Nous allons dans un premier temps étudier comment leur interprétation conduit à l'introduction d'un champ vectoriel : le champ magnétique dont nous étudierons les effets. Nous verrons ensuite comment calculer le champ magnétique créé par une distribution de courants.

#### 1.1.1 Les phénomènes magnétiques

Certains phénomènes magnétiques sont connus depuis aussi longtemps que les phénomènes d'électrisation. Depuis l'antiquité, on sait que le minerai appelé magnétite (oxyde de fer) est capable d'attirer les objets en fer. On sait aussi depuis longtemps que la terre est un grand aimant, comme le montre son effet sur l'aiguille d'une boussole. Cependant, ce n'est qu'en 1820 que Hans Christian Oersted (1777-1851), physicien danois, découvrit que le courant dans un fil conducteur est capable de faire dévier l'aiguille d'une boussole. Les courants dans les fils électriques, aussi bien que des charges en mouvement dans le vide, produisent des champs magnétiques identiques à ceux dus à des aimants permanents. Comme les courants exercent des forces sur les aimants, on s'attend en vertu de la troisième loi de Newton à ce que les aimants produisent également des forces sur les circuits électriques. L'expérience confirme bien l'existence de telles forces.

En 1820, Jean-Baptiste Biot et Félix Savart étudient les propriétés de la force subie par une aiguille aimantée et Pierre-Simon de Laplace traduit cette loi par une formule qui porte le nom de Biot et Savart. André-Marie Ampère (1775-1836), considéré comme le fondateur de l'électromagnétisme, déduit de cette étude la notion et les propriétés du champ magnétostatique créé par des courants. Le choix du nom de ce physicien français, pour l'unité d'intensité électrique dans le système international d'unités, est une reconnaissance de ses travaux en électricité.

### 1.1.2 Le Champ magnétique

Nous avons vu que les effets magnétiques procèdent d'une interaction à distance. Comme en électrostatique, dans la région où se manifestent les effets, ils peuvent être décrits à l'aide d'une grandeur, fonction de l'endroit choisi, c'est à dire d'un champ. Cette notion sera un concept valable si effectivement la connaissance locale de ce champ, en une région de l'espace aussi petite soit-elle, suffit pour déterminer entièrement les phénomènes magnétiques qui s'y produisent, sans que l'on soit contraint à décrire de manière détaillée la source du champ. C'est cette propriété fondamentale, vérifiée expérimentalement, qui justifie comme en électrostatique, la description de l'interaction en terme de champ.

## 1.2 Définition du champ magnétique

Quels que soient les effets magnétiques observés en un point de l'espace, une seule grandeur est nécessaire pour les décrire. C'est un champ vectoriel, appelé champ magnétique que nous désignerons par  $\vec{B}$ . Pour le définir, il suffit de choisir un de ses effets. Nous prendrons le phénomène élémentaire de l'action magnétique sur une particule chargée en mouvement. Cette action se caractérise par une force  $\vec{f}_m$ . On se place dans un référentiel galiléen ; la particule de charge  $q$  a une vitesse  $\vec{v}$ . Nous **définissons** le champ magnétique  $\vec{B}$  par la relation :

$$\vec{f}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Cette relation résume l'étude expérimentale de la force magnétique  $\vec{f}_m$  subie par la particule en mouvement dans un champ magnétique  $\vec{B}$ .

En un point donné de l'espace, on constate les propriétés suivantes :

- il existe une direction privilégiée  $\vec{u}$  de la vitesse  $\vec{v}$  pour laquelle la force s'annule.
- pour une direction de vitesse quelconque, la force est perpendiculaire à la fois à  $\vec{v}$  et  $\vec{u}$
- l'intensité de la force magnétique est proportionnelle à vitesse  $\|\vec{v}\|$  et au sinus de l'angle  $(\vec{v}, \vec{u})$ .

La proportionnalité à la charge peut être vérifiée en prenant des particules de charges opposées et par exemple des ions multiplesment chargés. Il apparaît clairement que la direction de du champ magnétique  $\vec{B}$  au point considéré est celle de  $\vec{u}$ . La relation ci dessus montre que le module de la force est proportionnel à l'intensité du champ magnétique  $\vec{B}$ .

Dans le système S.I., la force magnétique est exprimée en newton , la charge en coulomb et la vitesse en mètre par seconde ; l'unité de champ magnétique est alors complètement déterminée par la relation de définition ; elle est appelée *tesla* et a pour symbole T. On utilise aussi couramment un sous-multiple : le gauss (symbole : G).  $1G = 10^{-4}T$ .

Ordre de grandeur de quelques champs magnétiques :

- Champ magnétique terrestre en France : composante horizontale  $\simeq 0.2G$  ; composante verticale  $\simeq 0.4G$
- Electro-aimant dans l'entrefer (bobines de Helmholtz) : 0.1T à 2T
- Bobine supraconductrice (pour la résonance magnétique nucléaire, IRM) : 5T à 50T. Un champ aussi intense ne peut être obtenu que dans un petit volume.

## 1.3 La loi de Biot et Savart

Considérons un conducteur filiforme parcouru par un courant d'intensité  $i$  et notons  $\vec{dl}$  un déplacement élémentaire le long de ce circuit orienté dans le même sens que le courant. On appelle élément de courant, le vecteur  $\vec{dC} = i\vec{dl}$ , dont la norme s'évalue en A.m. Cet élément de courant est à l'origine du champ magnétique  $\vec{B}$ . Le champ magnétique est relié aux éléments de courant par la loi de Biot et Savart :

**La contribution d'un élément de courant  $\vec{dC} = i\vec{dl}$ , situé au point P, au champ total  $\vec{B}(M)$  créé en M par une distribution de courants est donnée par la loi de Biot et Savart :**

$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{dC} \wedge \vec{PM}}{(\text{PM})^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\vec{dl} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (1.1)$$

avec  $\vec{r} = \vec{PM} = r\vec{e}_{P \rightarrow M}$ . Le coefficient  $\mu_0$ , appelé perméabilité du vide, vaut exactement  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ . H désigne le henry, unité d'inductance. L'unité de champ magnétique est le tesla dont le symbole est T.

Dans le cas d'une distribution de courant volumique, l'élément de courant  $\vec{dC}$  s'écrit  $\vec{dC} = \vec{j}d\tau$  où  $\vec{j}$  est le vecteur densité volumique de courant et  $d\tau$  le volume élémentaire. De même, pour un courant surfacique, l'élément de courant  $\vec{dC}$  s'écrit  $\vec{dC} = \vec{j}_s dS$  où  $\vec{j}_s$  est le vecteur densité surfacique de courant et  $dS$  le volume élémentaire. On peut vérifier que ces expressions de  $\vec{dC}$  s'expriment bien en A.m.

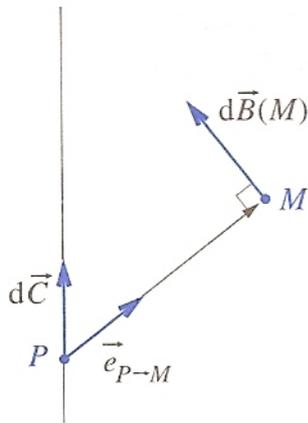


FIGURE 1.1 – Le champ magnétique  $d\vec{B}$  est perpendiculaire au plan contenant M et P et défini par les vecteurs  $d\vec{C}$  et  $\vec{r}$ .

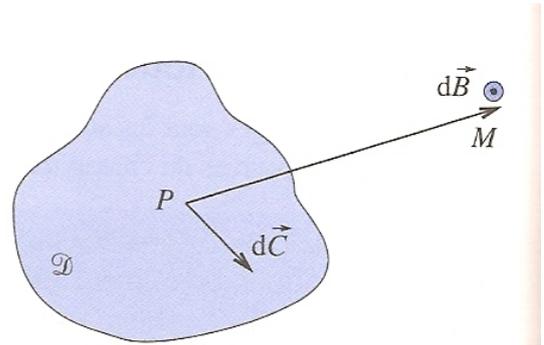


FIGURE 1.2 – Champ magnétique d'une distribution de courants  $\mathcal{D}$

L'expression du champ élémentaire  $d\vec{B}$  créé par un élément de courant  $d\vec{C}$  s'écrit :

– Dans le cas d'une distribution surfacique de courant :  $d\vec{C} = \vec{j}_s dS$

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_s dS \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (1.2)$$

– Dans le cas d'une distribution volumique de courant :  $d\vec{C} = \vec{j} d\tau$

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} d\tau \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (1.3)$$

On en déduit l'expression du champ magnétique pour chaque type de distribution  $\mathcal{D}$  de courant :

- Distribution volumique

$$\vec{B}(M) = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} d\tau \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad (1.4)$$

- Distribution surfacique

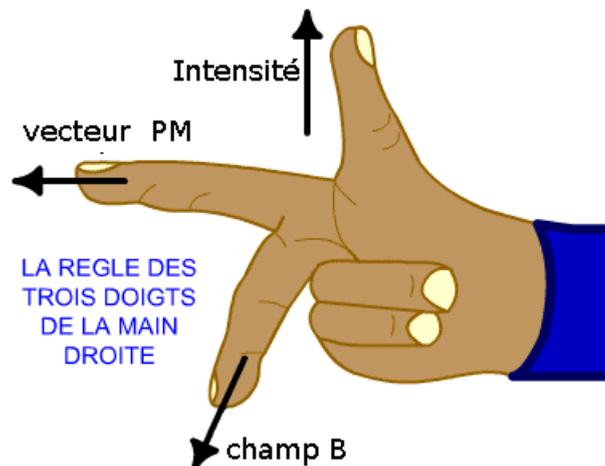
$$\vec{B}(M) = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_s dS \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad (1.5)$$

- Distribution linéique (filiforme)

$$\vec{B}(M) = \int_{\mathcal{D}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad (1.6)$$

**REMARQUES :**

- \* En pratique, pour connaître la direction et le sens du champ magnétique en un point M quelconque, on utilise la règle dite des “trois doigts” de la main droite. Le courant entre par la base du pouce et ressort par son extrémité, l’index indique le sens du vecteur  $\vec{PM}$  et le sens de  $\vec{B}$  est donné par le majeur (voir figure 1.3). Le pouce, l’index et le majeur formant une base orthogonale directe.
- \* Pour une distribution volumique de courants, l’intégrale de Biot et savart permet le calcul du champ magnétique en tout point de l’espace.
- \* Dans le cas d’une distribution surfacique de courant, cette intégrale n’autorise pas le calcul du champ sur la nappe de courant. Nous verrons qu’il existe une discontinuité finie de la composante tangentielle à la surface du champ magnétique à la traversée de cette surface.
- \* Pour une distribution filiforme, on exclut de calculer le champ magnétique en un point du circuit car l’intégrale 1.6 y est alors divergente.

FIGURE 1.3 – Règle des “trois doigts” de la main droite pour l’orientation du champ  $\vec{B}$ 

## 1.4 Exemples de calcul de champ magnétique

Dans ce qui suit, nous allons déterminer le champ magnétique de distributions de courant usuelles. Les cas traités sont importants, tant du point de vue de la compréhension des propriétés du champ magnétique que celui des applications ou de l’interprétation de phénomènes physiques liés à ces distributions.

### 1.4.1 Courants linéiques

Les résultats suivants sont importants et doivent pouvoir être retrouvés rapidement.

**Fil rectiligne infini parcouru par un courant  $i$ .**

Nous considérons ici un fil rectiligne infini confondu avec l'axe Oz et parcouru par un courant  $i$ . Le courant et l'axe Oz sont orientés dans le même sens. Ce système modélise un circuit fermé comportant une portion rectiligne de longueur L grande devant la distance  $r$  au point M où est évalué le champ  $\vec{B}(M)$ . Le point M( $r, \theta, z$ ) est repéré par ses coordonnées cylindriques. L'élément de courant  $i d\vec{l}$  situé en P(0, 0, Z), crée le champ élémentaire

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{4\pi (PM)^3}$$

En posant  $d\vec{l} = dZ \vec{u}_z$  et  $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HM} = (z - Z) \vec{u}_z + r \vec{u}_r$  où H(0, 0, z) est le projeté orthogonal du point M sur l'axe Oz, on obtient :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i r dZ}{(r^2 + (z - Z)^2)^{3/2}} \vec{u}_\theta$$

En introduisant l'angle  $\alpha = (\widehat{MH MP})$  et en posant  $\cos \alpha = r / (r^2 + (z - Z)^2)^{1/2}$  ainsi que  $dZ = r d\alpha / \cos^2 \alpha$ , on obtient :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i \cos \alpha d\alpha}{4\pi r} \vec{u}_\theta$$

Finalement, le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  créé par le fil infini se calcule en intégrant l'expression ci dessus avec  $Z = \pm\infty$  comme bornes de l'intégrale, ce qui correspond à  $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$ . On obtient :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \vec{u}_\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta \quad (1.7)$$

On remarque que le champ magnétique est orthoradial.

**Champ créé par une spire circulaire sur son axe.**

Le cas de la spire circulaire de rayon  $R$  parcourue par un courant  $i$  est important car il permet de modéliser de nombreux systèmes macroscopiques (solénoïdes, bobines de Helmholtz, aimants...) ou microscopiques (moments magnétiques des atomes). Nous calculons ici le champ  $\vec{B}(M)$  en un point M de l'axe de la spire. Le champ magnétique élémentaire  $d\vec{B}(M)$  (fig. 1.6) créé par la spire d'axe Oz et placée dans le plan ( $xOy$ ) est donné par l'expression 1.1 :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i R d\theta \vec{u}_\theta \wedge (-R \vec{u}_r + z \vec{u}_z)}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.8)$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} (R^2 d\theta \vec{u}_z + R z d\theta \vec{u}_r) \quad (1.9)$$

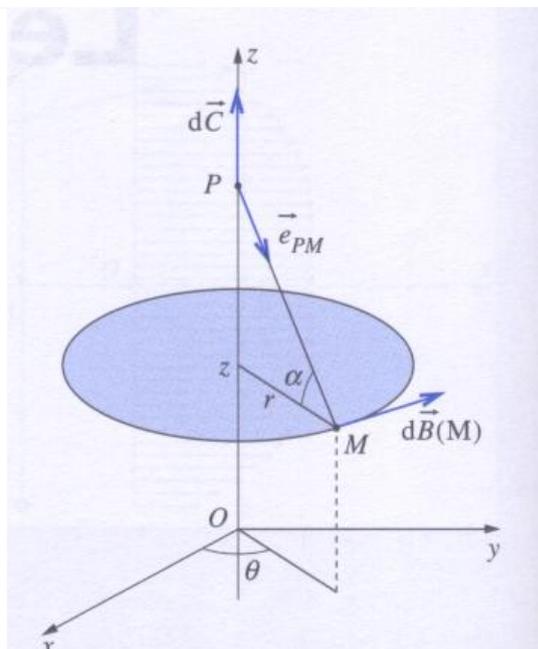


FIGURE 1.4 – Champ élémentaire  $d\vec{B}$  créé en un point  $M(r, \theta, z)$  par un élément de courant  $i d\vec{l}$  situé en un point  $P$  du fil rectiligne.

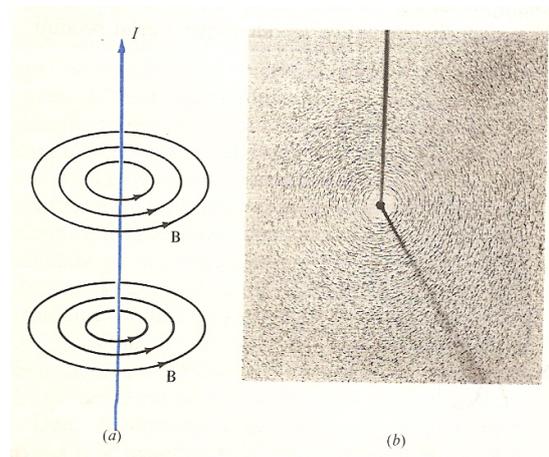


FIGURE 1.5 – Lignes de champ magnétique d'un fil rectiligne infini parcouru par un courant  $i$ .

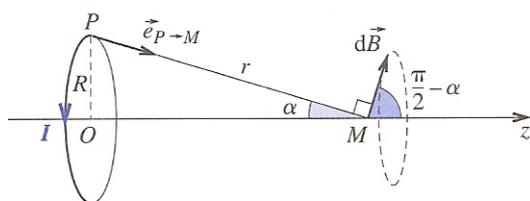


FIGURE 1.6 – Champ élémentaire  $d\vec{B}$  créé en un point  $M$  de l'axe  $Oz$  par un élément de courant  $i d\vec{l}$  situé en un point  $P$  de la spire.

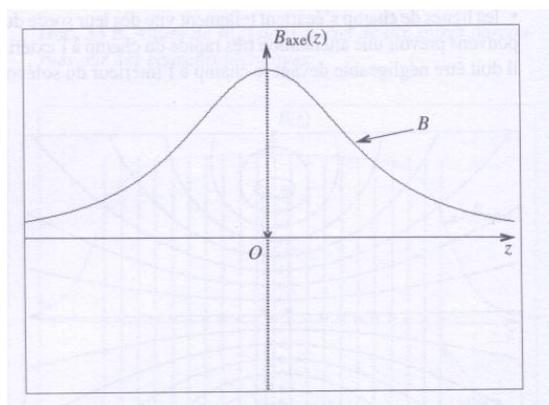


FIGURE 1.7 – Champ magnétique sur l'axe d'une spire

Dans l'expression 1.1, le vecteur élément de courant  $i\vec{dl} = iRd\theta\vec{u}_\theta$  et  $P\vec{M} = P\vec{O} + O\vec{M} = -R\vec{u}_r + z\vec{u}_z$ .

L'expression du champ total  $\vec{B}$  créé par la spire en M s'obtient en intégrant l'expression du champ élémentaire sur toute la spire.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (R^2 d\theta \vec{u}_z + Rz d\theta \vec{u}_r) \quad (1.10)$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} R^2 2\pi \vec{u}_z \quad (1.11)$$

$$= \frac{\mu_0 i R^2}{2 (R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z \quad (1.12)$$

Le champ  $\vec{B}$  est colinéaire à l'axe Oz et  $B_z(z)$  est une fonction paire (voir figure 1.7). Il est utile d'exprimer le champ  $\vec{B}$  en fonction de l'angle  $\alpha = \widehat{MOP}$ .

En posant  $\sin \alpha = R/\sqrt{(R^2 + z^2)^2}$ , on obtient :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2R} \sin^3 \alpha \vec{u}_z \quad (1.13)$$

Cette expression est utilisée pour le calcul du champ magnétique créé par un solénoïde sur son axe (voir TD). Le calcul du champ magnétique créé par la spire en tout point de l'espace est plus complexe et nécessite d'effectuer des approximations.

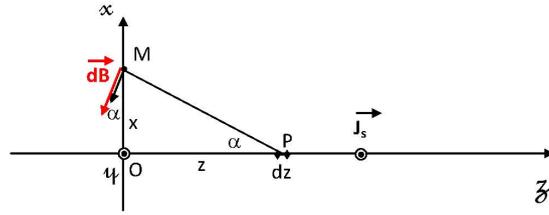
## 1.4.2 courants surfaciques

Dans ce qui suit, nous allons étudier le champ créé par des distributions de courant surfaciques en utilisant la loi de Biot et Savart et en utilisant les expressions du champ magnétique créé par des circuits filiformes et en passant de distributions de courants linéiques à des distributions de courants surfaciques.

### Champ créé par un plan infini parcouru par une densité surfacique de courant uniforme $\vec{J}_s$

Le plan yOz est parcouru par une densité de courant surfacique uniforme  $\vec{J}_s = j_s \vec{u}_y$ . On cherche à calculer le champ  $\vec{B}$  en un point M(x,0,0) de l'axe Ox. Pour ce faire, on décompose le plan yOz en bandes de largeur  $dz$  parallèles à Oy. Chaque bande peut être assimilée à un fil infini parcouru par un courant  $i = j_s dz$ . L'expression du champ magnétique élémentaire  $d\vec{B}(M)$  créé par la bande de largeur  $dz$  est donnée par l'équation 1.7 en remplaçant  $i$  par  $j_s dz$ .

On note  $\alpha = \widehat{POM}$  et  $\vec{u}_\theta = -\sin \alpha \vec{u}_z - \cos \alpha \vec{u}_x$ . On pose  $\sin \alpha = x/\sqrt{x^2 + z^2}$ ,  $z = x \cot \alpha$  et  $dz = -x d\alpha / \sin^2 \alpha$ . L'équation 1.7 donne :

FIGURE 1.8 – Champ élémentaire  $d\vec{B}$  créé par une bande de courant de largeur  $dz$ 

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 j_s dz}{2\pi \sqrt{(x^2 + z^2)}} \vec{u}_\theta \quad (1.14)$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{-j_s x d\alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{\sin \alpha}{x} (-\sin \alpha \vec{u}_z - \cos \alpha \vec{u}_x) \quad (1.15)$$

$$= \frac{\mu_0 j_s d\alpha}{2\pi} (\vec{u}_z + \cot \alpha \vec{u}_x) \quad (1.16)$$

Pour obtenir l'expression du champ  $\vec{B}(M)$ , il suffit d'intégrer l'expression ci-dessus pour  $z$  variant de  $-\infty$  à  $+\infty$ , ou encore pour  $\alpha$  variant de  $\pi$  à  $0$ . Sachant que  $\int_\pi^0 \cot \alpha = 0$ , on obtient :

$$\vec{B}(M) = \int_\pi^0 d\vec{B}(M) = \int_\pi^0 \frac{\mu_0 j_s d\alpha}{2\pi} (\vec{u}_z + \cot \alpha \vec{u}_x) = \frac{-\mu_0 j_s}{2} \vec{u}_z \quad (1.17)$$

Le champ magnétique est suivant  $\vec{u}_z$ . Pour  $x > 0$ , il est orienté vers les  $z$  négatifs si  $j_s$  est positif. Le sens du champ  $\vec{B}$  peut être directement déterminé par la loi de Biot et Savart et la règle dite des “trois doigts” permettant d'orienter le champ magnétique. Pour  $x < 0$ ,  $\alpha$  varie de  $-\pi$  à  $0$  et on obtient  $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{u}_z$ . Le champ est donc l'opposé de celui obtenu pour  $x > 0$ . Au passage de la surface, le champ magnétique est discontinu. La discontinuité de  $\vec{B}$  vaut  $\vec{B}(x = 0^+) - \vec{B}(x = 0^-) = -\mu_0 j_s \vec{u}_z$ .

## 1.5 Topographie du champ magnétique

Le champ magnétique est continuellement tangent à des courbes appelées lignes de champ qui sont orientées dans le sens du champ (figure 1.9). Comme pour le champ électrique, l'équation d'une ligne de champ magnétique est donnée par  $d\vec{M} \wedge \vec{B} = \vec{0}$  où  $d\vec{M}$  est un déplacement élémentaire le long d'une ligne de champ. Il est possible de visualiser les lignes de champ magnétique en saupoudrant de la limaille de fer sur une plaque isolante (verre, plexiglass) située dans la zone de champ à étudier. Les grains de limaille, de forme allongée, se transforment en petits aimants sous l'action du champ magnétique. A l'instar de l'aiguille d'une boussole dans le champ magnétique terrestre, ces petits aimants s'orientent parallèlement à la direction du champ magnétique. Comme les dipôles

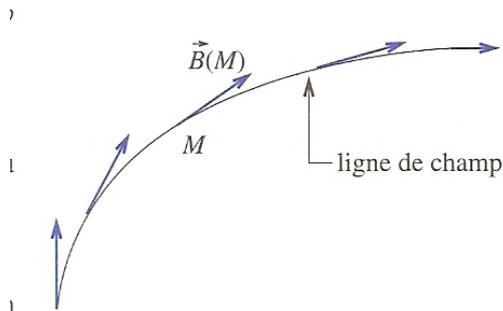


FIGURE 1.9 – Ligne de champ magnétique

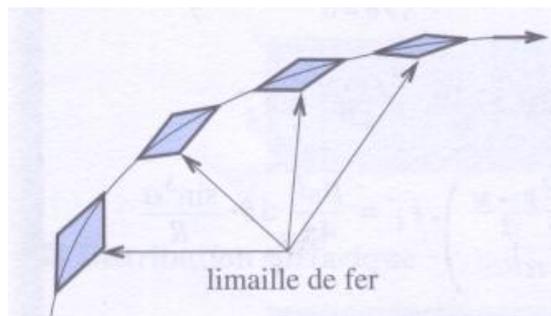


FIGURE 1.10 – Les éléments de limaille de fer s'alignent le long des lignes de champ.

dans un champ électrostatique, ils s'alignent les uns derrière les autres, matérialisant ainsi les lignes de champ magnétique (figure 1.10).

### 1.5.1 Exemples de cartes de champ

Dans ce qui suit, nous présentons les cartes de champ (encore appelées spectres magnétiques) de distributions de courant usuelles. Il est important de connaître ces cartes de champ et de savoir retrouver le sens du champ magnétique, connaissant le sens du courant.

#### Fil rectiligne infini parcouru par un courant $i$

Le champ magnétique créé par un fil infini est donné par l'expression 1.7. Le champ étant orthoradial, les lignes de champ sont des cercles qui ont le fil pour axe (voir figure 1.5).

#### Boucle circulaire parcourue par un courant $i$

Les lignes de champ créées par une boucle (ou spire) circulaire parcourue par un courant  $i$  sont visibles sur les figures 1.11 et 1.12. Nous verrons lors de l'étude des propriétés de symétrie du champ magnétique que les lignes de champ sont contenues dans les plans passant par l'axe de la spire. Hormis la ligne de champ matérialisée par l'axe de la spire, toutes les autres lignes de champ se referment sur elles mêmes et entourent la boucle de courant. La boucle de courant forme un **dipôle magnétique** dotée d'un pôle Nord (noté N) et d'un pôle Sud (noté S). Comme dans le cas du champ des aimants permanents et du champ magnétique terrestre, les lignes de champ "sortent" du pôle nord et "entrent" par le pôle sud de la source.

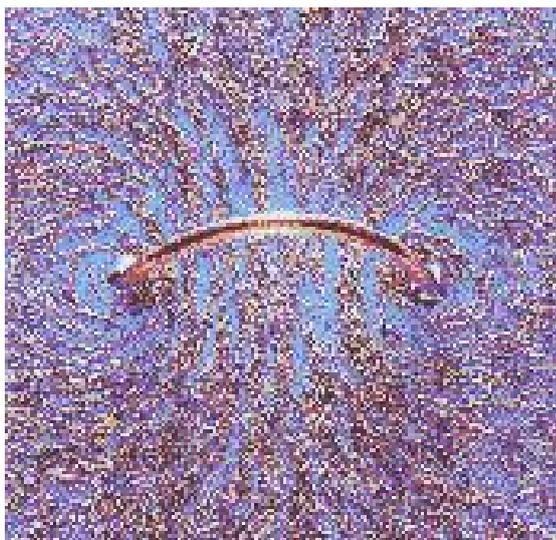


FIGURE 1.11 – Matérialisation des lignes de champ magnétique de la spire par de la limaille de fer

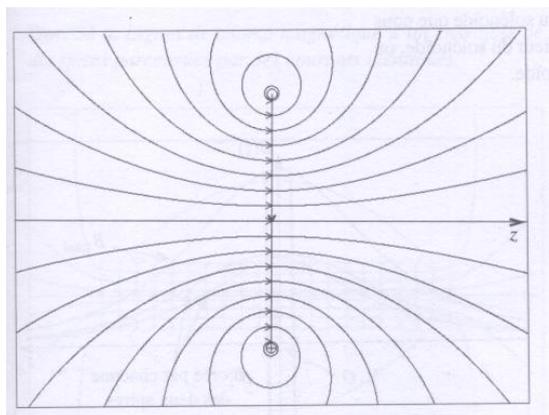


FIGURE 1.12 – Lignes de champ de la spire. L'orientation des lignes de champ dépend du sens du courant  $i$ .

### Solénoïde et aimant permanent

Un **solénoïde** est un enroulement régulier d'un fil conducteur sur un cylindre d'axe  $Oz$ . Les  $N$  tours de fil de même rayon  $R$  occupent une longueur totale  $l$  du cylindre. En pratique, le nombre  $n = N/L$  de tours par unité de longueur est élevé et nous pouvons l'assimiler à un ensemble de spires d'axe  $Oz$  et de rayon  $R$  quasi jointives. Un tel dispositif a pour effet de canaliser les lignes de champ. Dans le cas d'un solénoïde de longueur infinie, le champ  $\vec{B}$  est suivant  $\vec{u}_z$  et son sens est donné par le sens du courant  $i$ . Il est possible de calculer le champ sur l'axe en sommant les contributions de toutes les spires formant le solénoïde. Le champ sur l'axe est  $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z$ . Nous verrons lors de l'étude du théorème d'Ampère (TD) que partout à l'intérieur du solénoïde ( $r < R$ ), la valeur du champ magnétique est constante et égale au champ sur l'axe du solénoïde. Par contre, à l'extérieur du solénoïde ( $r > R$ ), le champ magnétique est nul.

Lorsque la longueur  $l$  du solénoïde est grande devant son rayon  $R$ , on peut assimiler le champ  $\vec{B}$  à l'intérieur du solénoïde à celui d'un solénoïde de longueur infinie. Le module du champ magnétique sur l'axe reste constant sur une grande partie du solénoïde et décroît rapidement à l'approche des extrémités. Les lignes du champ divergent (s'écartent) rapidement à la sortie du solénoïde. Comme pour une spire unique, les lignes de champ magnétique sortent du pôle Nord du solénoïde pour se refermer en rentrant dans le solénoïde par son pôle Sud. Hormis la ligne de champ correspondant à l'axe  $Oz$ , celles-ci entourent l'ensemble des spires du solénoïde. Les lignes de champ sont matérialisées et représentées sur les figures 1.13 et 1.14. En utilisant des fils supraconducteurs permettant la circulation de courants très intenses, on peut obtenir des champs permanents de l'ordre de 20 T. De tels systèmes sont couramment utilisés en imagerie par résonance magnétique nucléaire. On appelle couramment **électroaimants** (par opposition aux aimants permanents) les circuits électriques (bobines, solénoïdes) dont la

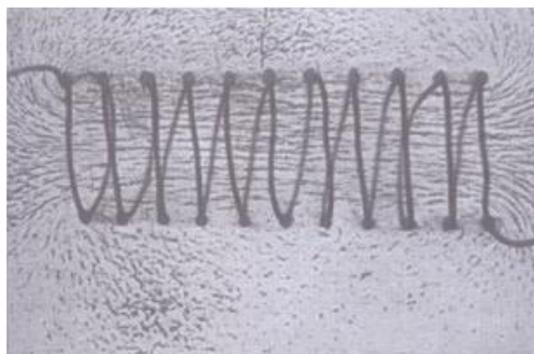


FIGURE 1.13 – Matérialisation des lignes de champ magnétique d'un solénoïde par de la limaille de fer

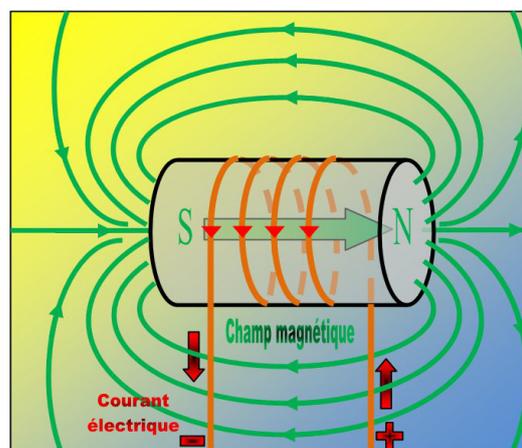


FIGURE 1.14 – Lignes de champ d'un solénoïde. L'orientation des lignes de champ dépend du sens du courant  $i$ .

fonction est de produire un champ magnétique.

Nous avons déjà eu l'occasion d'observer les propriétés fascinantes des **aimants permanents**. Le pôle nord d'un aimant attire le pôle sud et repousse le pôle sud d'un autre aimant. De même, un aimant exerce une force sur un fil parcouru par un courant  $i$  ou une particule chargée en mouvement. Comme les courants macroscopiques, un aimant produit donc un champ magnétique. La similitude entre les champs magnétiques produits par les courants et par les aimants conduit André Marie Ampère (1775-1836) à comprendre que ce sont les courants microscopiques au niveau des atomes ou des molécules qui sont la source du champ produit par les aimants permanents. Dans un aimant permanent, l'alignement des spins (moment cinétique orbital) des atomes a pour conséquence d'annuler le courant en volume. Le champ résultant est alors dû aux courants circulant à la surface de l'aimant. Dans le cas d'un aimant cylindrique pour lequel les spins des atomes sont alignés dans le même sens que l'axe du cylindre, le système est équivalent à un cylindre parcouru par un courant surfacique orthoradial. La distribution de courant et le champ produit loin de l'aimant sont alors équivalents à ceux d'un solénoïde (voir figures 1.13 et 1.14). Les champs magnétiques les plus intenses peuvent atteindre 1 T au voisinage immédiat des pôles de certains aimants permanents.

### Champ magnétique terrestre

La terre produit un champ magnétique qui peut être mis en évidence par l'orientation de l'aiguille aimantée d'une boussole le long des lignes de champ. Le pôle nord de l'aiguille aimantée indiquant le nord géographique, c'est à dire le pôle sud magnétique de la terre. Le globe terrestre peut être assimilé à un aimant géant dont les lignes de champ partent du pôle Nord magnétique (qui ne correspond pas tout à fait au pôle sud géographique) pour se refermer au niveau du pôle sud magnétique (figure 1.15). Au niveau de la France, la composante horizontale du champ magnétique terrestre est de l'ordre de  $2 \cdot 10^{-5}$  T. Les particules chargées venant du soleil (vent solaire) sont captées par les lignes de champ magnétique et guidées vers les pôles. En arrivant aux pôles, ces particules ionisent les molécules de la haute atmosphère, produisant ainsi les aurores boréales. Le champ magnétique terrestre nous protège ainsi du vent solaire.

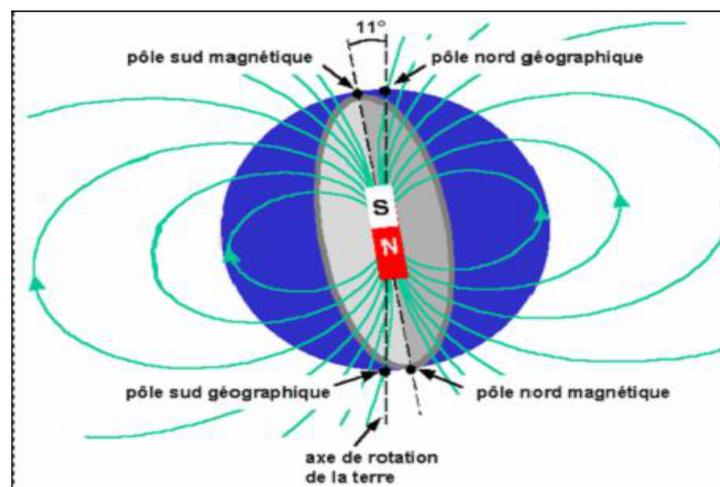
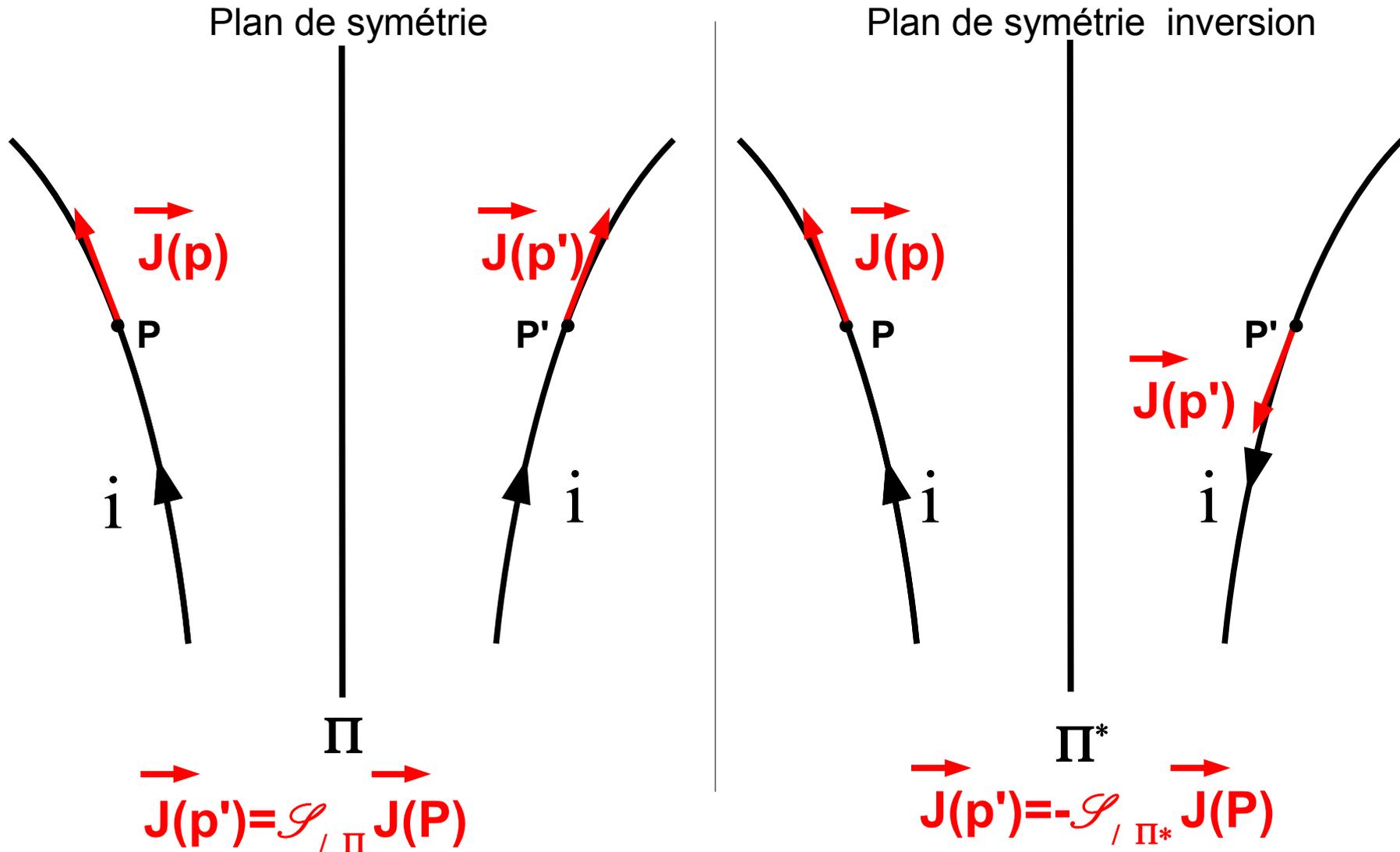


FIGURE 1.15 – Champ magnétique terrestre

# Propriétés de symétrie du champ magnétique

1) Plans de symétrie ( $\Pi$ ) et plans de symétrie inversion ( $\Pi^*$ ) de la distribution de courants :

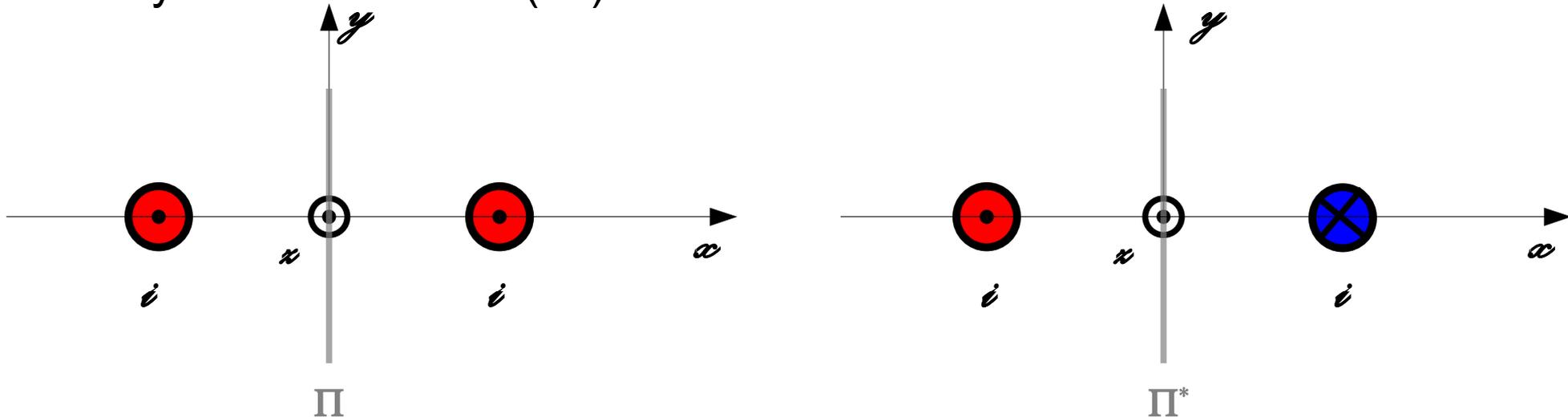
$P'$  : symétrique de  $P$  par rapport au plan  $\Pi$  ou  $\Pi^*$  ( $P' = \mathcal{S}_{/\Pi \text{ ou } \Pi^*}(P)$ )



# • Ligne bifilaire

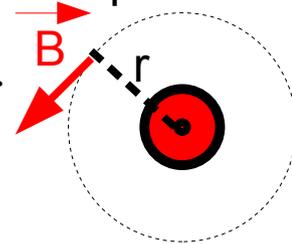
On considère deux fils infinis parallèles à l'axe Oz parcourus par un courant  $i$ . Les deux fils coupent le plan xOy en  $(a,0,0)$  et  $(-a,0,0)$ . Le plan xOz contenant les deux fils est plan de symétrie de la distribution de courants, alors que les plans perpendiculaires aux fils sont plans de symétrie-inversion (ou antisymétrie). Le plan yOz est plan :

- de symétrie ( $\Pi$ ) si les courants circulent dans le même sens.
- de symétrie-inversion ( $\Pi^*$ ) si les courants circulent en sens inverse.



- Dans ce qui suit, on cherche à déterminer les règles de transformation du champ magnétique par les opérations de symétrie par rapport au plan yOz ( $\Pi$  ou  $\Pi^*$ ).

On rappelle que le champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant  $i$  est orthoradial. On obtient par la loi de Biot et Savart:  $\mathbf{B} = \mu_0 i / 2\pi r \mathbf{U}_\theta$



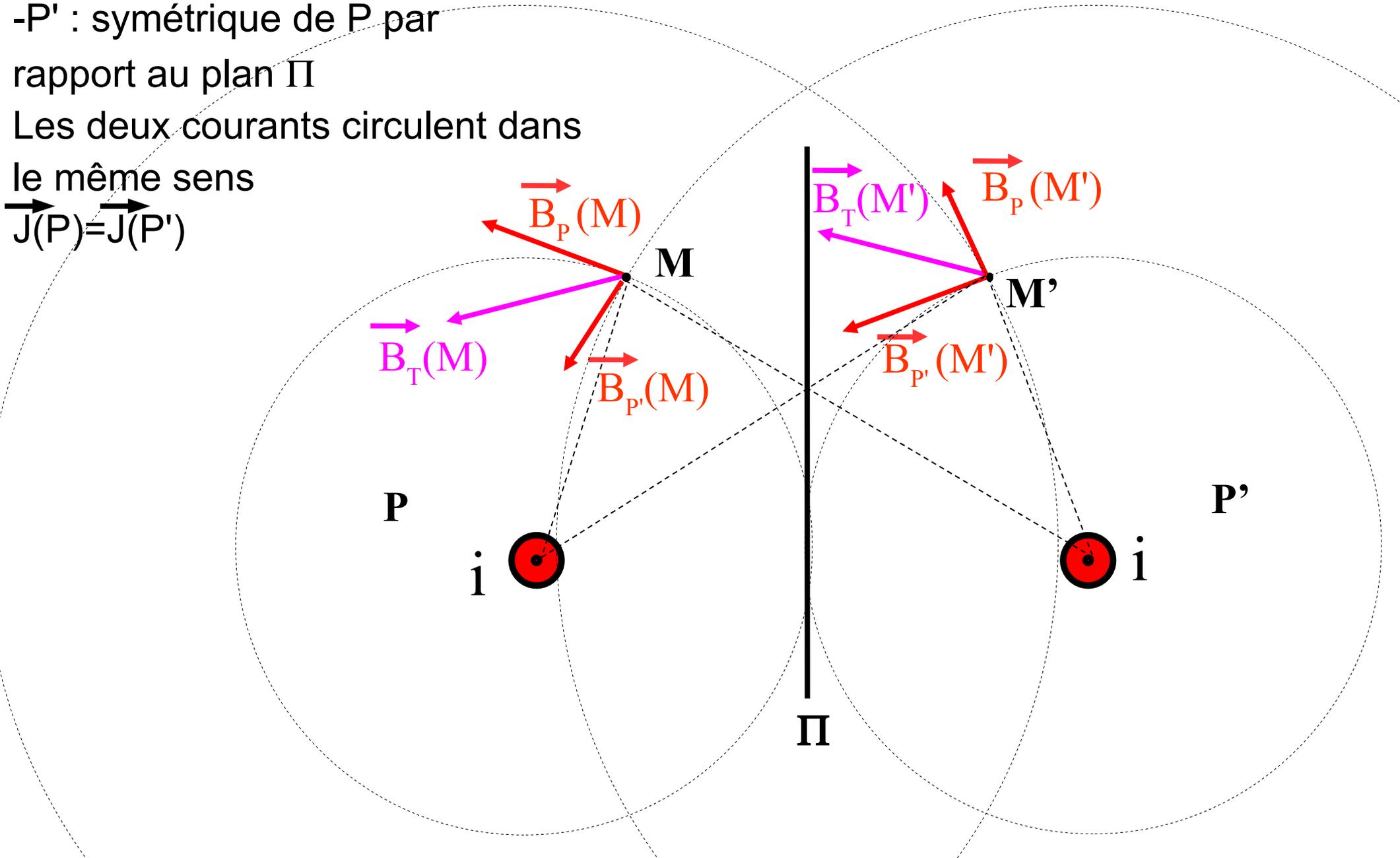
## 2) Plan de symétrie de la distribution de courants ( $\Pi$ ).

-M': symétrique de M par rapport au plan  $\Pi$

-P' : symétrique de P par rapport au plan  $\Pi$

Les deux courants circulent dans le même sens

$$\vec{J}(P) = \vec{J}(P')$$

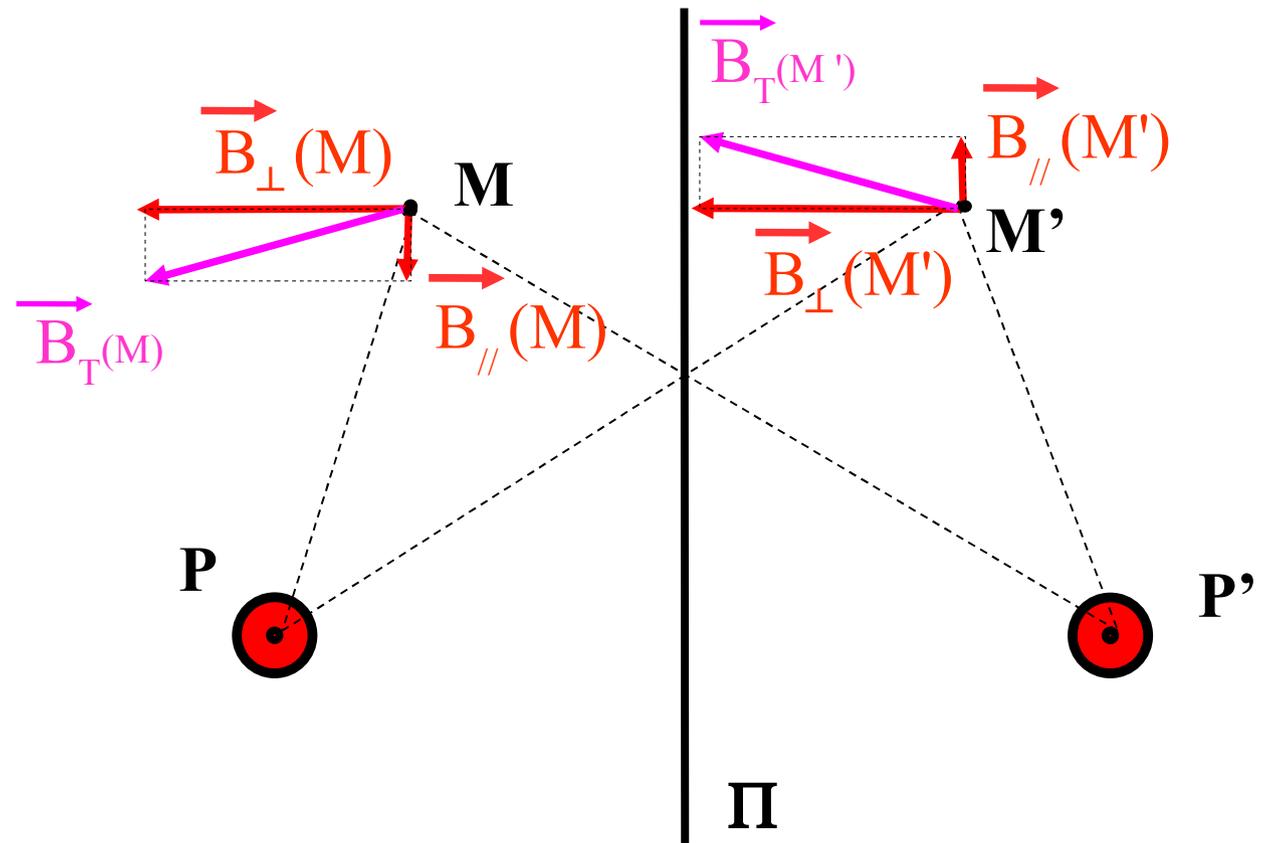


# • Relations de transformation du champ magnétique

$$\vec{B}_T(M) = \vec{B}_{//}(M) + \vec{B}_\perp(M)$$

$$\vec{B}_{//}(M') = -\vec{B}_{//}(M)$$

$$\vec{B}_\perp(M') = \vec{B}_\perp(M)$$



Le champ en  $M'$  est l'opposé du symétrique du champ en  $M$  ( $\vec{B}(M') = -\mathcal{S}_\Pi(\vec{B}(M))$ ).

La composante du champ magnétique **normale** ( $\perp$ ) au plan de symétrie est **conservée**.

La composante du champ magnétique **parallèle** ( $//$ ) au plan de symétrie est **inversée**.

- Conséquence :

Si  $M$  appartient au plan de symétrie  $\Pi$ , alors:

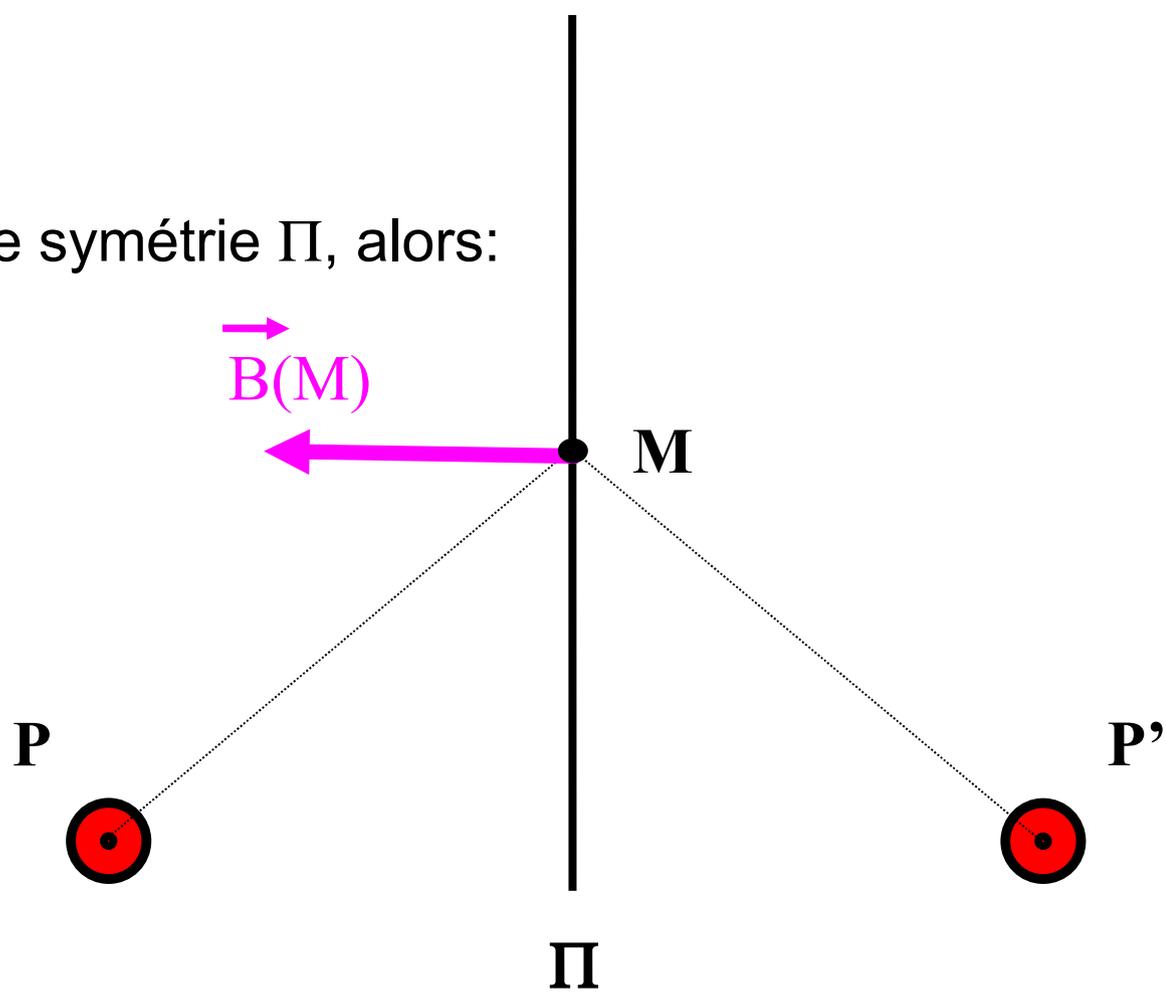
$$\begin{aligned} M' &= M \\ \vec{B}_{//}(M) &= -\vec{B}_{//}(M) \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\vec{B}_{//}(M) = \vec{0}$$

On en déduit :

$$\vec{B}(M) \perp \Pi$$



Le champ magnétique est *perpendiculaire* au plan de symétrie  $\Pi$ .

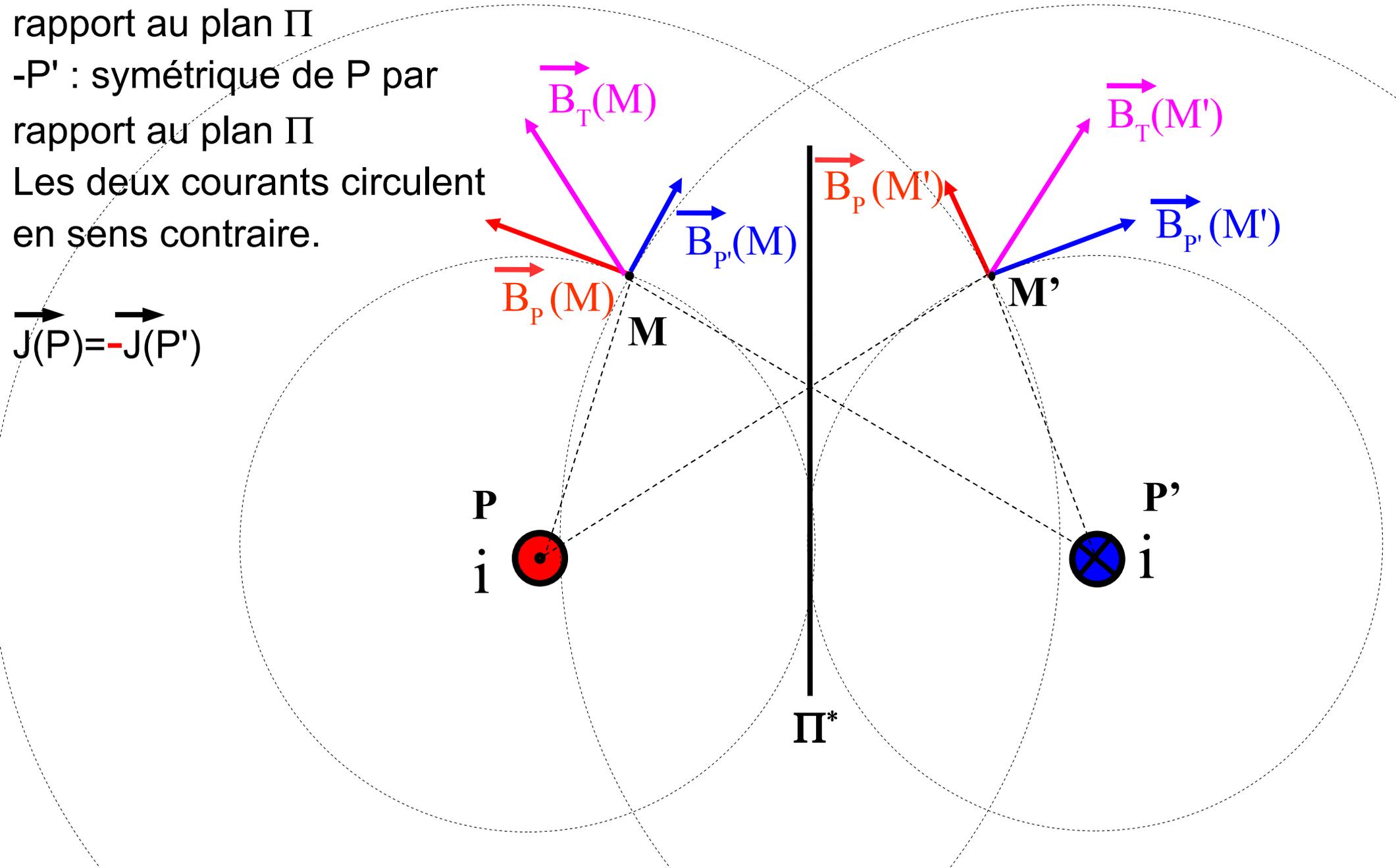
### 3) Plan de symétrie-inversion de la distribution de courants ( $\Pi^*$ ).

-M': symétrique de M par rapport au plan  $\Pi$

-P' : symétrique de P par rapport au plan  $\Pi$

Les deux courants circulent en sens contraire.

$$\vec{J}(P) = -\vec{J}(P')$$

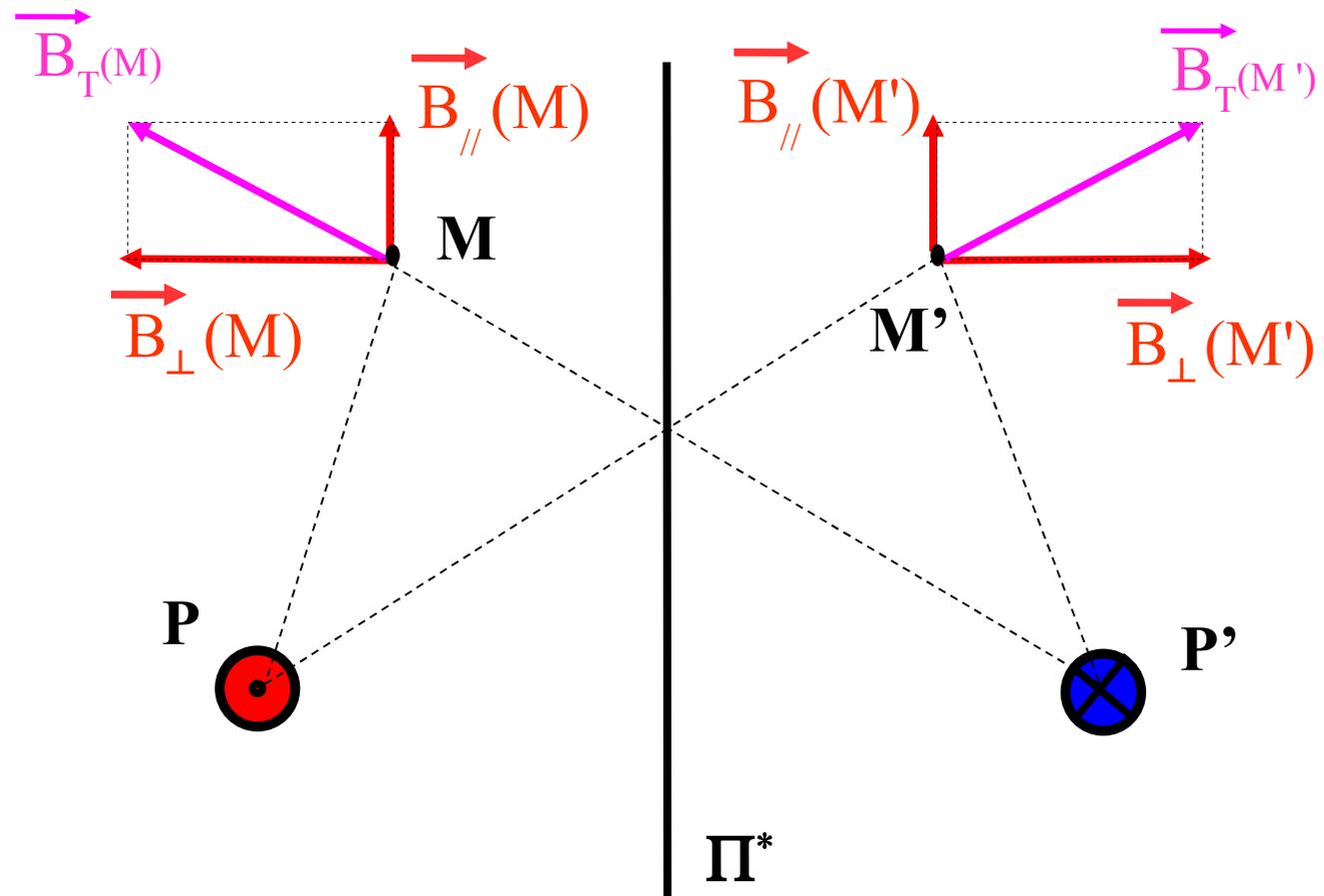


# • Relations de transformation du champ magnétique

$$\vec{B}_{T(M)} = \vec{B}_{//(M)} + \vec{B}_{\perp(M)}$$

$$\vec{B}_{//(M')} = \vec{B}_{//(M)}$$

$$\vec{B}_{\perp(M')} = -\vec{B}_{\perp(M)}$$



Le champ en  $M'$  est le symétrique du champ en  $M$  ( $\vec{B}(M') = \mathcal{S}_{\Pi^*}(\vec{B}(M))$ ).

La composante du champ magnétique **normale** ( $\perp$ ) au plan de symétrie-inversion est **inversée**.

La composante du champ magnétique **parallèle** ( $//$ ) au plan de symétrie-inversion est **conservée**.

- Conséquence :

Si M appartient au plan de symétrie  $\Pi^*$ , alors:

$$\begin{aligned} M' &= M \\ \vec{B}_{\perp}(M) &= -\vec{B}_{\perp}(M) \end{aligned}$$

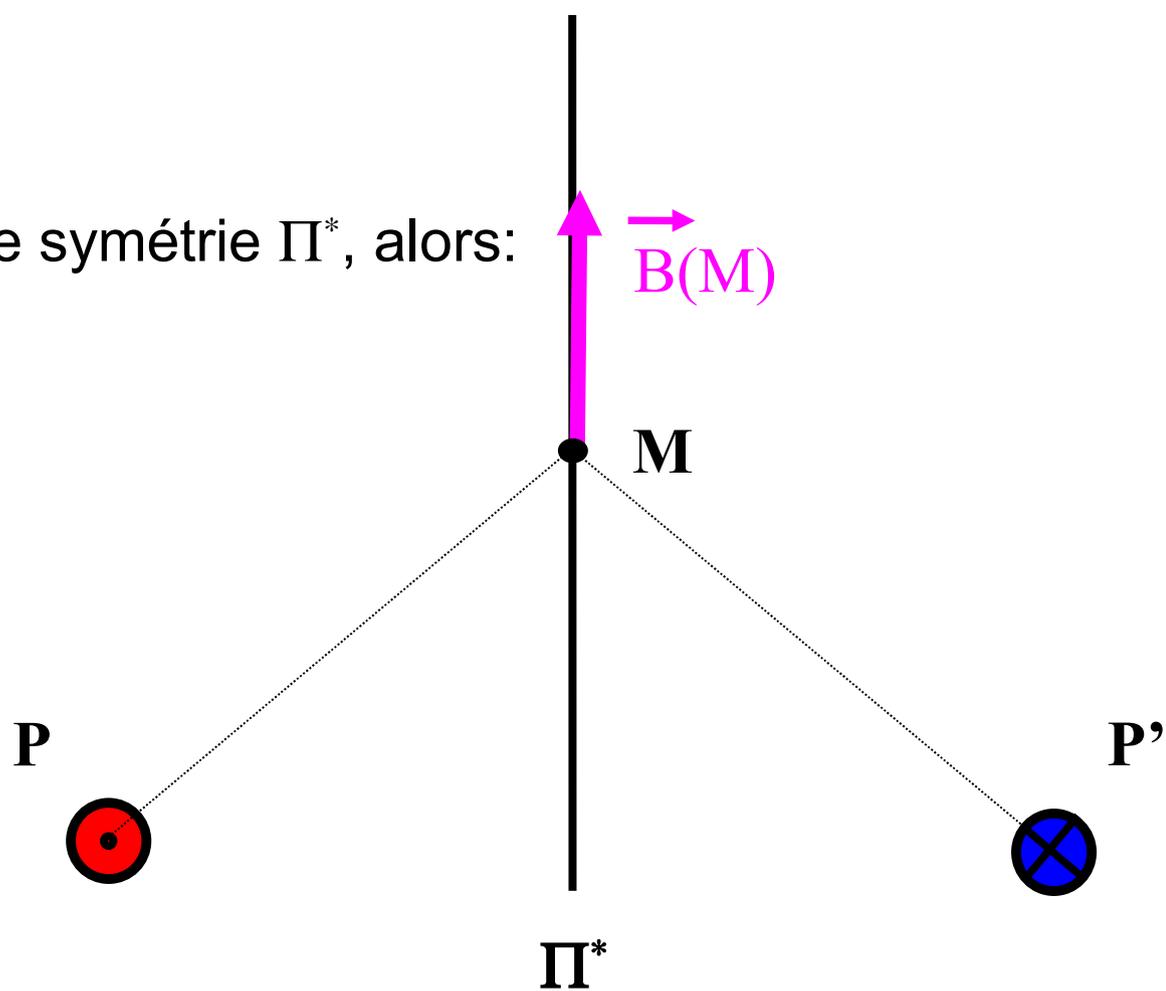
ce qui implique :

$$\vec{B}_{\perp}(M) = \vec{0}$$

On en déduit :

$$\vec{B}(M) // \Pi$$

Le champ magnétique *appartient* au plan de symétrie-inversion  $\Pi^*$ .



# • Direction et invariances du champ magnétique

- Le champ magnétique a les propriétés de symétrie d'un vecteur ***axial*** ou "**pseudo-vecteur**".
- En pratique, pour trouver la direction du champ magnétique en un point M, il suffit d'identifier un plan de symétrie de la distribution de courants passant par M. Le champ  $B(M)$  est alors perpendiculaire à ce plan  $\Pi$ . Si on parvient à identifier deux plans de symétrie-inversion  $\Pi^*$  passant par M, le champ  $B(M)$  est parallèle à la droite matérialisant l'intersection des deux plans.
- Les plans de symétrie et symétrie-inversion peuvent simplifier l'étude du champ grâce aux propriétés de symétrie des composantes du champ magnétique (étude de la parité des composantes du champ).
- Les invariances de la distribution de courants permettent de connaître les variables d'espace dont dépendent les composantes du champ magnétique.

## 4) Exemples de distribution de courant :

### a) Fil rectiligne infini parcouru par un courant $i$ :

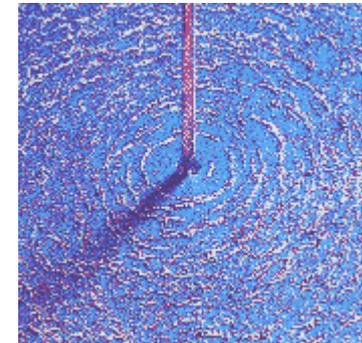
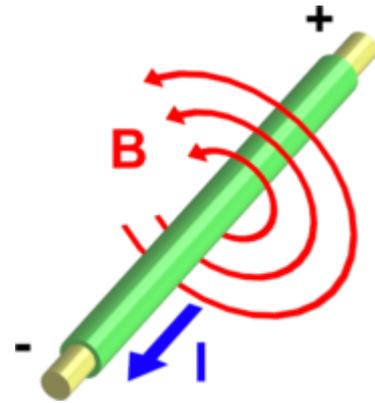
Le fil est confondu avec l'axe Oz. Tous les plans contenant le fil sont plans de symétrie ( $\Pi$ ) de la distribution de courants. Tous les plans perpendiculaires au fil sont plans de symétrie-inversion de la distribution de courants. Le champ magnétique étant perpendiculaire aux plans de symétrie et la distribution de courants étant invariante par translation selon  $z$  et rotation selon  $\theta$ , on a :

$$\vec{B} = B_{\theta}(r) \vec{U}_{\theta}$$

Les lignes de champ sont orthoradiales. Ce sont des cercles d'axe Oz. On peut les matérialiser en saupoudrant de la limaille de fer. Les grains de limaille, sous l'action du champ  $\mathbf{B}$  se transforment en petits aimants qui s'orientent parallèlement à ce champ magnétique.

Calcul de  $\mathbf{B}$ : On peut calculer le champ magnétique soit par la loi de Biot et Savart soit par le théorème d'Ampère (plus simple). On obtient :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{U}_{\theta}$$



## b) Bobine circulaire plate:

On considère une bobine circulaire plate d'axe Oz parcourue par un courant  $i$ . La bobine est contenue dans le plan  $xOy$ . Tout plan contenant l'axe Oz est plan de symétrie inversion de la distribution de courants. En tout point M, le champ magnétique est contenu dans le plan passant par M et contenant l'axe Oz. Par ailleurs, la distribution de courants est invariante par rotation selon  $\theta$ . On en déduit:

$$\vec{B} = B_r(r, z)\vec{U}_r + B_z(r, z)\vec{U}_z$$

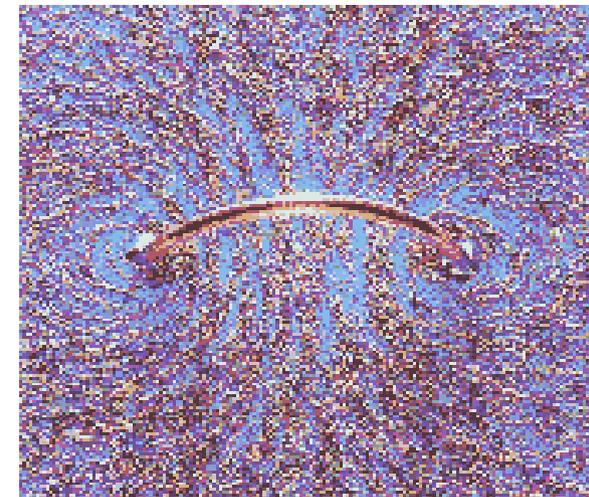
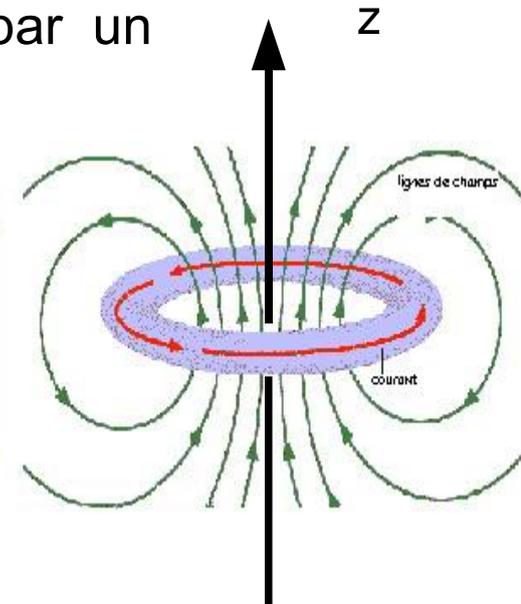
Le plan  $xOy$  est plan de symétrie de la distribution de courants. Le champ  $\mathbf{B}$  est perpendiculaire à ce plan en tout point de  $xOy$  :

$$\vec{B} = B_z(r)\vec{U}_z$$

De plus,  $xOy$  étant plan de symétrie,  $B_z(r, z) = B_z(r, -z)$

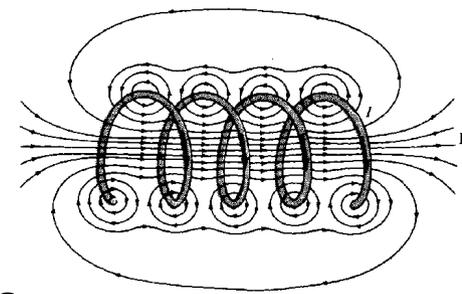
car la composante normale à  $xOy$  est conservée,

et  $B_r(r, z) = -B_r(r, -z)$  car la composante parallèle est inversée.



### c) Solénoïde fini :

Le solénoïde d'axe Oz et de centre O est de taille finie.  
Le plan xOy est plan de symétrie de la distribution de courants.

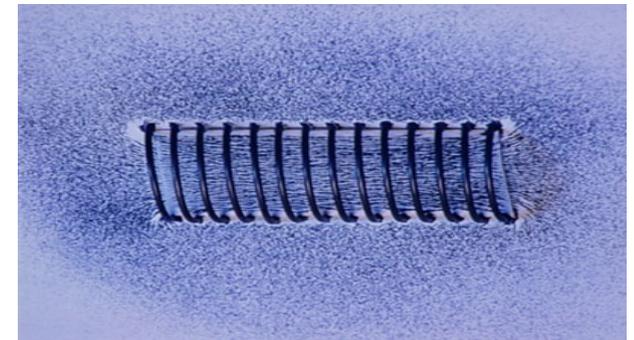


Tous les plans passant par l'axe Oz sont plans de symétrie-inversion.

La distribution de courants est invariante par rotation selon  $\theta$ .

On a donc les mêmes expressions générales et conclusions

que celles obtenues pour la bobine plate.



### d) Solénoïde infini (n spires /m):

Dans ce cas, les plans perpendiculaires à l'axe Oz (axe du solénoïde) sont plans de symétrie. En tout point M, le champ  $\mathbf{B}(\mathbf{M})$  est donc normal au plan passant par M et perpendiculaire à l'axe du solénoïde. La distribution de courants ne dépend plus que de r. On en déduit l'expression générale du champ  $\mathbf{B}$ :

$$\vec{B} = B_z(r) \vec{U}_z$$

On montre grâce au théorème d'Ampère que le champ magnétique est constant à l'intérieur du solénoïde. Son module est donné par le calcul du champ sur l'axe d'un solénoïde infini en utilisant la loi de Biot et Savart:

$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{U}_z$$

A l'extérieur, le champ magnétique est nul.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Le théorème d'Ampère</b>	<b>5</b>
1.1	Circulation du champ magnétique, théorème d'Ampère . . . . .	5
1.1.1	Circulation sur un circuit fermé du champ $\vec{B}$ créé par un fil recti- ligne infini parcouru par un courant $i$ . . . . .	5
1.1.2	Généralisation - Théorème d'Ampère . . . . .	6
1.2	Exemples . . . . .	7
1.2.1	Cylindre parcouru par un courant volumique ou surfacique . . . . .	7
1.2.2	Nappe de courant . . . . .	9
1.2.3	Solénoïde infini . . . . .	12
1.3	Autres propriétés du champ $\vec{B}$ . . . . .	13



# Chapitre 1

## Le théorème d'Ampère

### 1.1 Circulation du champ magnétique, théorème d'Ampère

#### 1.1.1 Circulation sur un circuit fermé du champ $\vec{B}$ créé par un fil rectiligne infini parcouru par un courant $i$

Considérons un fil rectiligne porté par l'axe Oz et parcouru par un courant  $i$ . Le champ magnétique créé par ce fil est donné par la relation ???. La circulation du champ magnétique sur un circuit fermé  $\Gamma$  est donné par l'expression suivante :

$$\mathcal{C} = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_{\theta} \cdot (dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_{\theta} + dz\vec{u}_z) = \oint_{\Gamma} \frac{\mu_0 i d\theta}{2\pi} \quad (1.1)$$

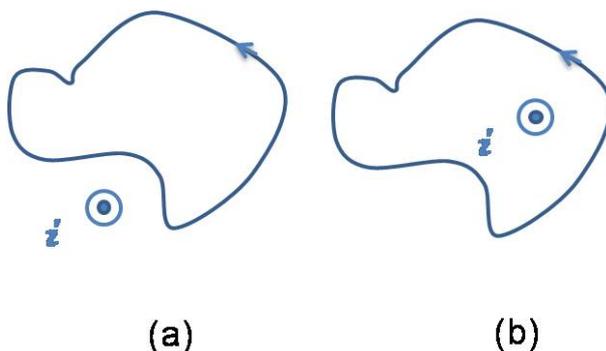


FIGURE 1.1 – Circulation du champ  $\vec{B}$  créé par un courant rectiligne  $i$  : a) le contour  $\Gamma$  n'entoure pas le fil. b) le contour  $\Gamma$  entoure le fil.

On peut distinguer deux cas :

- Le circuit n'entoure pas le fil (cas a) :  $\mathcal{C} = \oint_{\Theta} \frac{\mu_0 i d\theta}{2\pi} = 0$
- Le circuit entoure le fil (cas b) :  $\mathcal{C} = \oint_0^{2\pi} \frac{\mu_0 i d\theta}{2\pi} = \mu_0 i$

### 1.1.2 Généralisation - Théorème d'Ampère

Les résultats précédents peuvent être généralisés à des courants de forme quelconque. Cette généralisation conduit au théorème d'Ampère que nous admettrons :

**La circulation du champ magnétostatique  $\vec{B}$  créé par un ensemble de courants sur un contour  $\Gamma$  orienté est égale à la somme des courants enlacés multipliée par  $\mu_0$  :**

$$C_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k \varepsilon_k I_k \quad (1.2)$$

$\varepsilon_k = 1$ , si  $I_k$  traverse  $S$  orienté par  $\Gamma$  dans le sens de  $\vec{n}$   
 $\varepsilon_k = -1$ , si  $I_k$  traverse  $S$  orienté par  $\Gamma$  dans le sens de  $-\vec{n}$   
 $\varepsilon_k = 0$ , si  $I_k$  ne traverse pas  $S$ .

Pour appliquer le théorème d'Ampère, il faut en premier lieu orienter le contour d'Ampère. Cette orientation définit le sens du vecteur  $\vec{n}$  normal à la surface s'appuyant sur le contour d'Ampère (voir figure 1.2). Les courants sont ensuite additionnés en tenant compte de leur signe. Si le courant circule dans le même sens que le vecteur  $\vec{n}$ , il est compté positivement. Il sera compté négativement dans le cas contraire. Dans l'exemple de la figure 1.3, les courants  $I_3$  et  $I_1$  passant à travers le contour orienté  $\Gamma$  sont positifs alors que le courant  $I_2$  est négatif. On obtient :  $C_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I_1 + 2I_3 - I_2)$ . Notons que les courants traversant le contour d'Ampère peuvent être également volumiques ou surfaciques.

**Le théorème d'Ampère permet une détermination rapide du champ magnétostatique pour des distributions de courants de symétries élevées. Après détermination de la forme du champ à l'aide de considérations de symétrie, son application à un contour fermé, orienté, de géométrie adaptée aux symétries du problème permet de déterminer l'amplitude du champ magnétostatique.**

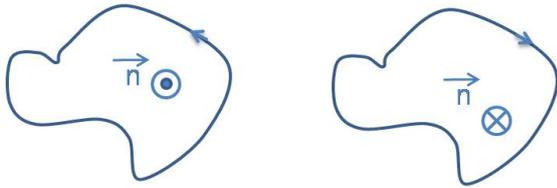


FIGURE 1.2 – Orientation du contour d’Ampère fermé et de sa normale.

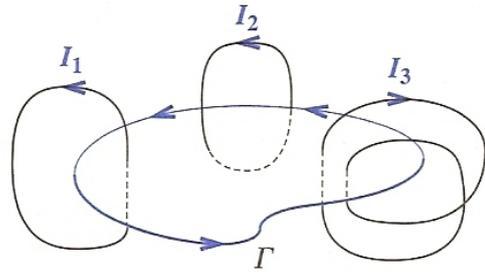


FIGURE 1.3 – Contour d’Ampère et courants enlacés

## 1.2 Exemples

### 1.2.1 Cylindre parcouru par un courant volumique ou surfacique

Un cylindre infini de rayon  $R$  et d’axe  $Oz$  est parcouru par un courant volumique  $\vec{J} = J_z \vec{u}_z$  ( $J_z > 0$  et  $I = J_z \pi R^2$ ) (figure 1.4). On cherche à déterminer le champ magnétique en tout point.

#### Symétries, invariances et expression générale de $\vec{B}$

Le plan  $\Pi$  passant par  $M(r, \theta, z)$  et contenant l’axe  $Oz$  est plan de symétrie de la distribution de courants. Le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  est perpendiculaire au plan  $\Pi$ .  $\vec{B}(M)$  est donc selon le vecteur  $\vec{u}_\theta$ . De plus, la distribution de courants est invariante par translation selon  $z$  et par rotation selon l’angle  $\theta$ . Le champ magnétique s’écrit donc :

$$\vec{B} = B_\theta(r) \vec{u}_\theta$$

#### Choix du contour d’Ampère

Cette expression du champ magnétique nous amène à choisir un cercle d’axe  $Oz$  comme contour d’Ampère. L’orientation du contour est choisie de sorte que la normale au cercle  $\vec{n} = \vec{u}_z$ . La circulation du champ magnétique sur le contour d’Ampère s’écrit :

$$\mathcal{C} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B_\theta(r) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = B_\theta(r) 2\pi r$$

#### Calcul du champ magnétostatique $\vec{B}$

Pour déterminer les courants enlacés par le contour d’Ampère, on distingue deux cas :

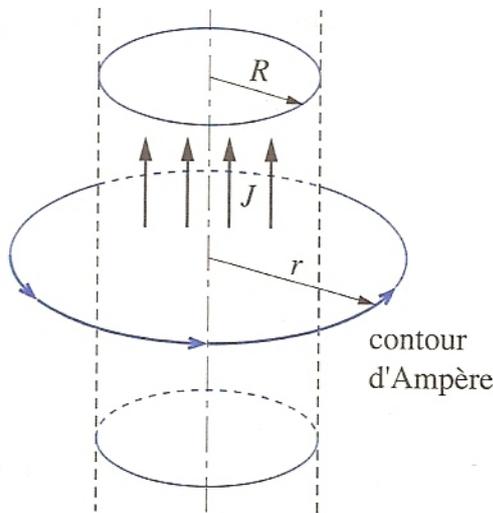


FIGURE 1.4 – Cylindre de rayon  $R$  parcouru par une densité volumique de courant  $\vec{J}$ .

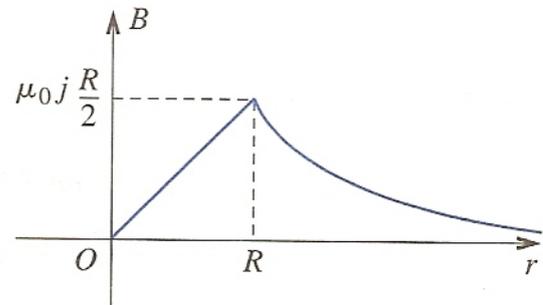


FIGURE 1.5 – Evolution de  $B_\theta$  en fonction de  $r$ .

- \*  $r > R$  : le rayon  $r$  du contour circulaire est plus grand que le rayon  $R$  du cylindre. Le courant enlacé par le contour ne dépend pas de  $r$ . On note  $d\vec{S} = dS\vec{n} = r d\theta dr \vec{u}_z$ .

$$i_{\text{enlace}} = I = \iiint \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^R \int_0^{2\pi} J_z \vec{u}_z \cdot r dr d\theta \vec{u}_z = J_z \pi R^2$$

Le théorème d'Ampère conduit à :

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 J_z R^2}{2r}$$

- \*  $r < R$  : le rayon  $r$  du contour circulaire est plus petit que le rayon  $R$  du cylindre. Le courant enlacé par le contour dépend de  $r$  et  $i_{\text{enlace}} = \int_0^r \int_0^{2\pi} J_z \vec{u}_z \cdot r dr d\theta \vec{u}_z = J_z \pi r^2$ . Le théorème d'Ampère conduit à :

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 J_z r}{2}$$

A l'intérieur du cylindre, le module du champ magnétique croît linéairement avec  $r$  alors qu'à l'extérieur, le champ magnétique est celui d'un fil rectiligne infini, confondu avec l'axe  $Oz$  et parcouru par un courant  $I = J_z \pi R^2$  (voir figure 1.5).

### Courant surfacique

On peut envisager le cas où le courant ne circule pas en volume mais à la surface du cylindre de rayon  $R$ . On définit alors la densité de courant surfacique  $\vec{J}_s = J_z^s \vec{u}_z$ . Dans ce

cas, le courant  $I$  s'exprime en fonction de  $\vec{J}_s$  :  $I = \int \vec{J}_s \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} J_z^s \vec{u}_z \cdot R d\theta \vec{u}_z = 2\pi R J_z^s$ . En appliquant le théorème d'Ampère de la même manière que précédemment, on obtient :

- \*  $r > R$  : le rayon  $r$  du contour circulaire est plus grand que le rayon  $R$  du cylindre. Le courant enlacé par le contour ne dépend pas de  $r$  et  $i_{enlace} = I = 2\pi R J_z^s$ . Le théorème d'Ampère conduit à :

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 J_z^s R}{r}$$

- \*  $r < R$  : le rayon  $r$  du contour circulaire est plus petit que le rayon  $R$  du cylindre. Le courant enlacé par le contour est nul. Le théorème d'Ampère conduit à :

$$B_\theta(r) = 0$$

A l'intérieur du cylindre, le module du champ magnétique est nul, alors qu'à l'extérieur, le champ magnétique est celui d'un fil rectiligne infini, confondu avec l'axe  $Oz$  et parcouru par un courant  $I = 2\pi R J_z^s$ . Au passage de la surface du cylindre, le champ  $\vec{B}$  est discontinu. La discontinuité est égale à  $\mu_0 J_z^s \vec{u}_\theta$ .

### 1.2.2 Nappe de courant

On cherche à déterminer le champ  $\vec{B}$  créé par une plaque d'épaisseur  $e$  parcourue par une densité volumique de courant  $\vec{J} = J \vec{u}_x$  (figure 1.6) ou par une surface plane (ici, le plan  $xOy$ ) parcourue par une densité surfacique de courant  $\vec{J}_s = J_s \vec{u}_x$  (figure 1.7). Les densités de courants sont uniformes et orientées selon  $\vec{u}_x$  ( $J_s$  et  $J > 0$ ). La plaque d'épaisseur  $e$ , infinie selon  $Ox$  et  $Oy$ , est délimitée par les plans  $z = e/2$  et  $z = -e/2$ .

#### Symétries, invariances et expression générale de $\vec{B}$

Dans ces deux cas, les plans de symétrie de la distribution de courants sont le plan  $xOy$  et les plans parallèles au plan  $xOz$ . Les plans parallèles au plan  $yOz$  sont plans de symétrie inversion de la distribution de courants. Le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  est perpendiculaire au plan de symétrie  $\Pi$  passant par  $M(x, y, z)$  et parallèle au plan  $xOz$ . Le champ  $\vec{B}$  est donc colinéaire à  $\vec{u}_y$  en tout point. La distribution de courants étant invariante par translation selon  $Ox$  et  $Oy$ ,  $B_z$  ne dépend que de  $z$ . Le champ magnétique s'écrit  $\vec{B} = B_y(z) \vec{u}_y$ . Au point  $M'(x, y, -z)$ , symétrique du point  $M(x, y, z)$  par rapport au plan de symétrie  $xOy$ , le champ  $\vec{B}(M')$  est l'opposé du symétrique du champ  $\vec{B}(M)$  : la fonction  $B_y(z)$  est impaire.

#### Choix du contour d'Ampère

Dans le cas de la plaque de la figure 1.6, un contour permettant un calcul aisé de la circulation du champ magnétique doit avoir des côtés parallèles au champ à  $z = cte$ . Le champ étant nul en  $z = 0$ , on choisit comme contour d'Ampère un rectangle ABCD de hauteur  $z$  contenu dans le plan  $yOz$ . Le champ étant nul sur le plan  $xOy$ , le côté AB de longueur  $L$  est placé sur ce plan comme l'indique la figure 1.6. L'orientation du contour

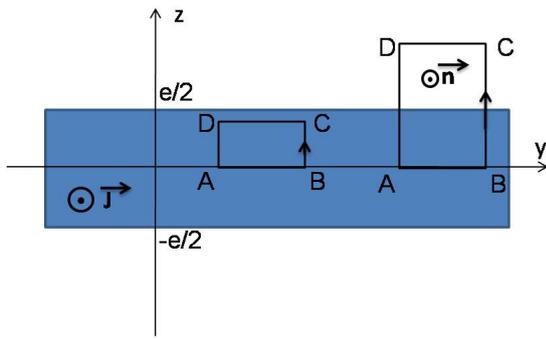


FIGURE 1.6 – Plaque infinie d'épaisseur  $e$  parcourue par une densité volumique de courant uniforme  $\vec{J} = J\vec{u}_x$ .

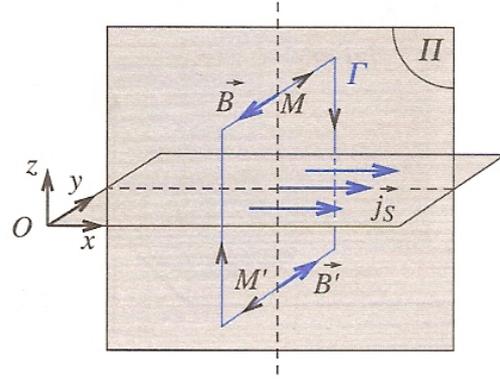


FIGURE 1.7 – Nappe de courant parcourue par une densité surfacique de courant  $\vec{J}_s = J_s\vec{u}_x$ .

est donné par le sens de la flèche. La circulation du champ magnétique sur les côtés BC et DA est nulle car  $\vec{B}$  est perpendiculaire à ces deux côtés. La circulation sur AB est également nulle puisque le champ magnétique est nul sur AB. Finalement, on obtient pour  $z > 0$  :

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_C^D B_y(z)\vec{u}_y \cdot dy\vec{u}_y = -B_y(z)L$$

### Calcul du champ magnétostatique $\vec{B}$

Le sens de circulation impose  $\vec{n} = \vec{u}_x$  et  $d\vec{S} = dx dy \vec{u}_x$ . On distingue deux cas :

\* La hauteur  $z$  du cadre est supérieure à la demi épaisseur de la plaque ( $z > e/2$ ) :

$$i_{entace} = \iint_{ABCD} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iint_{ABCD} J\vec{u}_x \cdot dx dy \vec{u}_x = JLe/2$$

En appliquant le théorème d'Ampère, on obtient :  $-B_y(z)L = \mu_0 JLe/2$ . Finalement le champ en dehors de la plaque ( $z > 0$ ) est :

$$\vec{B} = \frac{-\mu_0 J e}{2} \vec{u}_y$$

\* La hauteur  $z$  du cadre est inférieure à la demi épaisseur de la plaque ( $0 < z < e/2$ ) :

$$i_{entace} = \iint_{ABCD} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iint_{ABCD} J_x \vec{u}_x \cdot dx dy \vec{u}_x = JLz$$

En appliquant le théorème d'Ampère, on obtient :  $-B_y(z)L = \mu_0 J L z$ . Finalement le champ dans la plaque ( $z > 0$ ) est :

$$\vec{B} = -\mu_0 J z \vec{u}_y$$

$B_y(z)$  étant impaire, on obtient  $\vec{B} = -Jz \vec{u}_y$  pour  $|z| < e/2$  et  $\vec{B} = -Je/2 \text{ signe}(z) \vec{u}_y$  pour  $|z| > e/2$ .

### Nappe de courant

Dans le cas de la nappe de courant de la figure 1.7, le champ magnétique n'est pas défini sur la surface. On doit alors modifier le contour d'Ampère en prenant un cadre de hauteur  $2z$ , similaire au cadre ABCD précédent, mais placé à cheval sur la surface (voir figure 1.7). Les côtés AB et CD ont pour cotes  $-z$  et  $z$ . La circulation le long de ce contour fermé et orienté comme indiqué sur la figure 1.7 est (attention, on a inversé l'orientation du contour par rapport au cas précédent) :  $\mathcal{C} = LB_y(z) - LB_y(-z) = 2LB_y(z)$  avec  $z > 0$ . Le courant enlacé  $i_{\text{enlace}} = \int_A^B \vec{J}_s \cdot \vec{dl}$  avec  $\vec{dl} = -dy\vec{u}_x$ . On obtient  $i_{\text{enlace}} = -LJ_s$ . Le théorème d'Ampère permet d'obtenir l'expression du champ  $\vec{B}$  de la nappe :

$$\vec{B} = -\mu_0 J_s/2 \text{ signe}(z) \vec{u}_y$$

On retrouve le résultat obtenu au précédent chapitre à l'aide de la loi de Biot et Savart. Le champ magnétique est une fois de plus discontinu au passage de la surface parcourue par le courant surfacique  $\vec{J}_s$ . La discontinuité vaut  $\mu_0 J_s \vec{u}_y$ .

### 1.2.3 Solénoïde infini

Nous avons montré au chapitre précédent que le champ créé par un solénoïde infini de rayon  $R$  et constitué d'un enroulement de  $n$  spires par unité de longueur sur son axe  $Oz$  est  $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z$ . Nous proposons de déterminer à l'aide du théorème d'Ampère le champ magnétique en tout point de l'espace. Le solénoïde étant infini, tous les plans perpendiculaires à son axe sont plans de symétrie. Par conséquent, en un point  $M(r, \theta, z)$  de l'espace, le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  est normal au plan de symétrie  $\Pi$  passant par  $M$  et orthogonal à l'axe  $Oz$ . La distribution de courants étant invariante par translation selon  $z$  et rotation autour de  $Oz$  (selon  $\theta$ ),  $B_z$  ne dépend que de  $r$ . En tout point de l'espace (non situé sur le solénoïde où le champ magnétique n'est pas défini), l'expression du champ magnétique est :

$$\vec{B} = B_z(r) \vec{u}_z$$

Le contour d'Ampère permettant de déterminer l'expression du champ  $\vec{B}$  est un cadre ABCD dont un des côtés est placé sur l'axe  $Oz$ . En orientant ce cadre comme indiqué sur la figure 1.8, la circulation  $\mathcal{C}$  du champ magnétique s'écrit ( $AB=CD=L$  et  $BC=AD=r$ ) :

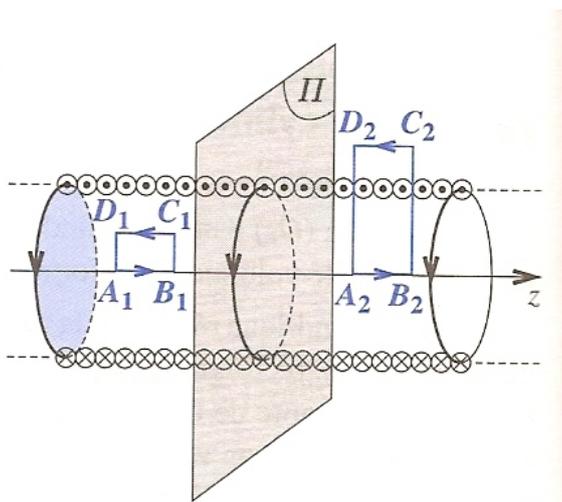


FIGURE 1.8 – Solénoïde infini. Le contour d'Ampère est un rectangle dont l'un des côtés repose sur l'axe du solénoïde

$$\mathcal{C} = \oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_A^B B_z(r=0) \vec{u}_z \cdot dz \vec{u}_z = \int_C^D B_z(r) \vec{u}_z \cdot dz \vec{u}_z = L(\mu_0 n i - B_z(r))$$

Le calcul de  $\mathcal{C}$  tient compte du fait que la circulation du champ magnétique sur les côtés BC et AD est nulle puisque  $\vec{B} \perp d\vec{l}$ . L'application du théorème d'Ampère permet de distinguer deux cas :

- \* Le cadre est à l'intérieur du solénoïde ( $r < R$ ; cadre  $A_1 B_1 C_1 D_1$  sur la figure 1.8) Il n'y a pas de courants enlacés et la circulation  $\mathcal{C}$  est donc nulle. On a

$$\mathcal{C} = 0 = L(\mu_0 n i - B_z(r))$$

Le champ magnétique en tout point intérieur au solénoïde est constant et s'écrit :

$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z$$

\* Le cadre chevauche le solénoïde ( $r > R$ ; cadre  $A_2B_2C_2D_2$  sur la figure 1.8). La normale au contour d'Ampère est dans le même sens que  $\vec{u}_\theta$ , c'est à dire dans le sens du courant  $i$  circulant dans le fil du solénoïde. Le courant enlacé est donc positif et s'écrit :

$$i_{enlace} = \int_0^L n i dz = +n i L$$

Le théorème d'Ampère se traduit par la relation suivante :

$$\mathcal{C} = L(\mu_0 n i - B_z(r)) = \mu_0 i_{enlace} = \mu_0 n i L$$

On en déduit qu'à l'extérieur du solénoïde, le champ magnétique est nul :

$$\vec{B}(r > R) = \vec{0}$$

Un solénoïde est équivalent à une surface cylindrique de même rayon  $R$ , parcourue par une densité surfacique de courant  $\vec{J}_s = J_s \vec{u}_\theta$ . Pour que les deux systèmes soient parfaitement équivalents, il faut que le courant  $I$  passant à travers un segment de longueur  $L$  sur le cylindre soit le même (le segment est parallèle à  $Oz$  et tangent au cylindre). En posant  $I = n i L$  dans le cas du solénoïde et  $I = \int_0^L J_s \vec{u}_\theta \cdot dz \vec{u}_\theta = J_s L$  dans le cas du cylindre, on obtient  $J_s = n i$ . Par analogie avec l'expression du champ magnétique dans le solénoïde, le champ magnétique à l'intérieur du cylindre est obtenu en remplaçant  $n i$  par  $J_s$  :

$$\vec{B}_{int} = \mu_0 J_s \vec{u}_z$$

En tout point à l'extérieur du cylindre, le champ magnétique  $\vec{B}_{ext}$  est nul. La discontinuité du champ magnétique au passage de la surface cylindrique est :

$$\vec{B}_{ext} - \vec{B}_{int} = \vec{0} - \mu_0 J_s \vec{u}_z = -\mu_0 J_s \vec{u}_z$$

On note le vecteur  $\vec{n}_{int \rightarrow ext} = \vec{u}_r$ . On obtient

$$\vec{B}_{ext} - \vec{B}_{int} = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n}_{int \rightarrow ext} = \mu_0 J_s \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r = -\mu_0 J_s \vec{u}_z$$

On vérifie ainsi la relation 1.3 énoncée au paragraphe suivant.

### 1.3 Autres propriétés du champ $\vec{B}$

Nous admettrons les propriétés suivantes :

**Le flux sortant du champ magnétique à travers une surface fermée est nul. Le champ magnétique est à flux conservatif.**

Nous avons vu sur deux exemples qu'au passage d'une surface  $S$  parcourue par une densité surfacique de courant  $\vec{J}_s$ , la composante tangentielle du champ magnétique est discontinue et que cette discontinuité vaut  $\mu_0 J_s$ . On peut généraliser ce résultat observé sur ces deux cas particuliers. La surface  $S$  sépare deux milieux appelés milieu 1 et milieu 2 dans lesquels règnent un champ magnétique  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$ .  $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$  est le vecteur unitaire normal à la surface orienté du milieu 1 vers le milieu 2.

**A la traversée d'une surface parcourue par un courant surfacique de densité  $\vec{J}_s$ , la composante tangentielle du champ magnétique subit une discontinuité finie :**

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (1.3)$$