

Chapitre 1

Charge électrique, distribution de charges

La matière est constituée de particules neutres comme les neutrons ou chargées telles que les protons ou les électrons. La description des propriétés de ces particules nécessite de leur associer une grandeur physique appelée *charge électrique*. Le but de ce chapitre est de choisir un modèle de description des distributions de charges et d'identifier leurs symétries.

1.1 La charge électrique

1.1.1 Corps électriquement chargés, phénomène d'électrisation

Les expériences d'électrisation qui mettent en évidence quelques propriétés électriques de la matière sont connues depuis l'antiquité. Certains matériaux comme le verre et le plexiglass possèdent, lorsqu'ils sont frottés avec d'autres matériaux, la propriété d'attirer les corps légers. Parmi ces matériaux, une résine naturelle comme l'ambre (*electron* en grec) est l'un des plus anciens et des plus connus. Les phénomènes de répulsion ne furent observés que beaucoup plus tard. En approchant un bâton de résine préalablement chargé par frottement d'une boule de sureau (isolant) suspendue à un fil, il y a d'abord attraction, mais aussitôt le contact établi, la même boule est repoussée. Un très grand nombre d'expériences de ce type ont été réalisées par le naturaliste français Charles du Fay de Cisternay (1689-1739), inventeur de l'électromètre à feuilles d'or. En étudiant en détails les conditions d'apparition de ces phénomènes, il entreprit de les clarifier considérablement. Pour interpréter ces expériences, du Fay postula l'existence de deux espèces d'électricité : deux objets semblablement électrisés se repoussent tandis que dans le cas contraire, ils s'attirent. Il établit en plus des règles simples :

- Les charges de "nature différente" s'attirent alors que celles de "même nature" se repoussent.
- Les corps électrisés attirent ceux qui ne le sont pas et repoussent ceux qui se sont électrisés à leur contact.
- Tout conducteur est électrisable, pourvu qu'il soit isolé

1.1.2 Particules et charges élémentaires

Ce n'est que beaucoup plus tard que, grâce à des expériences datant de la fin du XIX^e siècle (J.J. Thomson, 1856-1940 et J. Perrin, 1870-1942), une interprétation de la matière en termes de corpuscules élémentaires est proposée. La structure de l'atome et de son noyau ne sont bien comprises que vers les années 1930. Il est définitivement établi que la charge notée e d'un des deux constituants du noyau est exactement égale en grandeur à celle de l'électron notée $-e$. En revanche, les nucléons (proton ou neutron) ont une masse environ 1800 fois plus grande que l'électron. Lorsqu'un atome possède tous ses électrons, il est électriquement neutre et sa charge totale est nulle. Si un ou plusieurs électrons sont ajoutés ou soustraits à un atome, on dit qu'il est ionisé. L'unité de charge est le Coulomb notée C. La charge des électrons qui constituent l'enveloppe (nuage électronique) des atomes vaut $-e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$. La charge d'un ion est donc un multiple entier positif ou négatif de la charge élémentaire e . Lors des expériences d'électrisation, les charges positives liées aux noyaux, restent au sein des supports matériels. Seuls l'apport (ou la prise) d'électrons peuvent charger négativement (ou positivement) le corps électrisé. On en déduit la propriété fondamentale suivante :

Les charges observées sont toujours des multiples entiers de la charge élémentaire e : la charge électrique est quantifiée.

1.1.3 Conservation de la charge

La charge électrique est une grandeur fondamentale qui intervient dans les expressions des champs électromagnétiques créés par des distributions de charges statiques ou mobiles (courants). Toutes les interactions connues telles que les collisions dans les accélérateurs de particules ou les réactions chimiques ont la propriété de conserver la charge électrique. En outre, cette grandeur est indépendante du référentiel d'observation.

Pour un système fermé, c'est à dire n'échangeant pas de matière avec l'extérieur, la charge électrique est constante. Elle est la même pour tous les observateurs.

1.2 Distributions de charges

1.2.1 Charges ponctuelles et distributions discrètes

Une particule est un objet de très petite taille. La dimension d'un nucléon (proton ou neutron), par exemple est de l'ordre du Fermi ou femtomètre (10^{-15}m). Les lois de l'électromagnétisme donnent une description satisfaisante du comportement des particules chargées tant que les distances mises en jeu restent grandes devant cette distance élémentaire. Assimiler les particules élémentaires chargées à des points matériels portant une charge constitue ainsi une approximation convenable. Nous définirons une distribution de N charges ponctuelles par l'ensemble des positions $\vec{r}_i = \overrightarrow{OM_i}$ des charges q_i , i variant de 1 à N .

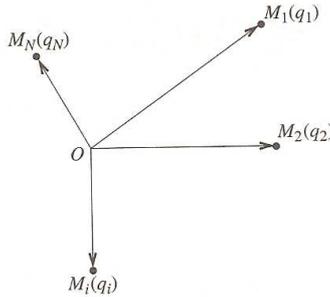


FIG. 1.1 – Distribution de N charges ponctuelles

1.2.2 Modélisation d'une répartition de charges

A l'échelle **microscopique**, la structure de la matière apparaît discontinue. Dans un milieu condensé comme un liquide ou un solide, l'échelle microscopique est caractérisée par une longueur d de l'ordre de quelques dizaines de nanomètres. Dans l'image 1.2 obtenue par Microscope à Force Atomique (AFM) d'un cristal de silicium, les atomes de Si sont séparés par une distance de 0.2 nm. Pour un observateur capable d'une observation microscopique le milieu a un aspect semblable à celui obtenu par AFM. A cette échelle, la structure de la matière est discontinue. Les atomes sont considérés explicitement et cette particularité se prête mal à l'étude de leurs propriétés d'ensemble. Au contraire, à l'échelle **macroscopique** caractérisée par une taille D , c'est à dire à l'échelle d'objets beaucoup plus grands que l'échelle microscopique, ($D > 1$ à $10\mu m$), la description est imprécise et ne permet pas de modéliser leurs propriétés. Pour lever ce dilemme, il est nécessaire d'introduire une troisième échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique et macroscopique. Cette échelle appelée échelle **mésoscopique** est définie par une longueur l telle que $d \ll l \ll D$.

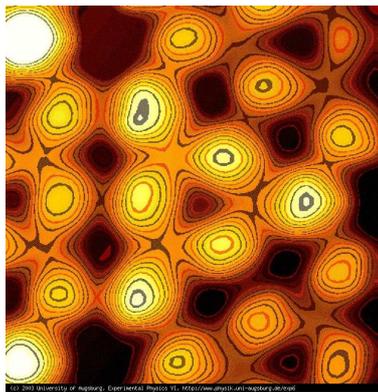


FIG. 1.2 – Observation par AFM d'un cristal de silicium. L'image est un carré de 3.3 nm de côté

Comme $l \gg d$, il est possible de définir convenablement la *grandeur locale moyenne* attachée aux entités microscopiques puisque le volume l^3 contient un très grand nombre de ces entités. Cette opération de lissage ou de nivellement fait de la grandeur locale une

grandeur variant *continûment*. Il est alors pratique d'adopter une description en termes de *milieux continus*. Comme $l \ll D$, la description locale est une description précise de l'objet étudié.

A une échelle macroscopique, les distributions de charges (entités microscopiques) seront représentées à l'aide d'une grandeur nivelée à une échelle mésoscopique : la densité de charges.

Charges volumiques

La présence de charges dans un milieu est en général modélisée par une charge délocalisée, nivelée, décrite par la charge volumique ρ . Pour un milieu chargé de volume V , la distribution de charges \mathcal{D} est définie par la donnée de ρ à l'intérieur de la surface S contenant V . La charge contenue dans un volume élémentaire $d\tau$ est :

$$dq = \rho \cdot d\tau$$

La densité volumique ρ est mesurée en C.m^{-3} .

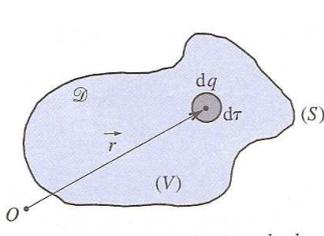


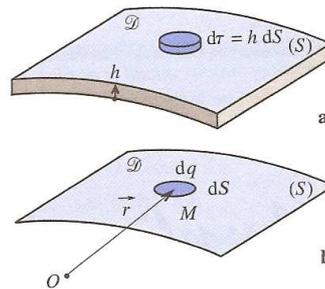
FIG. 1.3 – Distribution volumique de charges

Charges surfaciques

Lorsque la distribution de charges \mathcal{D} présente l'aspect d'une nappe chargée d'épaisseur h très faible par rapport aux dimensions de la nappe, on pourra assimiler \mathcal{D} à une surface chargée portant une densité surfacique de charges σ . Pour une surface élémentaire dS de la nappe, la charge portée par le volume élémentaire $d\tau = hdS$ est $dq = \rho d\tau = \rho h dS$. L'épaisseur h étant très petite, considérons la représentation limite $h \rightarrow 0$ à charge dq constante. Pour un élément de surface dS donné, le produit ρh que nous noterons σ doit être maintenu constant en considérant cette description limite de la distribution. Nous définissons ainsi une distribution surfacique de charges, de densité σ . La charge portée par une surface élémentaire dS s'écrit :

$$dq = \sigma \cdot dS$$

La densité surfacique de charges σ est mesurée en C.m^{-2} .

FIG. 1.4 – Nappe chargée d'épaisseur h (a) et modélisation surfacique (b)

Charges linéiques

Lorsque la distribution de charges \mathcal{D} est filiforme, nous définirons de façon analogue une distribution linéique de charges le long de la courbe C en introduisant une densité linéique de charges λ . La charge portée par une longueur élémentaire dl est :

$$dq = \lambda \cdot dl$$

La densité linéique est mesurée en $C \cdot m^{-1}$

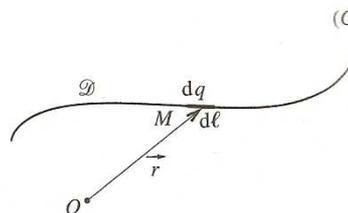


FIG. 1.5 – distribution linéique de charges

1.3 Symétries et invariances des distributions de charges

Les distributions de charges peuvent présenter des symétries particulières. Nous verrons par la suite qu'il est important de savoir identifier ces symétries afin de simplifier l'étude du champ électrostatique. De même, les distributions de charges peuvent présenter des invariances par des transformations spatiales telles que des rotations ou des translations. Nous verrons que ces invariances permettent de préciser les variables dont dépendent les composantes du champ électrostatique.

1.3.1 Symétries usuelles

Symétrie plane

Une distribution est symétrique par rapport à un plan Π si, M et M' étant deux points symétriques par rapport à Π , sa densité de charges vérifie :

$$\rho(M) = \rho(M')$$

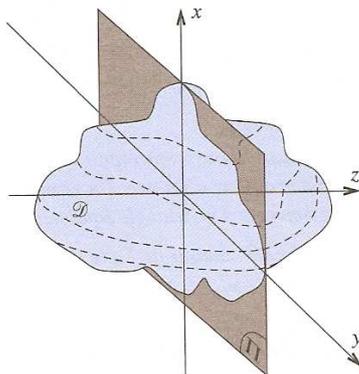


FIG. 1.6 – Distribution invariante par symétrie plane.

Le plan de symétrie Π est aussi appelé *plan miroir*. En coordonnées cartésiennes, la distribution de charges de la figure 1.6 est symétrique par rapport au plan $\Pi = (xOy)$, puisque $\rho(x, y, z) = \rho(x, y, -z)$.

Antisymétrie plane

Une distribution est antisymétrique par rapport à un plan Π^* si, M et M' étant deux points symétriques par rapport à Π^* , sa densité de charges vérifie :

$$\rho(M) = -\rho(M')$$

Le plan Π^* d'antisymétrie est aussi appelé *plan antimiroir*. En coordonnées cartésiennes, une distribution de charges est antisymétrique par rapport au plan $\Pi^* = (xOy)$, lorsque $\rho(x, y, z) = -\rho(x, y, -z)$.

1.3.2 Invariances

Invariance par translation

Une distribution illimitée dans la direction de l'axe Δ est invariante par translation selon Δ si pour tout point M et son translaté M' , sa densité de charge vérifie :

$$\rho(M) = \rho(M')$$

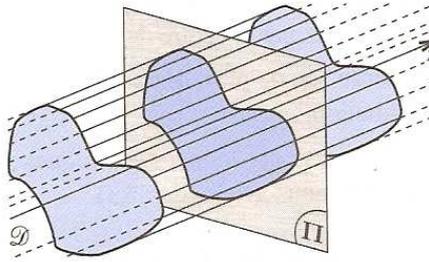


FIG. 1.7 – Distribution invariante par translation.

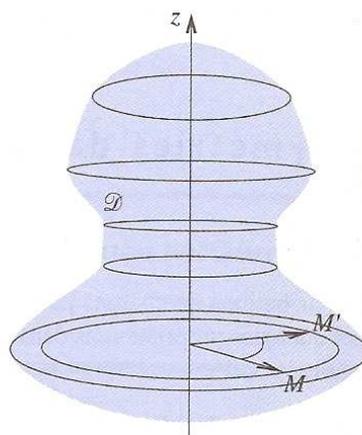
En coordonnées cartésiennes, si l'axe Oz est pris comme axe Δ , une telle distribution satisfait à l'égalité $\rho(x, y, z) = \rho(x, y, z')$, quel que soit z et z' . La densité de charge est indépendante de la coordonnée z : $\rho(x, y)$. La figure 1.7 illustre ce cas. Tous les plans perpendiculaires à la direction de translation sont plans miroirs de la distribution de charges.

Invariance par rotation

Une distribution de charges \mathcal{D} est invariante par rotation autour d'un axe Oz si la densité de charges est la même en un point $M(r, \theta, z)$ de la distribution et en tout point $M'(r, \theta', z)$ obtenu par rotation d'un angle quelconque de M autour de l'axe. La charge d'une distribution invariante par rotation autour d'un axe Oz est telle que :

$$\rho(r, \theta, z) = \rho(r, \theta', z)$$

Tous les plans contenant l'axe Oz sont plans miroirs de cette distribution.

FIG. 1.8 – Distribution invariante par rotation autour d'un axe Oz .

1.3.3 Distributions à symétries multiples

Nous rencontrerons souvent des distributions invariantes par plusieurs opérations de symétrie. Nous avons déjà noté qu'il existe une infinité de plans miroirs dans le cas de distributions de charges invariantes par translation ou par rotation autour d'un axe. Nous citerons encore les deux situations suivantes qui présentent un degré de symétrie élevé :

Distribution à symétrie cylindrique

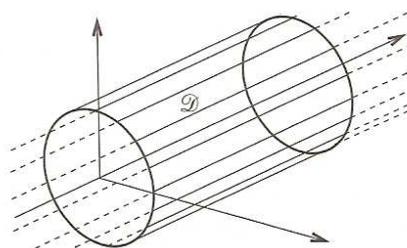


FIG. 1.9 – Distribution à symétrie cylindrique

La distribution à symétrie cylindrique représentée figure 1.9 est invariante par translation selon un axe Oz et par rotation autour de cet axe. Les plans contenant l'axe Oz et perpendiculaires à l'axe Oz sont plans de symétrie ou plans miroirs de la distribution de charges. On obtient dans le système de coordonnées cylindriques : $\rho(r, \theta, z) = \rho(r)$

Distribution à symétrie sphérique

La distribution à symétrie sphérique représentée sur la figure 1.10 est invariante par rotation autour de tout axe passant par le centre de symétrie. Nous pouvons remarquer que tout plan contenant le centre de symétrie est plan de symétrie de la distribution. En utilisant le système de coordonnées sphériques avec l'origine au centre de symétrie, nous pouvons écrire : $\rho(r, \theta, \varphi) = \rho(r)$

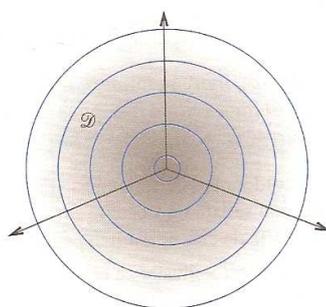


FIG. 1.10 – Distribution à symétrie sphérique

1.4 Exemples de distributions, calcul de charge

1.4.1 Exemples de distributions continues

Symétrie sphérique

- Distribution de taille finie : On considère une sphère de rayon R portant une densité de charge volumique uniforme ρ . Quelle est la charge élémentaire dQ contenue dans une coquille de rayon interne r et de rayon externe $r + dr$? En déduire la charge Q totale portée par la sphère. Quels sont les plans de symétrie et les invariances de la distribution de charges ?

Réponse : $dq = \rho 4\pi r^2 dr$; $Q = \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$. Les plans passant par le centre O de la sphère sont plans de symétrie de la distribution de charges. La distribution de charges est invariante par rotation selon θ et φ .

- Distribution infinie : L'espace entier est chargé avec la densité de charge suivante : $\rho(r) = \frac{K}{4\pi a^2 r} e^{-\frac{r}{a}}$. Etudier les propriétés de cette distribution de charge. Quelle est la charge totale Q de l'espace ? Quelle est la dimension de a et K ?

Réponse : Les propriétés de symétrie et d'invariances sont les mêmes que dans le cas précédent.

La charge totale est : $Q = \int_0^\infty \rho(r) 4\pi r^2 dr = \int_0^\infty \frac{K}{4\pi a^2 r} e^{-\frac{r}{a}} 4\pi r^2 dr = 24K\pi a^4$ (intégration par parties). $[K] = Cm^{-4}$, $[a] = m$

- Bulle de savon de rayon R uniformément chargée en surface ($\sigma = \sigma_0$) : Les plans de symétrie et les invariances sont les mêmes que dans le cas précédent. Charge totale $Q = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sigma_0 R^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi = \sigma_0 4\pi R^2$

Exemple de distribution présentant les deux types de symétries planes

Un agrégat de taille nanométrique assimilé à une sphère de rayon R est placé dans un champ électrostatique uniforme orienté selon Oz (voir figure 1.11). Ce champ a pour effet de déplacer légèrement les électrons et créer un excès de charge négative d'un côté de l'agrégat et un déficit d'électrons de l'autre côté. L'agrégat se charge en surface et la distribution de charges peut être modélisée par la distribution surfacique de charges : $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$. On peut vérifier que l'agrégat reste bien neutre sous l'effet du champ \vec{E} . En effet, la charge totale Q de l'agrégat est donnée par l'expression suivante :

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sigma_0 \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 0$$

Le plan (xOy) est plan de d'antisymétrie Π^* alors que tous les plans contenant l'axe Oz sont plans de symétrie Π . La distribution de charges est invariante par rotation selon φ .

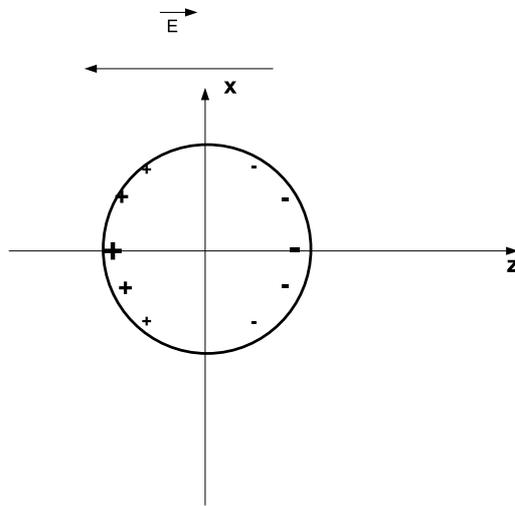


FIG. 1.11 – Agrégat sphérique chargé en surface

Chapitre 2

Le champ électrostatique

2.1 Loi de Coulomb

2.1.1 Interaction entre deux charges ponctuelles

Deux charges ponctuelles q_1 et q_2 , immobiles aux points M_1 et M_2 , exercent l'une sur l'autre une force :

- proportionnelle au produit des charges.
- inversement proportionnelle au carré de la distance les séparant.
- dirigée parallèlement à M_1M_2

Cette force est répulsive si les charges sont de même signe, attractive si elles sont de signe différent.

La force de Coulomb exercée par la charge q_1 sur la charge q_2 est :

$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_{1 \rightarrow 2}}{(M_1 M_2)^2}$$

$\vec{e}_{1 \rightarrow 2}$ désigne le vecteur unitaire dirigé de M_1 vers M_2 . Elle est opposée à la force exercée par q_2 sur q_1 : $\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{f}_{2 \rightarrow 1}$. La constante ϵ_0 , **permittivité** électrique du vide, est voisine de $(36.\pi.10^9)^{-1}$ et se mesure en $F.m^{-1}$, F désignant le farad (unité de capacité). La permittivité électrique de l'air ϵ étant très voisine de ϵ_0 , la loi de Coulomb reste valable dans l'air ($\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ avec $\epsilon_r=1,0006$).

2.1.2 Champ d'une charge ponctuelle

La force exercée par q_1 sur q_2 se met sous la forme $\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \vec{E}_1(M_2)$ avec :

$$\vec{E}_1(M_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{(M_1 M_2)^3} \quad (2.1)$$

$\vec{E}_1(M_2)$ est le champ électrostatique créé par la charge q_1 au point M_2 dans le vide ou dans l'air. La charge q_1 est appelée charge source. Le champ créé par q_1 caractérise l'influence de celle-ci sur l'espace qui l'entoure.

Le champ électrostatique créé dans l'espace par une particule de charge q , immobile au point origine O du repère de coordonnées sphériques, a pour expression :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r^2}$$

2.2 Champ d'une distribution de charges

L'expérience conduit à postuler que les interactions électrostatiques ont des effets linéaires. La force subie par une charge q de la part d'autres charges q_1, q_2, \dots, q_N est la somme des N forces qu'exercent individuellement les charges $q_i (i = 1, \dots, N)$ lorsqu'elles sont mises seules en présence de la charge q . Le champ $\vec{E}_{(q_i, i=1, \dots, N)}$ créé par les N charges est donc la somme des N champs créés par chaque charge. Nous postulons donc la linéarité des effets. Ce postulat constitue le **principe de superposition**. La force subie par une charge q s'écrit :

$$\vec{F} = q \vec{E}_{(q_i, i=1, \dots, N)} \quad (2.2)$$

2.2.1 Charges ponctuelles

En appliquant le principe de superposition à une distribution de charges ponctuelles, nous obtenons immédiatement l'expression du champ électrostatique créé en M par diverses charges q_i situées aux points P_i :

$$\vec{E}_{(q_i, i=1, \dots, N)}(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{P_i M}}{(P_i M)^3} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \quad (2.3)$$

2.2.2 Généralisation aux distributions de charges continues :

Nous appliquerons le principe de superposition à une distribution de charges \mathcal{D} après l'avoir décomposée en un ensemble de fragments élémentaires chargés que nous assimilerons à des charges ponctuelles. Une partie élémentaire de la distribution \mathcal{D} située au voisinage de P , et qui contient une charge dq_p crée un champ $d\vec{E}$ au voisinage du point M . Le champ total créé en M par \mathcal{D} est finalement obtenu par superposition des contributions de chacune de ses parties élémentaires selon :

$$\vec{E}_{\mathcal{D}}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\overrightarrow{PM}}{(PM)^3} dq_p \quad (2.4)$$

Il reste à préciser l'élément d'intégration dq_p en fonction de la nature de la distribution considérée.

Distribution volumique

Un volume élémentaire $d\tau$ contient la charge $dq_p = \rho(P) d\tau$. On obtient :

$$\vec{E}(M) = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{(PM)^3} d\tau \quad (2.5)$$

Distribution surfacique

Une surface élémentaire dS contient la charge $dq_p = \sigma(P) dS$. On obtient :

$$\vec{E}(M) = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\sigma(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{(PM)^3} dS \quad (2.6)$$

Distribution linéique

Une longueur élémentaire dl contient la charge $dq_p = \lambda(P) dl$. On obtient :

$$\vec{E}(M) = \int_{\mathcal{D}} \frac{\lambda(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{(PM)^3} dl \quad (2.7)$$

2.2.3 Quelques précautions à prendre pour calculer le champ électrostatique

Les distributions infinies n'ont pas de sens physique, mais sont pratiques pour calculer le champ créé au voisinage de distributions de grande dimension. Les expressions précédentes ne sont à priori applicables qu'aux cas des distributions d'extension finie. En effet, les intégrales ci-dessus ne convergent pas nécessairement si les distributions de charges n'ont pas une taille finie. Nous verrons qu'il existe des distributions de taille infinie pour lesquelles ces intégrales convergent (fil rectiligne ou plan infinis uniformément chargés,...). Dans le cas d'une distribution volumique de charges $\rho(P)$ d'extension quelconque, l'intégrale triple ci-dessus converge toujours, quel que soit le point M. Il n'en est plus de même pour les distributions surfaciques et linéiques : le champ $\vec{E}(M)$ n'est plus défini sur ces distributions.

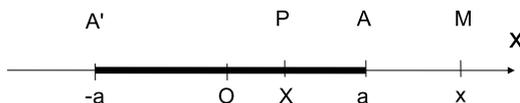


FIG. 2.1 – Segment portant une densité linéique de charges λ uniforme

EXEMPLE

On considère un segment de longueur $2a$ de centre O et situé sur l'axe Ox . Ce segment porte une densité linéique de charges uniforme λ . On cherche à déterminer l'expression du champ $\vec{E}(M)$ en tout point de l'axe Ox extérieur au segment. On note x l'abscisse d'un point M pris en dehors de la distribution de charges et X celle d'un point P appartenant au segment chargé. L'expression du champ élémentaire $d\vec{E}(M)$ pour $x > a$ est $d\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{dX}{(X-x)^2} \vec{e}_x$. On en déduit l'expression du champ total \vec{E} en dehors du segment chargé :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \vec{e}_x \int_{-a}^a \frac{dX}{(X-x)^2} \quad (2.8)$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \vec{e}_x \left(-\frac{1}{a-x} + \frac{1}{-a-x} \right) \quad (2.9)$$

$$= \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_x}{x^2 - a^2} \quad (2.10)$$

Pour un point M situé en $x < -a$ le champ élémentaire est : $d\vec{E}(M) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{dX}{(X-x)^2} \vec{e}_x$ et l'expression du champ devient :

$$\vec{E}(M) = -\frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_x}{x^2 - a^2}$$

Nous constatons que l'expression du champ tend vers l'infini quand x tend vers $\pm a$. Il est impossible de calculer le champ électrostatique en tout point de ce segment. Il en est de même à l'endroit d'une distribution surfacique de charges comme nous le verrons un peu plus loin.

Le champ électrostatique en un point des sources n'est pas défini lorsque ces sources sont modélisées par une densité surfacique ou linéique des charges

2.3 Topographie du champ électrostatique

2.3.1 Lignes de champ

Le champ électrostatique est continuellement tangent à des courbes appelées **lignes de champ** (figure 2.2). Ces lignes sont orientées par le sens du champ.

Pour visualiser les lignes de champ à la surface d'un fluide dans lequel règne un champ électrostatique, il suffit de placer un grand nombre de particules isolantes (semoule, riz...) à la surface de ce fluide. Sous l'effet du champ, celles-ci vont se polariser. Ceci signifie que le champ \vec{E} crée une dissymétrie de charges dans ces particules. Cette dissymétrie de charges va permettre aux grains de s'aligner les uns derrière les autres le long des lignes de champ (figure 2.3). Cette démonstration sera réalisée pendant la séance de travaux pratiques consacrée à l'étude du champ électrique.

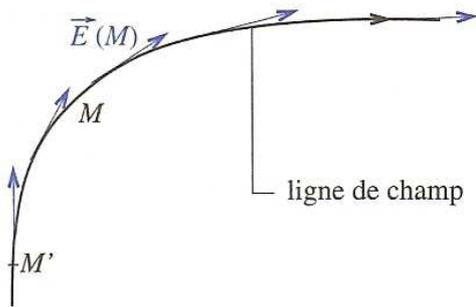


FIG. 2.2 – Lignes de champ

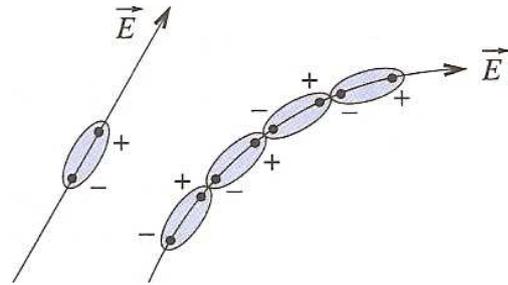


FIG. 2.3 – Matérialisation d'une ligne de champ

La définition des lignes de champ nous permet d'affirmer qu'un élément de longueur $d\vec{M}$ le long d'une ligne de champ est parallèle au champ \vec{E} . L'équation différentielle (vectorielle) d'une ligne de champ est donc :

$$d\vec{M} \wedge \vec{E} = \vec{0}$$

2.3.2 Points de champ nul, points singuliers

Deux lignes de champ ne peuvent se couper en un point M où le champ \vec{E} est défini et non nul. Si deux lignes de champ se coupent en un point M, alors :

- soit le champ est nul (point de champ nul ou point d'arrêt ; voir figure 2.4).
- soit le champ n'est pas défini au point M (à l'endroit d'une charge ponctuelle par exemple)

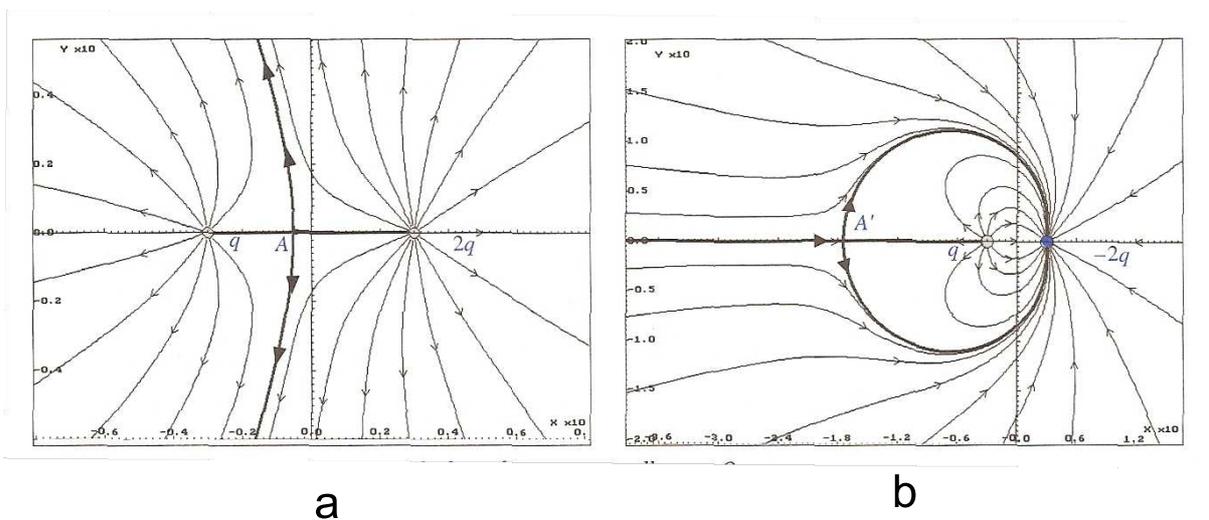


FIG. 2.4 – Lignes de champ d'un système de deux charges ponctuelles.

Exercice : Dans le cas de la figure 2.4 (a) et (b), rechercher la position du point de champ nul le long de l'axe reliant les deux charges espacées d'une distance $2a$.

2.3.3 Exemples de cartes de champ

Voici quelques cartes de champ présentées sur la figure 2.5 pour des distributions de charges ponctuelles seules (a et b) ou en présence d'un plan conducteur (c). La figure (d) représente la carte de champ d'une pointe de microscope électronique fonctionnant par effet tunnel (TEM). La figure (e) représente les lignes de champ d'une des deux distributions de charges de la figure 2.4. Laquelle ?

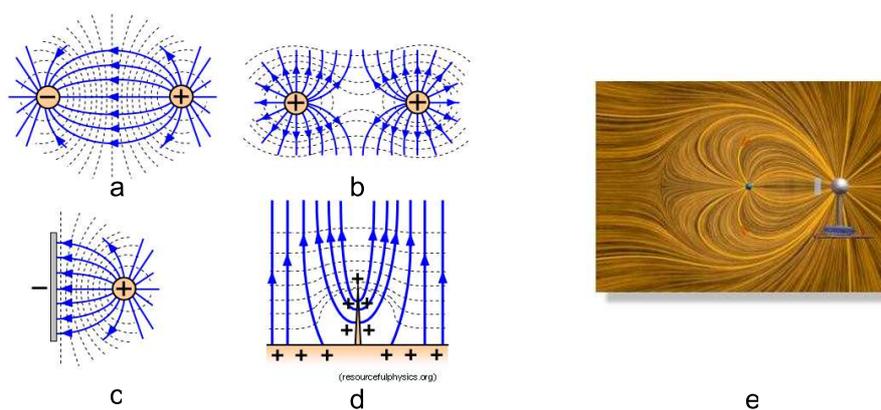


FIG. 2.5 – Exemples de cartes de champ. Les lignes de champ sont en bleu et les équipotentiels en pointillés

2.4 Propriétés de symétrie du champ électrostatique

L'utilisation des symétries des distributions de charges permet de simplifier le calcul du champ électrostatique. L'utilisation des propriétés de symétrie du champ \vec{E} permet dans bien des cas de déterminer les composantes du champ. L'exploitation des invariances de la distribution nous renseigne sur les variables dont dépendent les composantes de \vec{E} .

2.4.1 Plan de symétrie Π de la distribution de charges

Soit une distribution de charges invariante par symétrie plane \mathcal{S} par rapport à un plan Π . Pour illustrer ce cas, nous prenons deux charges q placées en P et P', où P' est le symétrique de P par rapport au plan Π . Soit M' le symétrique du point M par rapport au plan Π ($M' = \mathcal{S}_{/\Pi}(M)$). On peut constater sur la figure 2.6 que le champ en M' est le **symétrique** du champ en M :

$$\vec{E}(M') = \mathcal{S}_{/\Pi}(\vec{E}(M)) \quad (2.11)$$

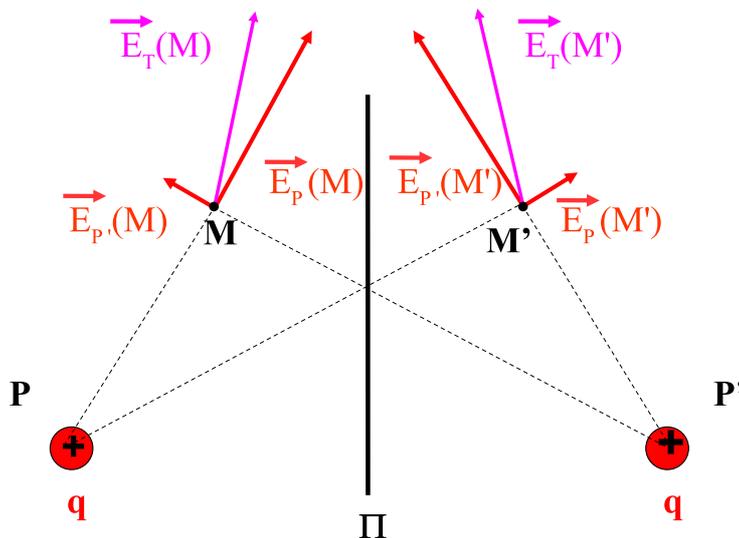


FIG. 2.6 – Plan de symétrie plane Π

On remarque que les composantes du champ parallèles au plan de symétrie sont conservées alors que celles perpendiculaires au plan sont inversées :

$$\vec{E}_{\parallel}(M) = \vec{E}_{\parallel}(M') \quad (2.12)$$

$$\vec{E}_{\perp}(M) = -\vec{E}_{\perp}(M') \quad (2.13)$$

CONSÉQUENCE : En plaçant M sur le plan miroir Π ($M=M'$), on obtient $\vec{E}_{\perp}(M) = \vec{0}$ (figure 2.8). Le champ \vec{E} est donc **parallèle** au plan Π en tout point de ce plan.

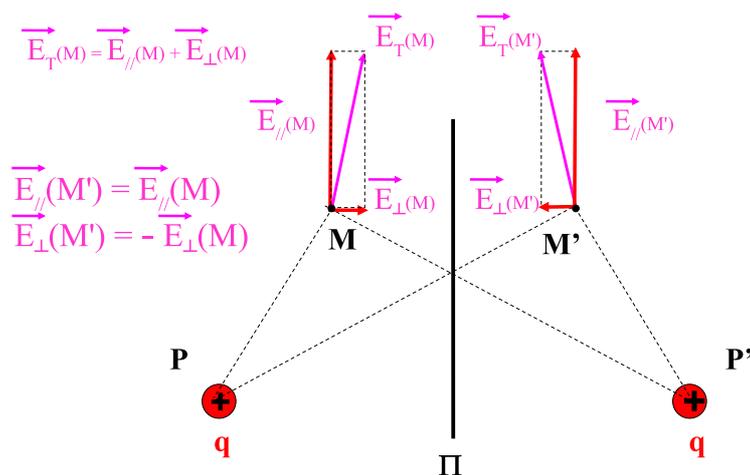


FIG. 2.7 – Transformation des composantes \vec{E}_{\parallel} et \vec{E}_{\perp} du champ \vec{E} par opération de symétrie plane

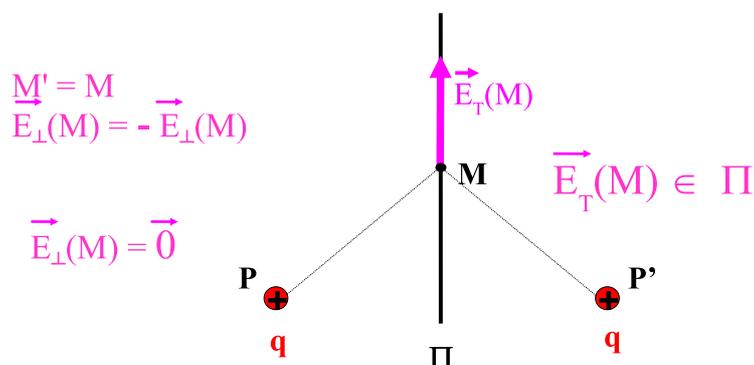


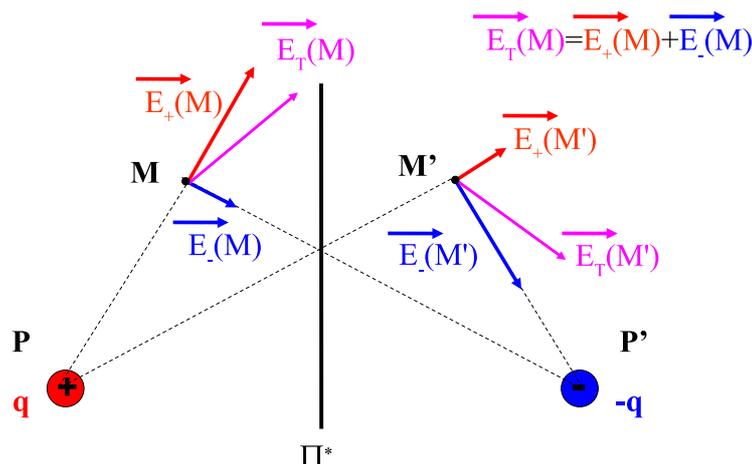
FIG. 2.8 – Champ \vec{E} sur un plan de symétrie Π

2.4.2 Plan de symétrie-inversion Π^* de la distribution de charges

Soit Π^* un plan de symétrie inversion de la distribution de charges de la figure 2.9. Pour illustrer ce cas, nous prenons deux charges q et $-q$ placées en P et P' , où P' est le symétrique de P par rapport au plan Π . Soit M' le symétrique du point M par rapport au plan Π^* ($M' = \mathcal{S}_{\Pi^*}(M)$). On peut constater sur la figure 2.9 que le champ en M' est l'opposé du symétrique du champ en M :

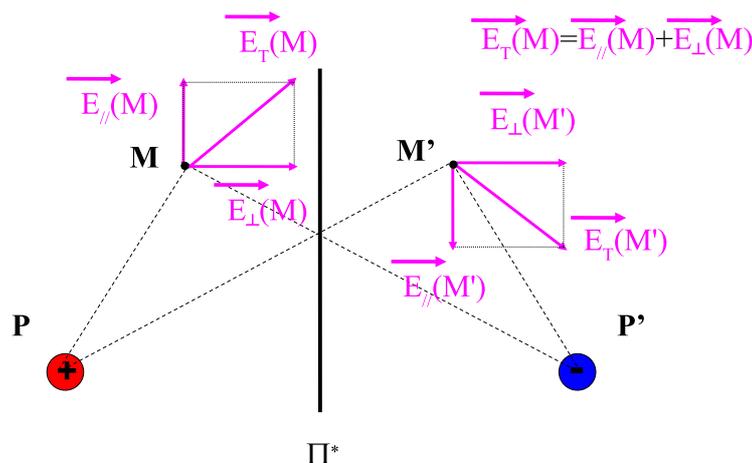
$$\vec{E}(M') = -\mathcal{S}_{\Pi^*}(\vec{E}(M)) \quad (2.14)$$

A l'inverse du cas précédent, on remarque sur la figure 2.10 que les composantes du champ parallèles au plan de symétrie-inversion Π^* sont opposées alors que celles perpendiculaires au plan Π^* sont conservées :


 FIG. 2.9 – Plan de symétrie-inversion plane Π^*

$$\vec{E}_{\parallel}(M) = -\vec{E}_{\parallel}(M') \quad (2.15)$$

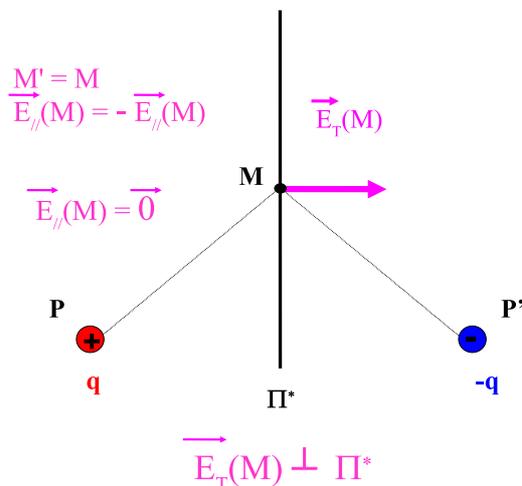
$$\vec{E}_{\perp}(M) = \vec{E}_{\perp}(M') \quad (2.16)$$


 FIG. 2.10 – Transformation des composantes \vec{E}_{\parallel} et \vec{E}_{\perp} du champ \vec{E} par opération de symétrie-inversion

CONSÉQUENCE : En plaçant M sur le plan antimirroir Π^* ($M=M'$) de la figure 2.11, on obtient $\vec{E}_{\parallel}(M) = \vec{0}$ (figure 2.11). Le champ \vec{E} est donc **perpendiculaire** au plan Π^* en tout point de ce plan .

2.4.3 Conséquences

Lors d'une opération de symétrie appliquées à la distribution de charges, le champ électrostatique subit la même opération. On dit que le vecteur champ électrique est un

FIG. 2.11 – Champ \vec{E} sur un plan de symétrie-inversion Π^*

vecteur **polaire** ou “vrai” vecteur. Ce vecteur a les mêmes propriétés de symétrie que ses sources.

Les plans de symétrie et de symétrie-inversion nous permettent souvent de trouver la direction du champ en un point M. Pour trouver la direction du champ \vec{E} en un point M, il suffit de trouver :

- * Soit deux plans de symétrie passant par M. Le champ \vec{E} appartenant à ces deux plans, il est porté par la droite formée par leur intersection.
- * Soit un plan de symétrie-inversion passant par M. La direction du champ \vec{E} au point M est donnée par la normale au plan de symétrie inversion.

Les **plans de symétrie** ou de **symétrie-inversion** permettent d’obtenir les **composantes** du champ \vec{E} . Les **variables** dont dépendent ces composantes sont obtenues en étudiant les **invariances** de la distribution de charges.

2.4.4 Cas particuliers

Invariance par translation

Considérons la distribution de charges de la figure 2.12. Celle-ci est invariante par translation selon l’axe Oz . Tout plan perpendiculaire à l’axe OZ est plan de symétrie de la distribution de charges. Le champ en un point M est donc contenu dans le plan passant par M : $\vec{E}(x, y, z) = E_x(x, y, z)\vec{e}_x + E_y(x, y, z)\vec{e}_y$. Par ailleurs, la distribution étant invariante par translation selon l’axe Oz , les composantes du champ ne dépendent que de x et y :

$$\vec{E}(x, y, z) = E_x(x, y)\vec{e}_x + E_y(x, y)\vec{e}_y \quad (2.17)$$

Invariance par rotation

Considérons la distribution de charges de la figure 2.13. Celle-ci est invariante par rotation autour l'axe Oz . Tout plan contenant l'axe OZ est plan de symétrie de la distribution de charges. Le champ en un point M est donc contenu dans le plan passant par M : $\vec{E}(r, \theta, z) = E_r(r, \theta, z)\vec{e}_r + E_z(r, \theta, z)\vec{e}_z$. Par ailleurs, la distribution étant invariante par rotation selon θ , les composantes du champ ne dépendent que de r et z :

$$\vec{E}(r, \theta, z) = E_r(r, z)\vec{e}_r + E_z(r, z)\vec{e}_z \quad (2.18)$$

Symétries multiples

Démontrer les propositions suivantes en utilisant les figures 2.14 et 2.15

- Le champ créé par la distribution à symétrie cylindrique de la figure 2.14 s'écrit sous la forme :

$$\vec{E}(r, \theta, z) = E_r(r)\vec{e}_r \quad (2.19)$$

- Le champ créé par la distribution à symétrie sphérique de la figure 2.15 s'écrit sous la forme :

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E_r(r)\vec{e}_r \quad (2.20)$$

Un autre exemple est la distribution de charges de la figure 1.11 : Le plan (xOy) est plan de symétrie-inversion alors que tout plan contenant l'axe Oz est plan de symétrie de la distribution de charges. La distribution de charges est invariante par rotation selon φ . Soit $M(r, \theta, \varphi)$, le champ en M appartient au plan de symétrie Π passant par l'axe Oz et contenant le point M :

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E_r(r, \theta)\vec{e}_r + E_\theta(r, \theta)\vec{e}_\theta \quad (2.21)$$

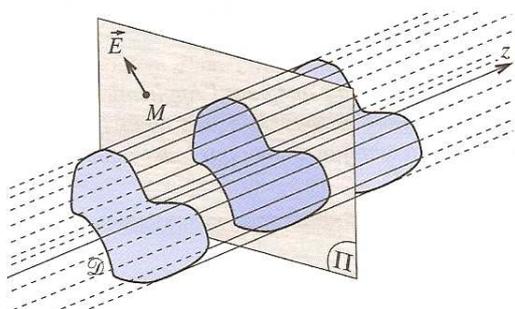


FIG. 2.12 – Champ \vec{E} créé par une distribution de charges invariante par translation selon Oz

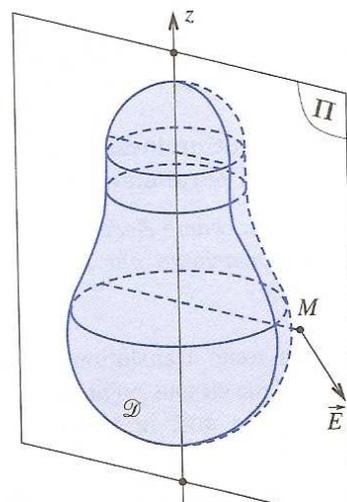


FIG. 2.13 – Champ \vec{E} créé par une distribution de charges invariante par rotation autour de l'axe Oz

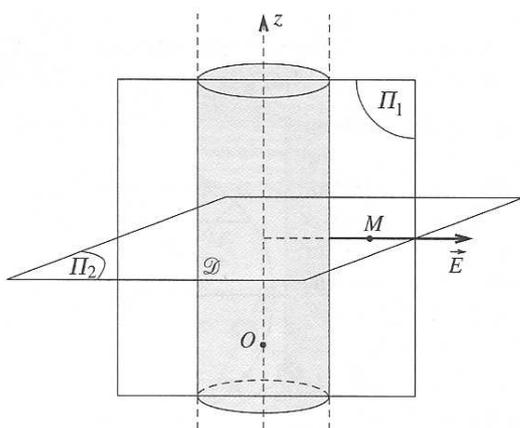


FIG. 2.14 – Distribution de charges à symétrie cylindrique

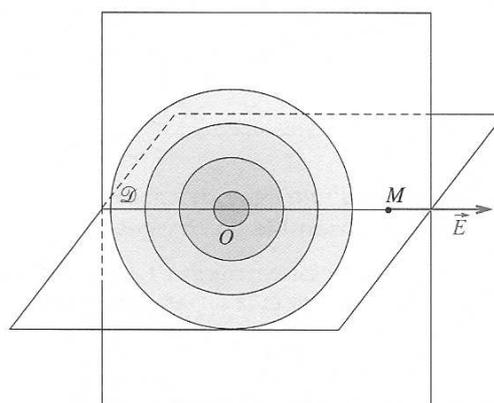


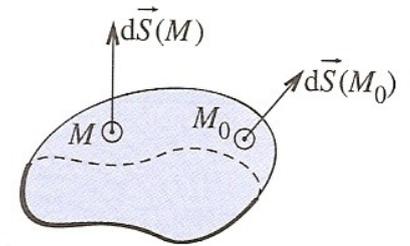
FIG. 2.15 – Distribution de charges à symétrie sphérique

Théorème de Gauss

1. Flux d'un champ de vecteurs

a. Flux élémentaire

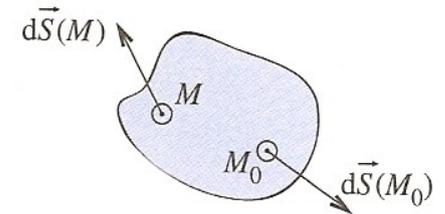
$$d\Phi = \vec{E} d\vec{S}$$



Doc. 1b.

b. Flux à travers une surface S

$$\Phi = \iint d\Phi = \iint \vec{E} d\vec{S}$$



c. Flux à travers une surface fermée

$$\Phi = \oiint d\Phi = \oiint \vec{E} d\vec{S}$$

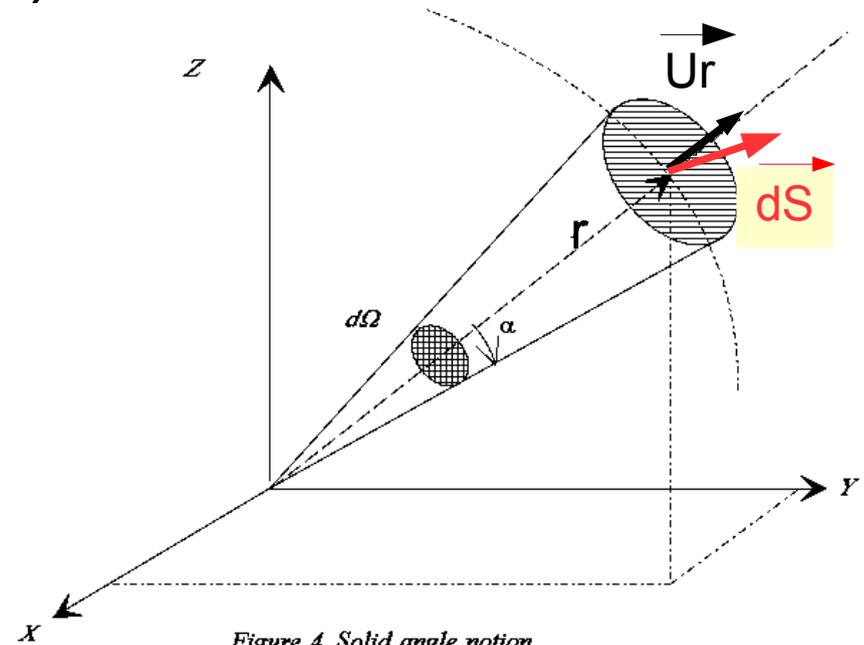
2. Notion d'angle solide

- Angle plan (2 dimensions)
- Angle solide (3 dimensions)
 - Angle solide élémentaire

$$d\Omega = \frac{d\vec{S} \vec{u}_r}{r^2}$$

- Angle solide

$$\Omega = \iint_S d\Omega = \iint_S \frac{d\vec{S} \vec{u}_r}{r^2}$$

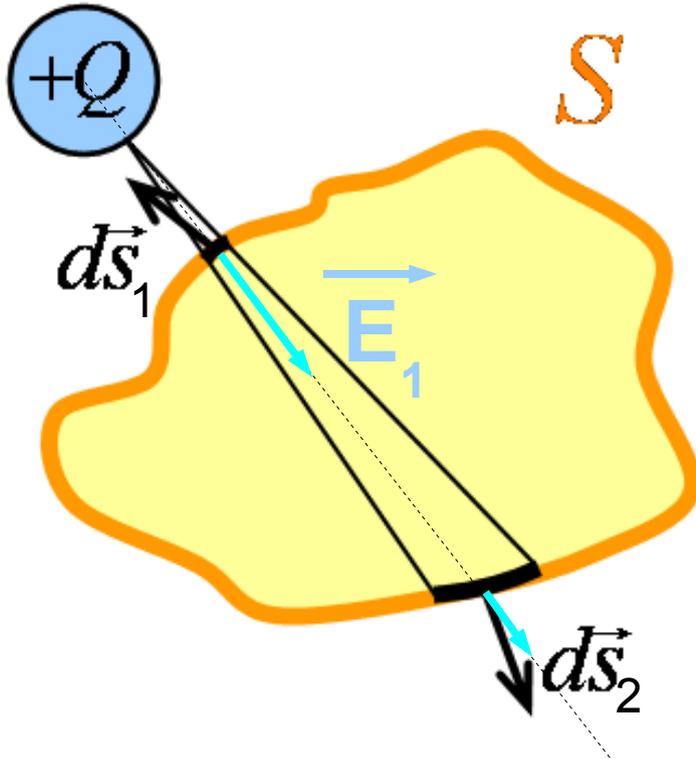


L'angle solide sous lequel on voit tout l'espace vaut 4π

3. Théorème de Gauss

a) Flux sortant d'une charge ponctuelle à travers une surface fermée

- Charge à l'extérieur de la surface



$$d\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \vec{dS}_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \cdot \vec{dS}_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega_1$$

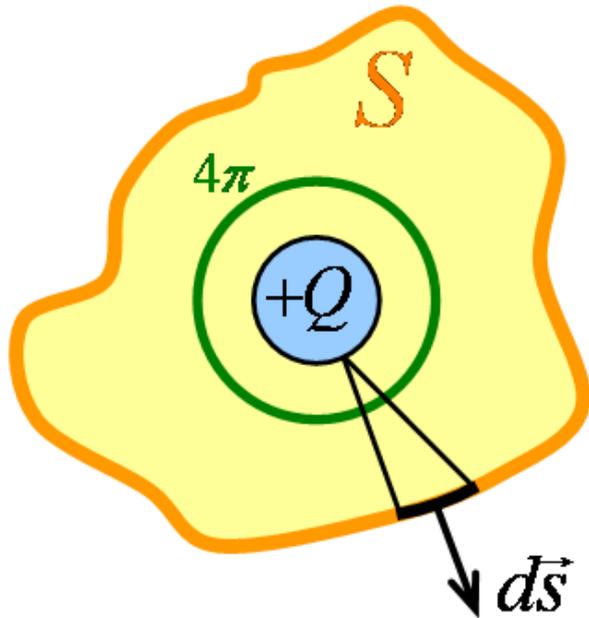
$$d\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \vec{dS}_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \cdot \vec{dS}_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega_2$$

$$\text{or } d\Omega_2 = -d\Omega_1$$

$$\Rightarrow d\Phi = d\Phi_2 + d\Phi_1 = 0 \Rightarrow \Phi = \iint d\Phi = 0$$

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \cdot \vec{dS} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

- Charge à l'intérieur de la surface



$$\begin{aligned}\Phi &= \iint d\Phi = \iint \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r d\vec{S} \\ &= \iint \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \\ &= \frac{Q}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

- Généralisation :

Le flux **sortant** du champ E créé par une charge

ponctuelle Q à travers une surface **fermée** contenant Q

est égal à Q/ϵ_0

b) Théorème de Gauss:

LE FLUX **SORTANT** DU CHAMP ELECTRIQUE D'UNE DISTRIBUTION DE CHARGES A TRAVERS UNE SURFACE **FERMEE** EST EGAL A LA SOMME DES CHARGES **INTERIEURES** DIVISEE PAR ϵ_0

$$\begin{aligned}\Phi &= \oiint d\Phi = \oiint \vec{E} d\vec{S} \\ &= \frac{\sum q_{interieures}}{\epsilon_0} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho(\vec{r}') d\tau \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \iint \sigma(\vec{r}') ds \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int \lambda(\vec{r}') dl\end{aligned}$$

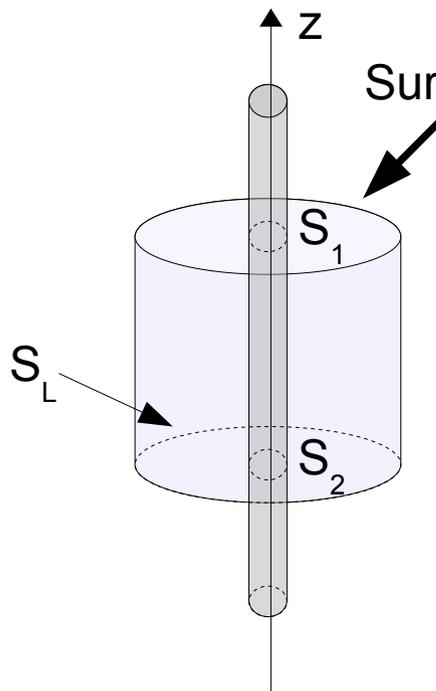
Attention : Dans la somme (distribution de charges ponctuelles) ou les integrales (distribution continue), on ne tient compte uniquement des charges contenues dans la surface de gauss

c) Application et exemples:

- 1) Symétries et invariances
- 2) Détermination de la surface de Gauss
- 3) Utilisation du théorème de Gauss

Exemple 1:

Fil rectiligne infini de rayon R uniformément chargé en volume:



La surface de Gauss est un cylindre fermé de rayon r , de hauteur h et d'axe Oz .

Le cylindre de Gauss est constitué d'une surface latérale cylindrique S_L et de deux bases (disques) S_1 et S_2 . Le fil et le cylindre de Gauss sont coaxiaux (axe Oz).

1. Symétries et invariances (figure 1):

Soit $M(r, \theta, z)$ un point quelconque de l'espace. Le plan Π_1 passant par M et l'axe Oz et le plan Π_2 passant par M et perpendiculaire à Oz sont plans de symétrie de la distribution de charges. Le champ $\vec{E}(M)$ appartient à l'intersection de ces deux plans. $\vec{E}(M)$ appartient à la droite passant par M et le projeté orthogonal de M sur l'axe Oz . De plus, la distribution de charges est invariante par rotation autour de l'axe Oz et par translation selon Oz . On en déduit:

$$\vec{E} = E_r(r)\vec{u}_r$$

2. Calcul du flux total Φ_T à travers le cylindre de Gauss de rayon r et de hauteur h :

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} d\Phi = \iint_{S_1} \vec{E} \vec{dS}_1 = \iint E_r(r)\vec{u}_r (dS\vec{u}_z) = 0 \quad (9)$$

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} d\Phi = \iint_{S_2} \vec{E} \vec{dS}_2 = \iint E_r(r)\vec{u}_r (-dS\vec{u}_z) = 0 \quad (10)$$

$$\Phi_L = \iint_{S_L} \vec{E} \vec{dS}_L = \int_0^{2\pi} \int_0^h E_r(r)\vec{u}_r (rd\theta dz\vec{u}_r) = 2\pi rh E_r(r) \quad (11)$$

$$\Phi_T = \Phi_L + \Phi_1 + \Phi_2 = 2\pi rh E_r(r). \quad (12)$$

3. Théorème de Gauss :

$$\Phi_T = 2\pi rh E_r(r) = \iiint \rho/\epsilon_0 d\tau$$

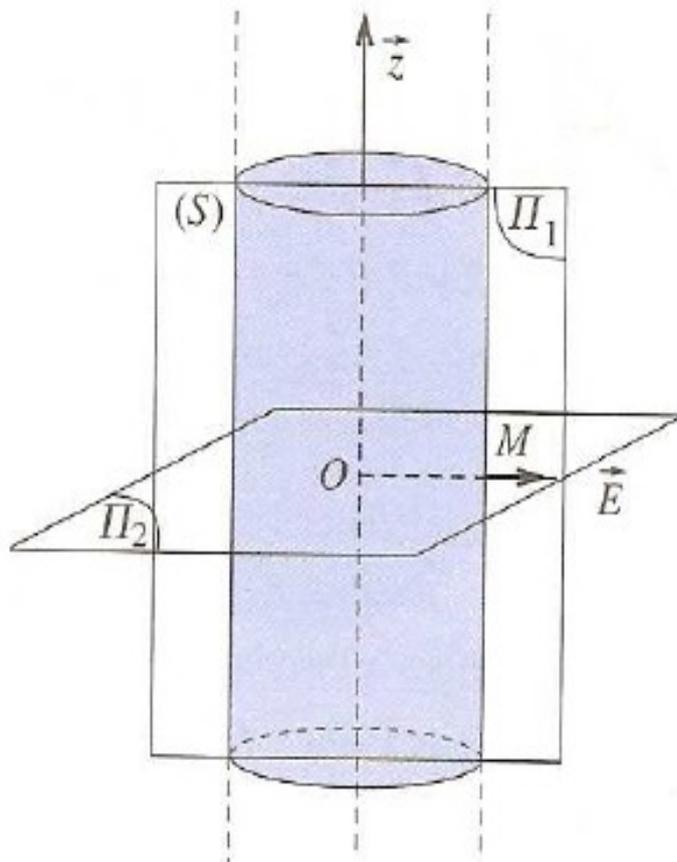


Figure 1: Champ \vec{E} créé par un cylindre infini uniformément chargé en volume

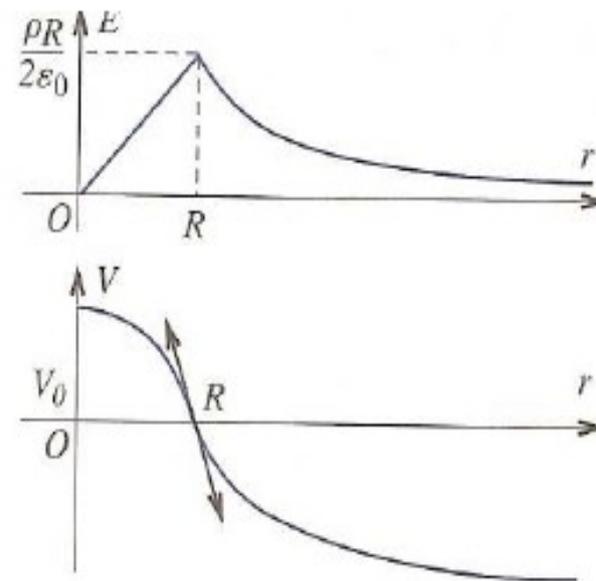


Figure 2: Champ \vec{E} et potentiel V créés par un cylindre infini uniformément chargé en volume

- $r < R$

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho/\varepsilon_0 d\tau = \frac{\rho\pi r^2 h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$
- $r > R$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho/\varepsilon_0 d\tau = \frac{\rho\pi R^2 h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

4. Calcul du potentiel $V(r)$: Le potentiel est continu en tout point. On ne peut poser $V(\infty) = 0$ car il y a des charges à l'infini. En posant $V(R) = 0$, on obtient:

- $r < R$

$$V(r) = \frac{\rho(R^2 - r^2)}{2\varepsilon_0}$$
- $r > R$

$$V(r) = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} \ln\left(\frac{R}{r}\right)$$

Le champ $E_r(r)$ et le potentiel $V(r)$ sont représentés sur la figure 2

Exemple 2 : plaque uniformément chargée

On cherche à calculer le champ électrostatique \vec{E} créé par une plaque infinie d'épaisseur e portant une densité volumique de charges ρ uniforme (figure 3). L'axe Oz est perpendiculaire à la plaque délimitée par les plans d'équation $z = e/2$ et $z = -e/2$. Nous étudions dans un premier temps les symétries et les invariances du champ afin de déterminer sa direction et les variables dont dépendent ses composantes.

1. Symétries et invariances (figure 3): Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de l'espace. Les plans Π_1 et Π_2 perpendiculaires à la plaque et passant par M sont plans de symétrie. Le champ \vec{E} au point M appartient donc à leur intersection, c'est à dire à la droite passant par M et parallèle à l'axe Oz . De plus, la distribution de charges ne dépend ni de x ni de y . On en déduit:

$$\vec{E} = E_z(z)\vec{u}_z$$

Par ailleurs, le plan xOy étant plan de symétrie, on a nécessairement $E_z(z) = -E_z(-z)$. En effet, les composantes du champ électrostatique en $M(x, y, z)$ et $M'(x, y, -z)$ perpendiculaires au plan xOy sont inversées. La composante $E_z(z)$ est donc impaire et $E_z(0) = 0$.

2. Choix de la surface de Gauss fermée et calcul du flux sortant total Φ_T :

La surface de Gauss choisie est un cylindre fermé d'axe parallèle à Oz . Les deux bases du cylindre S_1 et S_2 de surface S sont parallèles au plan xOy . Pour calculer le champ

\vec{E} , il faut placer S_1 en z et S_2 en 0 (car le champ est nul en $z = 0$) ou en $-z$ (car $E_z(z)$ est impaire). Nous plaçons S_2 en $-z$.

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} d\Phi = \iint_{S_1} \vec{E}(z) \vec{dS}_1 = \iint E_z(z) \vec{u}_z \cdot (dS \vec{u}_z) = S \cdot E_z(z)$$

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} d\Phi = \iint_{S_2} \vec{E}(-z) \vec{dS}_2 = \iint -E_z(z) \vec{u}_z \cdot (-dS \vec{u}_z) = S \cdot E_z(z)$$

$$\Phi_L = \iint_{S_L} \vec{E} \cdot \vec{dS}_L = 0$$

$\Phi_L = 0$ car \vec{dS}_L est perpendiculaire au vecteur \vec{E} . On en déduit:

$$\Phi_T = \Phi_L + \Phi_1 + \Phi_2 = 2SE_z(z)$$

3. Application du théorème de Gauss :

$$\Phi_T = 2SE_z(z) = \iiint \rho / \epsilon_0 d\tau$$

- $z < e/2$

$$2SE_z(z) = \frac{\rho S 2z}{\epsilon_0} \Rightarrow E_z(z) = \frac{\rho z}{\epsilon_0} \quad (**)$$

- $z > e/2$

$$2SE_z(z) = \frac{\rho S e}{\epsilon_0} \Rightarrow E_z(z) = \frac{\rho e}{2\epsilon_0}$$

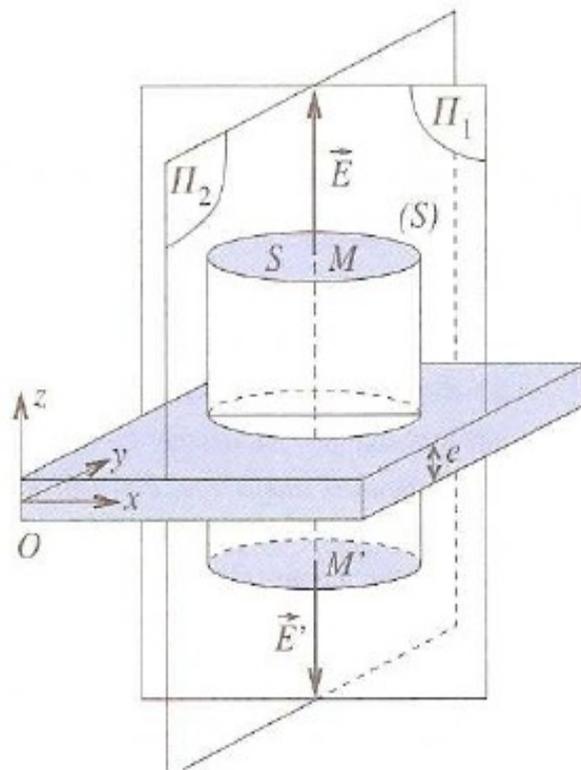


Figure 3: Champ \vec{E} créé par une plaque infinie uniformément chargée en volume

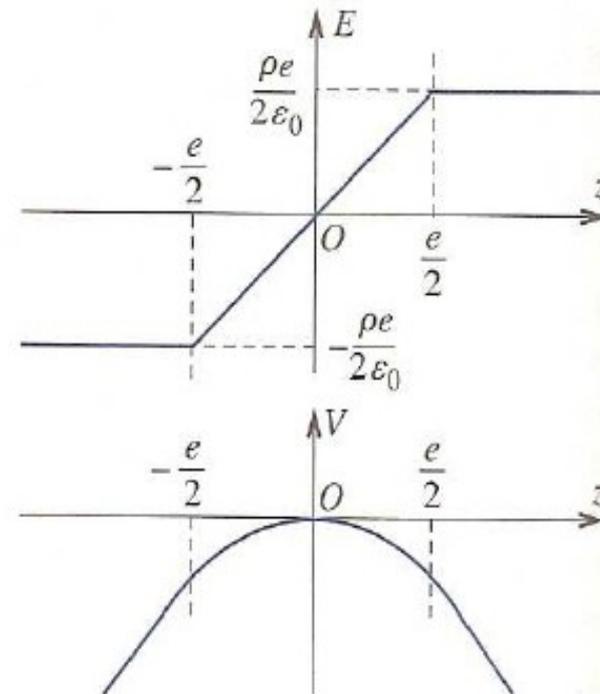
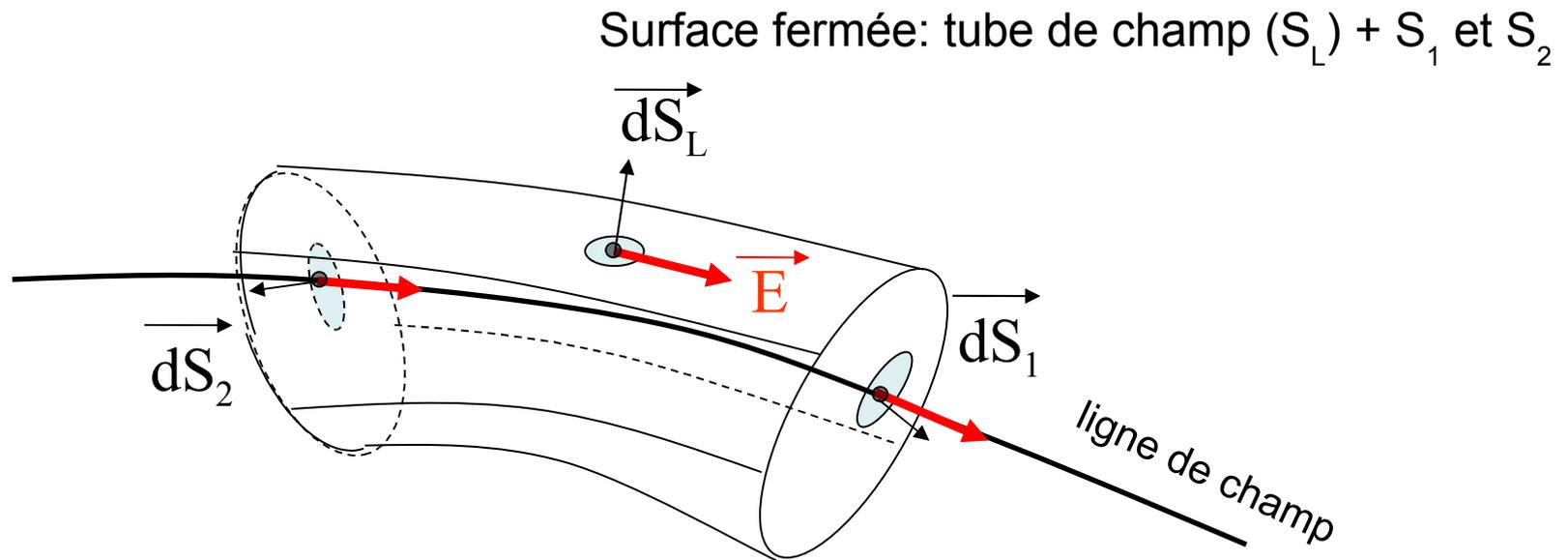


Figure 4: Champ \vec{E} et potentiel V créés par une plaque infinie uniformément chargée en volume

4) Caractère conservatif du flux du champ E :



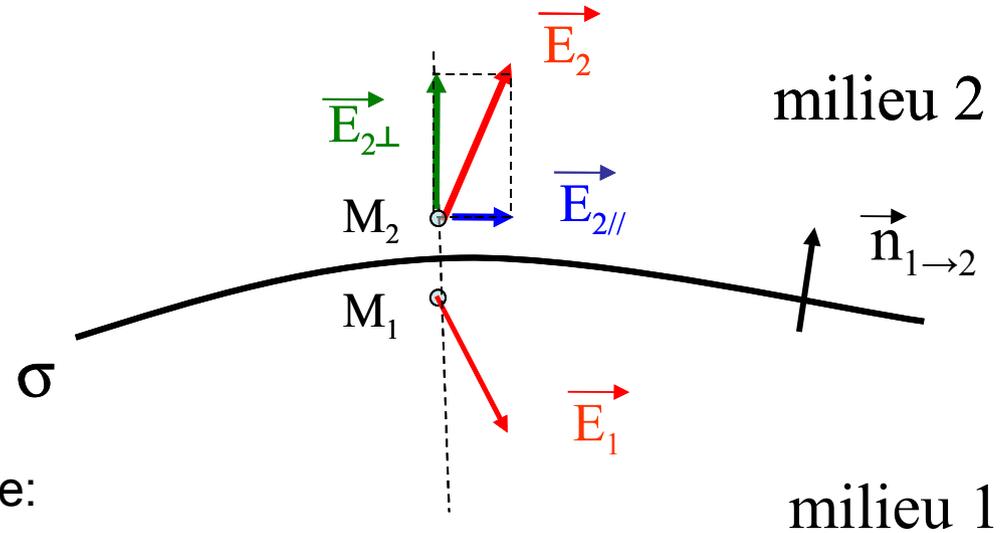
$$\Phi_{\text{sortant}} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_L = \sum q_{\text{intérieures}} / \epsilon_0 = 0$$

$$\Phi_L = \iint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S}_L = 0 \quad (\text{flux de } E \text{ à travers la surface latérale du tube})$$

$$\Phi_1 + \Phi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = -\iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2$$

En l'absence de charges, le flux du champ E est conservatif

5) Relations de continuité au passage d'une surface chargée:



- Composante parallèle ou tangentielle:

$$E_{2//} = E_{1//}$$

La composante parallèle de E est continue

- Composante perpendiculaire ou normale:

$$E_{2\perp} - E_{1\perp} = \sigma / \epsilon_0 \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2}$$

La composante perpendiculaire de E est discontinue

On admettra ces relations

Chapitre 4

Le potentiel électrostatique

Le champ électrostatique peut être caractérisé simplement à l'aide d'une fonction que nous appellerons potentiel électrostatique. Cette fonction scalaire est souvent plus simple à déterminer que le champ électrostatique. Elle est souvent utile à déterminer car elle permet de dériver l'expression mathématique du champ \vec{E} . Cette appellation sera justifiée par l'interprétation de cette fonction en terme d'énergie potentielle d'une charge soumise aux effets d'un champ électrostatique.

4.1 Circulation du champ d'une charge ponctuelle

4.1.1 Conservation de la circulation du champ

Le champ \vec{E} créé par une charge ponctuelle q placée au point O que nous prendrons pour origine, est en coordonnées sphériques : $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r^2}$. La circulation élémentaire $\vec{E} \cdot d\vec{r}$ associée à un déplacement élémentaire $d\vec{r}$ est :

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{r}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\left(-\frac{1}{r}\right) \quad (4.1)$$

avec $d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$. La circulation de A à B sur la courbe Γ ne passant pas par O s'écrit :

$$C_{AB(\Gamma)} = \int_{A(\Gamma)}^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Elle ne dépend pas du choix du chemin Γ suivi pour aller de A à B . La circulation du champ électrostatique pour aller d'un point A à un point B se conserve si on emprunte un autre chemin Γ' reliant ces deux points. On dit que la circulation du champ créé par une charge est **conservative** : $C_{AB}(\Gamma) = C_{AB}(\Gamma')$.

4.1.2 Champ de gradient et potentiel électrostatique d'une charge ponctuelle

Etant donné que pour une charge ponctuelle, la circulation élémentaire du champ électrique s'écrit : $\vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV(\vec{r})$, avec $V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + cte$, nous pouvons identifier le champ créé par la charge ponctuelle à un **champ de gradient**. En effet, la variation élémentaire de potentiel s'écrit (dans le système de coordonnées cartésiennes par exemple) : $dV(\vec{r}) = (\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz) = \vec{\nabla} V(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$. Par identification, on obtient :

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\overrightarrow{grad}V(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

avec

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + Cte$$

où $V(\vec{r})$ est le **potentiel électrostatique** créé par la charge q placée en O . Il est défini à une constante près. On en déduit que la circulation de A à B du champ \vec{E} créé par une charge ponctuelle q est égal à la différence de potentiel entre ces deux points :

$$C_{AB(\Gamma)} = \int_{A(\Gamma)}^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = V(A) - V(B) \quad (4.2)$$

4.2 Potentiel électrostatique d'une distribution de charges :

4.2.1 Circulation du champ d'une distribution

Le principe de superposition nous permet d'obtenir le champ créé par une distribution en effectuant l'addition des champs créés par chacune des parties élémentaires de la distribution. Par conséquent, la circulation du champ électrostatique d'un point A à un point B ne dépend pas du chemin Γ suivi entre A et B (fig.4.1). Cette propriété du champ électrostatique a pour corollaire :

La circulation du champ électrostatique créé par une distribution de charges est conservative. On en déduit que la circulation du champ électrostatique sur un contour (courbe fermée) est nulle (fig.4.2) :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (4.3)$$

Ce résultat est indépendant du contour choisi

CONSÉQUENCE : Une ligne de champ ne peut pas avoir la forme d'une boucle fermée sur elle même. En effet, la circulation du champ sur une telle boucle ne pourrait avoir

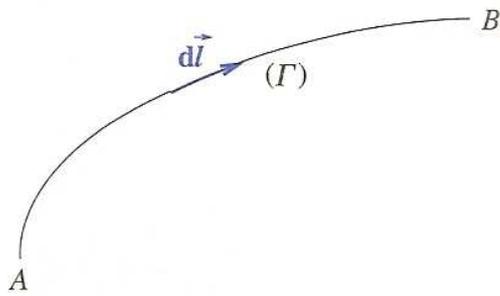


FIG. 4.1 – Circulation du champ \vec{E} sur une courbe Γ

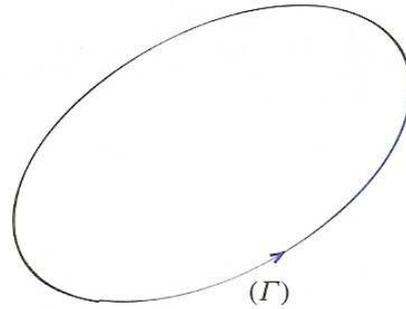


FIG. 4.2 – Circulation du hamp \vec{E} sur une courbe Γ fermée

qu'une valeur finie (sauf si le champ est nul sur toute la boucle ou non défini en certains points, ce qui interdirait de la définir comme étant une ligne de champ). Ce serait en contradiction avec la relation 4.3. Cette propriété est à retenir lors du tracé des lignes de champ.

La circulation d'un champ électrique quelconque étant conservative, nous pouvons définir la fonction $V(\vec{r})$ appelée **potentiel électrostatique** telle que

$$V(A) = V(B) + \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (4.4)$$

La fonction $V(\vec{r})$ est définie à une constante près. Le champ électrostatique créé par une distribution de charges quelconque est un champ de gradient dont l'expression en fonction du potentiel électrostatique est :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad} V(M) = -\vec{\nabla} V(M) \quad (4.5)$$

Nous savons que le rotationnel d'un champ de vecteurs dérivant d'une fonction scalaire est nul : $\overrightarrow{rot} \wedge \vec{\nabla}.f(\vec{r}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}.f(\vec{r}) = \vec{0}$ (exercice : démontrer cette relation dans le système de coordonnées cartésiennes). On en déduit :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad (4.6)$$

4.2.2 Expression du potentiel V créé par une distribution de charges.

L'opérateur gradient étant un opérateur linéaire, il est possible d'obtenir le potentiel électrostatique d'une distribution, par superposition des potentiels créés par les charges élémentaires de la distribution δq_p situées au point P : $\delta V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta q_p}{PM}$.

L'expression intégrale du potentiel, s'annulant à l'infini, créé par une distribution de charges \mathcal{D} d'extension finie est de la forme :

$$V(M) = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta q_p}{PM}$$

L'élément de charge dépend du type de distribution \mathcal{D} considérée. L'une des expressions suivantes donnant, à une constante près, le potentiel électrostatique sera utilisée :

- Ensemble de charges ponctuelles :

$$V(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 MP_i} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

- Distribution volumique de charges :

$$V(M) = \iiint_{\tau} \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{PM} d\tau$$

- Distribution surfacique de charges :

$$V(M) = \iint_S \frac{\sigma(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{PM} ds$$

- Distribution linéique de charges :

$$V(M) = \int_L \frac{\lambda(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{PM} dl$$

Le potentiel électrostatique $V(M) = V(\vec{r})$ est un scalaire qui dépend de la position du point M repéré par le vecteur \vec{r} . $V(M)$ est toujours défini à une constante près et s'exprime en volt (noté V). Le champ électrostatique \vec{E} s'exprime en V/m. Pour obtenir le champ électrostatique créé par une distribution de charges, il est préférable de calculer le potentiel électrostatique $V(\vec{r})$ lorsque cela est possible et de dériver en suite le champ électrostatique en utilisant la relation :

$$\vec{E}(M) = -\vec{\nabla} (V(M)) \quad (4.7)$$

Dans le cas de distributions d'extension infinies (plan, fil...), ces intégrales ne convergent pas nécessairement. On calculera alors le champ électrostatique en premier lieu, et ensuite le potentiel V . Un autre problème de convergence de l'intégrale apparaît si nous nous intéressons au calcul du potentiel en un point de la distribution, c'est à dire en un point tel que $PM=0$. Dans le cas d'une distribution volumique, l'intégrale converge s'il n'y a pas de charges à l'infini. Si la distribution de charges est de taille finie, on peut poser $V(\infty) = 0$ car il n'y a pas de charges à l'infini. Ceci permet d'annuler la constante d'intégration. En revanche, du fait de la présence de charges à l'infini, il n'est plus possible de poser $V(\infty) = 0$ si la distribution est de taille infinie.

Exemples de calcul de potentiel

– Distribution de taille finie : anneau uniformément chargé

On considère un anneau de rayon R de centre O et d'axe Oz portant une densité linéique de charge uniforme λ . On cherche à déterminer le potentiel $V(z)$ en tout point de l'axe Oz . Le potentiel élémentaire $dV(z)$ créé par une portion élémentaire $dl = R d\theta$ de l'anneau est : $dV(z) = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}}$. On en déduit le potentiel $V(z)$ en tout point de l'axe :

$$V(z) = \int_0^{2\pi} dV(z) + Cte = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} + Cte$$

Remarque : Il n'y a pas de charges à l'infini. On peut donc écrire $V(\infty) = 0$ et poser $Cte=0$.

EXERCICE : En déduire l'expression du champ électrique en tout point de l'axe Oz . Discuter la parité du champ et du potentiel. Pouvait-on prévoir ces parités en utilisant les propriétés de symétrie du champ électrique ? Représenter $E_z(z)$ et $V(z)$ en tout point de l'axe Oz .

– Distribution de taille infinie : fil rectiligne uniformément chargé

On considère un fil rectiligne infini porté par l'axe Oz . L'expression du potentiel élémentaire $dV(r)$ créé en un point $M(r, \theta, 0)$ par une portion dz entourant un point $P(0, 0, z)$ du fil est $dV(M) = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + r^2}}$. L'expression du potentiel $V(M)$ est donnée par :

$$V(M) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

Cette intégrale diverge de manière logarithmique. En revanche, il est possible d'obtenir l'expression de $V(r)$ à partir de celle du champ électrostatique $\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$.

En posant $\vec{E}(M) = -\vec{\nabla}(V(M)) = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r$, on en déduit $V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + Cte$. On ne peut annuler le potentiel à l'infini car il y a des charges à l'infini. On peut par exemple imposer $V(r_A) = 0$. On obtient alors

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_A}\right)$$

4.3 Topographie du potentiel électrostatique

4.3.1 Surfaces équipotentiels d'une distribution :

Une surface équipotentielle, de potentiel V_0 , est définie par l'équation $V(M) = V_0$. Deux surfaces équipotentiels correspondant à des potentiels distincts ne peuvent pas avoir d'intersection.

Exemples

- Charge ponctuelle : $V(r) = V_0 \Rightarrow r = cte$. Les surfaces équipotentiels sont des sphères ayant la charge pour centre.

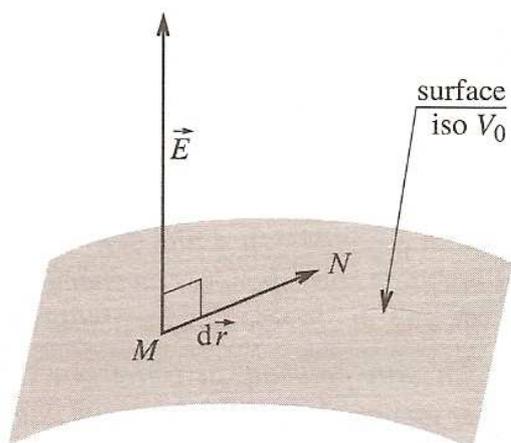


FIG. 4.3 – Surface équipotentielle V_0 et champ \vec{E} ($V(M) = V(N)$)

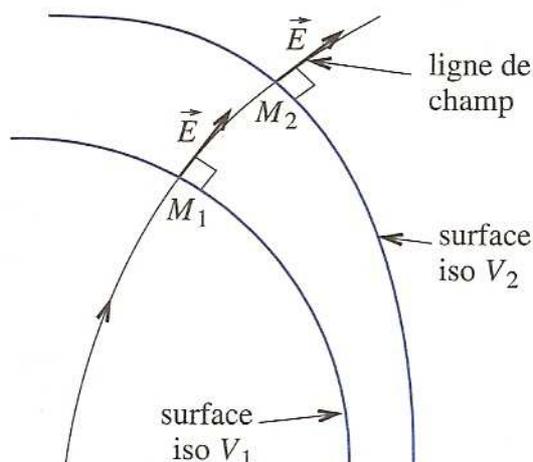


FIG. 4.4 – \vec{E} est orienté dans le sens des potentiels décroissants

- Fil rectiligne infini uniformément chargé : $V(r) = V_0 \Rightarrow r = cte$. Les surfaces équipotentielles sont des cylindres ayant pour axe le fil chargé.
- Exercice : Représenter le champ \vec{E} et les surfaces équipotentielles dans les deux cas précédents. Que peut-on remarquer ?

4.3.2 Surfaces équipotentielles et lignes de champ :

Considérons la surface équipotentielle (fig.4.3) de potentiel V_0 ; M et N sont deux points très proches de cette surface. N est obtenu à partir de M par un déplacement élémentaire \vec{dr} . Le vecteur \vec{dr} est contenu dans le plan tangent en M à la surface équipotentielle. Par définition du potentiel, $V(N) = V(M) - \vec{E} \cdot \vec{dr}$. La surface considérée étant une surface équipotentielle, on a $V(N) = V(M)$. On en déduit que $\vec{E} \cdot \vec{dr} = 0$ et que le champ électrostatique en M est normal à la surface équipotentielle. Plus généralement, une surface définie par $f(\vec{r}) = cte$ admet le vecteur $\vec{\nabla} f(\vec{r})$ comme vecteur normal.

Soit une ligne de champ traversant deux surfaces équipotentielles de potentiels V_1 et V_2 aux points M_1 et M_2 (fig.4.4). Supposons que le champ \vec{E} soit orienté de M_1 vers M_2 . La définition du potentiel nous permet d'écrire

$$V_2 - V_1 = V(M_2) - V(M_1) = \int_{M_1}^{M_2} -\vec{E} \cdot \vec{dr} < 0. \quad (4.8)$$

On a donc $V_2 < V_1$. Le champ est donc orienté du potentiel le plus élevé vers le potentiel le moins élevé.

Le champ électrostatique est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles et les lignes de champ sont orientées dans le sens des potentiels décroissants

REMARQUE : L'orthogonalité des lignes de champ aux surfaces équipotentielles est à retenir pour effectuer des tracés qualitatifs de lignes de champ et de coupes de surfaces équipotentielles sur une figure. Les équipotentielles des distributions de charges de la figure 2.5 sont représentées en pointillés. Il s'agit plus précisément de l'intersection des équipotentielles avec le plan de la feuille.

4.3.3 Invariances du potentiel V et symétrie du champ \vec{E}

Si la distribution de charges est invariante par une transformation (translation selon un axe ou rotation autour d'un point ou d'un axe), on peut alors affirmer que le potentiel V est invariant par les mêmes transformations. On obtient alors l'expression générale du champ \vec{E} en utilisant la relation 4.7. Voici quelques exemples concrets :

*** Distribution invariante par toute translation selon un axe** (ici l'axe Oz)

On considère la distribution de charges de la figure 2.12. Cette distribution étant invariante par translation selon Oz , le potentiel électrostatique $V(x, y)$ ne dépend pas de z . On obtient :

$$\vec{E}(x, y, z) = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \vec{e}_y + -\frac{\partial V(x, y)}{\partial z} \vec{e}_z = E_x(x, y) \vec{e}_x + E_y(x, y) \vec{e}_y \quad (4.9)$$

*** Distribution possédant la symétrie de révolution par rapport à l'axe Oz**

On considère la distribution de charges de la figure 2.13. Cette distribution étant invariante par rotation autour de l'axe Oz , le potentiel électrostatique $V(r, \theta)$ ne dépend pas de z . On obtient :

$$\vec{E}(r, \theta, z) = -\frac{\partial V(r, \theta)}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial z} \vec{e}_z = E_r(r, \theta) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta) \vec{e}_z \quad (4.10)$$

*** Distribution possédant la symétrie cylindrique d'axe Oz**

On considère la distribution de charges de la figure 2.14. Cette distribution étant invariante par translation selon Oz et rotation autour de l'axe Oz , le potentiel électrostatique $V(r)$ ne dépend pas ni de θ ni de z . On obtient :

$$\vec{E}(r, \theta, z) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V(r)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{\partial V(r)}{\partial z} \vec{e}_z = E_r(r) \vec{e}_r \quad (4.11)$$

*** Distribution possédant la symétrie sphérique de centre O**

On considère la distribution de charges de la figure 2.15. Cette distribution étant invariante par rotation autour de l'origine, le potentiel électrostatique $V(r)$ ne dépend ni des angles θ et φ . On obtient :

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V(r)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V(r)}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi = E_r(r) \vec{e}_r \quad (4.12)$$

On retrouve ainsi par le calcul les expressions générales du champ \vec{E} obtenues en utilisant les symétries et les invariances de chaque distribution de charges.

4.3.4 Autres propriétés du potentiel électrostatique

Nous énonçons ici quelques propriétés essentielles du potentiel électrostatique que nous admettrons.

- Le potentiel est **continu lorsqu’il est défini**.
- A la traversée d’une **surface chargée**, le champ subit une discontinuité alors que le **potentiel est continu**. Nous admettrons ce résultat général.

4.4 Energie Electrostatique

4.4.1 Travail de la force électrostatique et énergie potentielle d’interaction

Le travail de la force $\vec{f} = q\vec{E}$ exercée sur la charge lors d’un déplacement élémentaire \vec{dl} de celle-ci est :

$$\delta W = \vec{f} \cdot \vec{dl} = q\vec{E} \cdot \vec{dl} = -q\vec{\nabla}V \cdot \vec{dl} \quad (4.13)$$

Le travail de cette force correspondant à un déplacement de la charge q d’un point A à un point B est : $W_{A \rightarrow B} = -q(V_B - V_A)$. Ce travail ne dépend pas du chemin suivi et s’identifie à une fonction d’état qui ne dépend que de la position de la particule.

L’énergie potentielle d’interaction entre une charge q et un champ électrostatique \vec{E} créant le potentiel V est :

$$\mathcal{E}_p = qV$$

La force de Coulomb $\vec{f} = q\vec{E} = -\overrightarrow{grad} \cdot \mathcal{E}_p$ dérive de cette énergie potentielle. La force électrostatique est donc une force **conservative** puisque son travail ne dépend pas du chemin suivi.

4.4.2 Energie d’interaction de deux charges ponctuelles

L’énergie potentielle \mathcal{E}_p d’interaction électrostatique entre deux charges q_1 située en M_1 et q_2 située en M_2 est égale au travail fourni par un opérateur W_{op} pour former ce système. C’est le travail fourni par l’opérateur pour amener la charge q_2 de l’infini en M_2 ($M_1M_2 = r$). On rappelle que le travail fourni par l’opérateur est l’opposé du travail de la force électrostatique :

$$\mathcal{E}_p = W_{op} = W_{\infty \rightarrow M_2} = \int_{\infty}^{M_2} -q_2 \vec{f}_{q_1}(q_2) \cdot \vec{dr} = \int_{\infty}^{M_2} \frac{-q_2 q_1 \vec{dr} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{M_1 M_2} \quad (4.14)$$

L'énergie de constitution du système est égale au travail de constitution du système formé par les deux charges :

$$\mathcal{E}_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2} [q_1 \cdot V_2(M_1) + q_2 V_1(M_2)] \quad (4.15)$$

où $V_i(M_j)$ est le potentiel créé par la charge q_i au point M_j . Le facteur $\frac{1}{2}$ permet de ne pas comptabiliser 2 fois le travail de l'opérateur.

4.4.3 Généralisation

On cherche à déterminer l'énergie \mathcal{E} d'un système de N charges ponctuelles. Considérons un système de trois charges q_1, q_2 et q_3 . Pour déterminer l'énergie de ce système, on ajoute à celle du système de deux charges le travail fourni par l'opérateur pour amener la charge q_3 de l'infini en M_3 . Ce travail est $W_{op}(q_3) = q_3 [V_2(M_3) + V_1(M_3)]$. En ajoutant cette contribution à l'expression 4.15, on obtient :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} [q_1 (V_2(M_1) + V_3(M_1)) + q_2 (V_1(M_2) + V_3(M_2)) + q_3 (V_1(M_3) + V_2(M_3))] \quad (4.16)$$

Le facteur $\frac{1}{2}$ permet de ne pas prendre en compte 2 fois le travail de l'opérateur pour chaque couple de charge. En notant $V(M_i)$ le potentiel créé par les autres charges au point M_i occupé par la charge q_i , on obtient :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 q_i V(M_i)$$

Cette expression peut être généralisée à un ensemble de N charges ponctuelles en interaction :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(M_i) \quad (4.17)$$

Nous pouvons à présent généraliser cette expression à des distributions de charges volumiques ou surfaciques.

- distribution de charges volumique caractérisée par une densité volumique de charges $\rho(\vec{r})$:

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) d\tau \quad (4.18)$$

- distribution de charges surfacique caractérisée par une densité surfacique de charges $\sigma(\vec{r})$:

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \iint_S \sigma(\vec{r}) V(\vec{r}) dS \quad (4.19)$$

4.4.4 Application : le condensateur plan

On considère le condensateur plan de la figure 4.5 formé de deux armatures planes conductrices parallèles et espacées d'une distance e . L'armature reliée au potentiel V_0 est située en $z = 0$ et celle reliée au potentiel V_e est située en $z = e$.

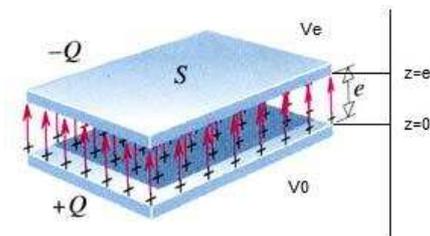


FIG. 4.5 – Condensateur plan.

Détermination de la capacité C du condensateur :

La circulation \mathcal{C} du champ $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \vec{e}_z$ entre l'armature située en $z = 0$ et $z = e$ est :

$$\mathcal{C}_{z=0 \rightarrow z=e} = \int_{z=0}^{z=e} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{z=0}^{z=e} \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \vec{e}_z \cdot dz \vec{e}_z = \frac{Qe}{\varepsilon_0 S}$$

En appliquant la relation 4.4, on obtient $V(e) - V(0) = \frac{Qe}{\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{C}$. On en déduit la capacité du condensateur $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$.

Énergie emmagasinée par le condensateur :

Pour déterminer l'énergie stockée par le condensateur, il suffit d'additionner l'énergie emmagasinée chaque armature. En $z = 0$, $\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} \iint_S \sigma V_0 = \frac{1}{2} Q V_0$. En $z = e$, on a $\mathcal{E}_e = -\frac{1}{2} Q V_e$. On en déduit :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_e = \frac{1}{2} Q (V_0 - V_e) = \frac{1}{2} C (V_0 - V_e)^2$$

On obtient ainsi l'expression de l'énergie d'un condensateur en fonction de sa capacité et de la différence de potentiel appliquée aux bornes. Cette expression est générale et ne dépend pas de la forme du condensateur.

Chapitre 5

Le dipôle électrostatique

Un grand nombre de molécules neutres créent un champ électrique. Ceci est dû au fait qu'au sein de la molécule, le barycentre des charges négatives et positives ne coïncident pas. Ces molécules neutres sont dites "polaires" dans le sens où elles ont un pôle chargé positivement et un pôle chargé négativement. Elles constituent un dipôle électrostatique. Une telle distribution de charges peut être permanente ou provoquée par un champ électrique extérieur. Au cours de ce chapitre, nous allons étudier le potentiel et le champ créés par un dipôle, puis nous nous intéresserons aux effets d'un champ électrique sur un dipôle.

5.1 Moment dipolaire

5.1.1 Définition

Considérons une distribution de charges constituée de charges positives dont la somme est notée $+q$ et de charges négatives dont la somme est notée $-q$. $N(P)$ est le barycentre des charges négatives (positives). Le moment dipolaire de la distribution est :

$$\vec{p} = q \overrightarrow{NP}$$

il s'évalue en coulomb.mètre (C.m). Lorsque \vec{p} est non nul, la distribution de charges est **polarisée**. Le modèle le plus simple de dipôle est un doublet de charges ponctuelles opposées et séparées par une distance notée d (figure 5.1)

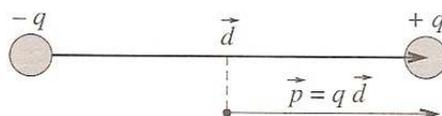


FIG. 5.1 – doublet électrostatique

Un objet électriquement neutre, mais polarisé, crée à grande distance un potentiel et un champ analogues (en première approximation) à ceux d'un doublet de charges ponctuelles de **moment dipolaire** \vec{p} .

$$\vec{p} = q\vec{d} \quad \text{et} \quad \vec{d} = \overrightarrow{NP}$$

5.1.2 Objets polaires

Un grand nombre de molécules portent un moment dipolaire permanent et/ou induit. Ces molécules polarisées ne sont pas les seuls objets pouvant porter un moment dipolaire. Des objets de plus grande taille allant du nanomètre à plusieurs millimètres peuvent également être polarisés sous l'effet d'un champ électrostatique.

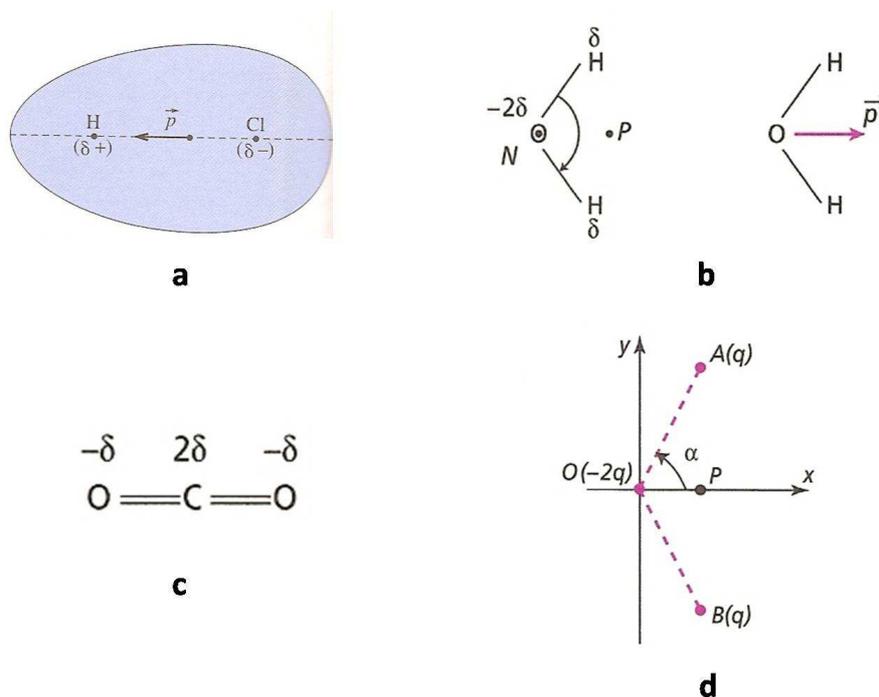


FIG. 5.2 – (a) molécule d'HCl , (b) molécule d'eau et son moment dipolaire , (c) molécule de CO₂, (d) modèle géométrique de la molécule d'eau

Molécules polaires, moment dipolaire permanent

Beaucoup de molécules présentent une séparation de charge. La molécule d'HCl possède une liaison polaire. Son nuage électronique est asymétrique, les électrons se trouvant préférentiellement près de l'atome de chlore (fig 5.2.1-a). La molécule d'eau H₂O , de forme triangulaire possède également un moment dipolaire (fig 5.2.1-b). Sa polarisation résulte de la polarité de la liaison OH. La molécule de CO₂ dont le barycentre des charges négatives et celui des charges positives coïncident a un moment dipolaire nul (fig 5.2.1-c). On peut facilement calculer le moment dipolaire d'une molécule en tenant compte de sa

géométrie. Sur la figure 5.2.1-d, le moment dipolaire de l'édifice modélisant la molécule d'eau est $\vec{p} = 2q\overrightarrow{OP} = qa\vec{u}_x$ (OA=OB=a , $\alpha = 60^\circ$).

Moment dipolaire induit

Un atome ou une molécule peuvent être polarisés par l'application d'un champ électrostatique \vec{E} . Sous l'action de ce champ, les électrons et les protons sont déplacés en sens opposé. Les nuages électroniques sont déformés et les longueurs et angles entre liaisons chimiques peuvent être modifiés. Ces changements, généralement faibles, correspondent à une modification du moment dipolaire. Les atomes ou molécules sont dits "polarisables". Le moment dipolaire est alors proportionnel au champ appliqué \vec{E} :

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}$$

Le facteur α est la **polarisabilité** de la molécule ou de l'atome. Il est homogène à un volume.

REMARQUE : Les atomes, les ions, les molécules et plus généralement les milieux matériels sont susceptibles d'être polarisés par un champ appliqué. On parle de **polarisation induite**. De nombreux phénomènes liés à la polarisation induite peuvent être facilement observés dans la matière. Un petit morceau de papier est attiré par une règle en plastique chargée par frottement : le champ électrostatique de la règle polarise le morceau de papier qui ensuite se déplace vers les hauts champs (voir section 5.4).

Unité de moment dipolaire en chimie

Les atomes ou molécules ont des charges de l'ordre de 10^{-19}C et des dimensions de l'ordre de 10^{-10}m . Une unité de moment dipolaire adaptée aux physiciens et chimistes doit être de l'ordre de $p = ql = 10^{-29}\text{C.m}$. C'est pourquoi les chimistes utilisent couramment le **debye** (symbole : D), bien que cette unité fasse partie d'un ancien système d'unités. On a $1\text{D} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-29} \text{C.m}$.

H ₂ O	NH ₃	HCl	CO ₂
1.85 D	1.47 D	1.08 D	0 D

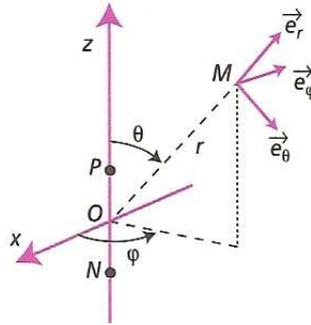
TAB. 5.1 – Moments de molécules dipolaires

5.2 Potentiel et champ créés par un dipôle

Le potentiel et le champ créés par un dipôle peuvent être calculés de manière exacte en tout point $M(r, \theta, \varphi)$. Néanmoins, l'expression exacte du champ \vec{E} et du potentiel V est complexe. Afin d'obtenir une expression plus simple, nous sommes amenés à effectuer des approximations.

5.2.1 Potentiel créé par un dipôle, approximation dipolaire

Expression générale du potentiel V



On considère un dipôle de moment dipolaire $\vec{p} = q\overrightarrow{NP} = qd\vec{u}_z$. Le potentiel créé par le dipôle en tout point de l'espace s'écrit :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM} \right) \quad (5.1)$$

En posant $PO = d/2$ et $OM = r$, on obtient $PM = \|\vec{PO} + \vec{OM}\| = \sqrt{(\vec{PO} + \vec{OM})^2}$ ou encore $PM = \sqrt{PO^2 + OM^2 - 2PO \cdot OM \cos \theta}$. Il s'ensuit :

$$PM = \sqrt{r^2 + d^2/4 - d r \cos \theta} = r \sqrt{1 + d^2/4r^2 - d/r \cos \theta}$$

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r \sqrt{1 + d^2/4r^2 - d/r \cos \theta}} \quad (5.2)$$

De même, on montre que $NM = \sqrt{r^2 + d^2/4 + d r \cos \theta} = r \sqrt{1 + d^2/4r^2 + d/r \cos \theta}$, soit :

$$\frac{1}{NM} = \frac{1}{r \sqrt{1 + d^2/4r^2 + d/r \cos \theta}} \quad (5.3)$$

Approximation dipolaire

Loin du dipôle, on peut obtenir une expression approchée du potentiel électrostatique $V(r, \theta)$ en posant $r \gg d$. Ceci permet d'écrire $1 \gg \frac{d}{r} \gg \frac{d^2}{r^2}$ et d'effectuer un développement limité pour le calcul du potentiel. On pose les approximations suivantes :

$$\frac{1}{NM} \simeq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta + \dots \right) \text{ et } \frac{1}{PM} \simeq \frac{1}{r} \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta + \dots \right)$$

Finalement, on obtient :

$$V(r, \theta) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} + \dots \quad (5.4)$$

L'expression du potentiel électrostatique créé par un dipôle \vec{p} à grande distance s'écrit :

$$V(r, \theta) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (5.5)$$

Cette expression n'est valable qu'à grande distance du dipôle, c'est à dire pour $r \gg d$. On remarque que le potentiel décroît comme $1/r^2$, et non comme $1/r$. La portée du potentiel du dipôle est donc moindre que celle d'une charge ponctuelle.

REMARQUE : Notons que pour ce modèle de dipôle, le second terme non nul est proportionnel à $1/r^4$. Certaines molécules telles que la molécule de CO_2 ne possédant pas de moment dipolaire créent un potentiel $V(r) \propto 1/r^3$ loin de la molécule. Dans ce cas, l'expression approchée du potentiel $V(r)$ s'obtient en effectuant un développement à l'ordre deux. Le champ électrostatique décroît alors comme $1/r^4$.

5.2.2 Champ du dipôle

Symétries et invariances

Tout plan contenant le dipôle \vec{p} (c'est à dire l'axe Oz) est plan de symétrie de la distribution de charge. En tout point $M(r, \theta, \varphi)$, le champ \vec{E} appartient au plan passant par M et contenant l'axe Oz. La composante selon \vec{u}_φ du champ électrostatique est donc nulle. De plus, la distribution est invariante par rotation selon φ . Les composantes du champ ne dépendent donc pas de φ . On peut donc écrire :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta)\vec{u}_r + E_\theta(r, \theta)\vec{u}_\theta$$

Du fait des invariances de la distribution de charges, le potentiel V ne dépend pas de φ . On peut écrire $V = V(r, \theta)$. On aurait pu trouver directement l'expression du champ \vec{E} en appliquant la relation $\vec{E} = -\vec{\nabla} V(r, \theta)$. Les lignes de champ sont donc des courbes planes tracées dans les plans contenant l'axe Oz.

Le plan (xOy) est plan de symétrie-inversion de la distribution de charges. Ce plan, correspondant à $V = 0$, est une équipotentielle. Le champ électrostatique est perpendiculaire au plan (xOy) en tout point de ce plan. En tout point $M(r, \pi/2, \varphi)$ du plan (xOy), le champ s'écrit $\vec{E} = E_\theta(r)\vec{u}_\theta$.

Champ électrostatique \vec{E} créé par le dipôle

L'expression exacte du champ électrostatique \vec{E} créé par le dipôle en tout point de l'espace est donnée par $\vec{E} = -\vec{\nabla} V(r, \theta)$. Dans cette expression, le potentiel électrostatique $V(r, \theta)$ est donné par les relations 5.1, 5.2 et 5.4. L'expression finale du champ \vec{E} est complexe, mais loin du dipôle, il est possible d'obtenir une expression approchée plus simple du champ électrique. Pour $r \gg d$, l'expression du potentiel V est donnée par la relation 5.5. L'expression du champ électrostatique \vec{E} loin du dipôle est :

$$E_r = -\frac{\partial V(r, \theta)}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3} \quad (5.6)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \quad (5.7)$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial \varphi} = 0 \quad (5.8)$$

Finalement, loin du dipôle, le champ électrostatique s'écrit :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta \vec{e}_r + p \sin \theta \vec{e}_\theta}{r^3} \quad (5.9)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{p}}{r^3} \right) \quad (5.10)$$

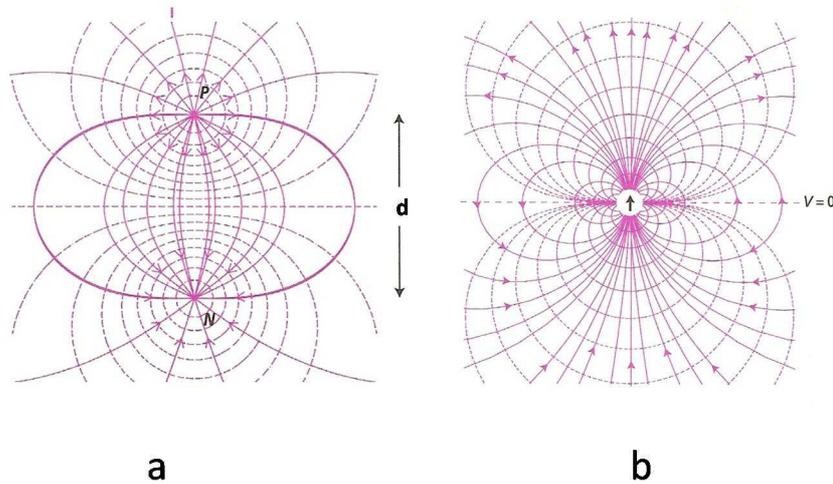


FIG. 5.3 – (a) Lignes de champ et surfaces équipotentielles au voisinage du doublet obtenues grâce aux expressions exactes du champ et du potentiel. (b) Lignes de champ et surfaces équipotentielles loin du dipôle obtenues dans le cadre de l'approximation dipolaire. L'intersection des surfaces équipotentielles avec le plan de la feuille sont en pointillés(....). Les lignes de champ sont en trait plein(—).

L'équation 5.10 montre que le champ du dipôle décroît en $1/r^3$, plus vite que le champ d'une charge ponctuelle (en $1/r^2$). La seule caractéristique du dipôle qui apparaît dans l'expression de \vec{E} et V est son moment dipolaire \vec{p} . Le moment dipolaire \vec{p} caractérise donc complètement le dipôle. Les lignes de champ et les surfaces équipotentielles sont représentées sur la figure 5.3. Sur la figure 5.3-a sont représentées les lignes de champ et les équipotentielles au voisinage du doublet calculées de manière exacte. La figure 5.3-b montre les lignes de champ et surfaces équipotentielles du dipôle dans le cadre de l'approximation dipolaire. Elles sont très différentes au voisinage du doublet, mais convergent lorsque $r \gg d$.

5.3 Comportement d'un dipôle placé dans un champ électrique

Dans le domaine de la physique de la matière condensée (liquide ou solide) ou des gaz, il existe de nombreuses situations pour lesquelles un dipôle subit l'action d'un champ électrique. Celui-ci peut être un champ macroscopique extérieur ou provenir des ions, atomes ou molécules environnantes. Un exemple particulier est celui de l'interaction électrostatique entre molécules possédant un moment dipolaire permanent ou induit. Ces interactions, plus faibles que l'interaction électrostatique entre charges, sont souvent à l'origine de la cohésion de nombreux matériaux "fragiles". L'ensemble de ces forces entre dipôles est connu sous le nom de **forces de Van der Waals**. Dans ce qui suit, nous considérerons uniquement un dipôle rigide dont le module du moment dipolaire $||\vec{p}||$ ne dépend pas du champ électrostatique \vec{E} .

5.3.1 Action d'un champ électrique sur un dipôle

Un dipôle de moment dipolaire \vec{p} placé dans un champ électrique subit une force qui est la résultante des forces exercées sur chaque charge. On distingue deux cas :

Champ électrique uniforme

Si le champ électrique \vec{E} est uniforme, la somme des forces exercées $\vec{F} = q\vec{E}_P - q\vec{E}_N$ est nulle. Le dipôle ne se déplace donc pas. Dans un champ uniforme, on a :

$$\vec{F} = \vec{0}$$

Par contre, comme le montre la figure 5.4-a, le dipôle est soumis à l'action d'un couple qui tend à l'aligner avec champ \vec{E} . On peut calculer le moment des forces $\vec{\Gamma}_O$ par rapport au point O, centre du dipôle de longueur d :

$$\vec{\Gamma}_O = \overrightarrow{OP} \wedge q\vec{E} - \overrightarrow{ON} \wedge q\vec{E} = q\overrightarrow{NP} \wedge \vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E} \quad (5.11)$$

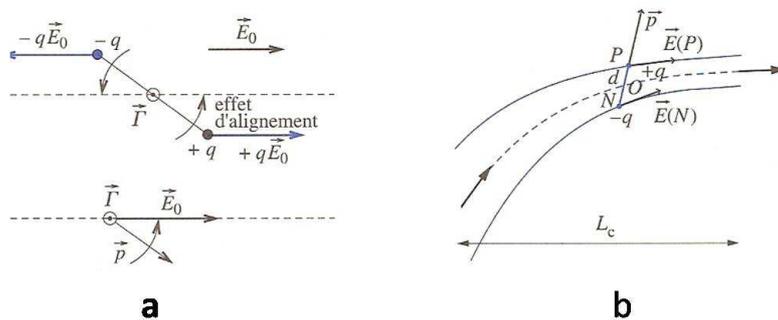


FIG. 5.4 – (a) Couple exercé par un champ uniforme sur un dipôle (b) Force exercée par un champ non uniforme sur un dipôle

On pose $\theta = \widehat{\vec{p} \vec{E}}$ et $||\vec{\Gamma}_O|| = \Gamma_O = qd \sin \theta$. $\Gamma_O = 0$ si $\theta = 0$ ou π . Il s'agit des deux positions d'équilibre de notre système pour lesquelles \vec{p} et \vec{E} sont alignés. Pour $\theta = 0$, on a une position d'équilibre stable. Le dipôle \vec{p} et le champ \vec{E} pointent dans le même sens et si \vec{p} est écarté de sa position d'équilibre, il y retourne. Pour $\theta = \pi$, on a une position d'équilibre instable. Le dipôle \vec{p} et le champ \vec{E} ont des sens opposés et si \vec{p} est écarté de sa position d'équilibre, il pivote de π pour se retrouver dans la position d'équilibre stable.

Champ quelconque

Dans la situation où le champ électrique \vec{E} n'est pas uniforme à l'endroit du dipôle, les charges $+q$ et $-q$ sont soumises à un champ électrique différent. Le dipôle subit toujours un couple qui l'aligne selon la ligne de champ. La résultante des forces n'étant pas nulle, le dipôle se déplace ensuite le long de la ligne de champ. Il se déplace vers les champs forts.

Si la longueur caractéristique L_c de variation du champ \vec{E} est très grande devant d (voir figure 5.4-b), on peut alors considérer que le champ à l'endroit du dipôle est uniforme pour le calcul du moment des forces $\vec{\Gamma}_O$. Ceci est en pratique toujours le cas avec des molécules. L'expression du couple donnée par la relation 5.11 reste alors une excellente approximation.

En revanche, quelle que soit la dimension du dipôle et la longueur caractéristique L_c , la force totale subie par le dipôle n'est plus nulle puisque les deux charges voient un champ \vec{E} différent. En prenant l'origine O au centre du dipôle, on a $\vec{ON} = x_N \vec{u}_x + y_N \vec{u}_y + z_N \vec{u}_z$ et $\vec{OP} = x_P \vec{u}_x + y_P \vec{u}_y + z_P \vec{u}_z$. Nous pouvons alors écrire :

$$E_x(N) = E_x(O) + \frac{\partial E_x}{\partial x} x_N + \frac{\partial E_x}{\partial y} y_N + \frac{\partial E_x}{\partial z} z_N \quad (5.12)$$

$$E_y(N) = E_y(O) + \frac{\partial E_y}{\partial x} x_N + \frac{\partial E_y}{\partial y} y_N + \frac{\partial E_y}{\partial z} z_N \quad (5.13)$$

$$E_z(N) = E_z(O) + \frac{\partial E_z}{\partial x} x_N + \frac{\partial E_z}{\partial y} y_N + \frac{\partial E_z}{\partial z} z_N \quad (5.14)$$

$$E_x(P) = E_x(O) + \frac{\partial E_x}{\partial x} x_P + \frac{\partial E_x}{\partial y} y_P + \frac{\partial E_x}{\partial z} z_P \quad (5.15)$$

$$E_y(P) = E_y(O) + \frac{\partial E_y}{\partial x} x_P + \frac{\partial E_y}{\partial y} y_P + \frac{\partial E_y}{\partial z} z_P \quad (5.16)$$

$$E_z(P) = E_z(O) + \frac{\partial E_z}{\partial x} x_P + \frac{\partial E_z}{\partial y} y_P + \frac{\partial E_z}{\partial z} z_P \quad (5.17)$$

On en déduit :

$$F_x = \frac{\partial E_x}{\partial x}(x_P - x_N) + \frac{\partial E_x}{\partial y}(y_P - y_N) + \frac{\partial E_x}{\partial z}(z_P - z_N) \quad (5.18)$$

$$F_y = \frac{\partial E_y}{\partial x}(x_P - x_N) + \frac{\partial E_y}{\partial y}(y_P - y_N) + \frac{\partial E_y}{\partial z}(z_P - z_N) \quad (5.19)$$

$$F_z = \frac{\partial E_z}{\partial x}(x_P - x_N) + \frac{\partial E_z}{\partial y}(y_P - y_N) + \frac{\partial E_z}{\partial z}(z_P - z_N) \quad (5.20)$$

finalement :

$$F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (5.21)$$

$$F_y = p_x \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (5.22)$$

$$F_z = p_x \frac{\partial E_z}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_z}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (5.23)$$

L'ensemble de ces trois dernières équations peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \quad (5.24)$$

Supposons que le champ électrostatique s'écrive sous la forme $\vec{E} = E_0 x \vec{u}_x$. Le dipôle situé en un point d'abscisse $x > 0$ s'aligne suivant Ox.

- Si $\mathbf{E}_0 > \mathbf{0}$, \vec{p} pointe vers les $x > 0$, $\vec{p} = qd\vec{u}_x$. La force subie par le dipôle est d'après l'expression 5.24 : $\vec{F} = qdE_0\vec{u}_x$. \vec{F} est orientée vers les x positifs, c'est à dire vers les champs forts ($\|\vec{E}\|$ fort).
- Si $\mathbf{E}_0 < \mathbf{0}$, \vec{p} pointe vers les $x < 0$, $\vec{p} = -qd\vec{u}_x$. La force subie par le dipôle est d'après l'expression 5.24 : $\vec{F} = -qdE_0\vec{u}_x$. \vec{F} est orientée vers les x positifs, c'est à dire vers les champs forts.

On remarque que le module de la force est proportionnel au gradient de champ vu par le dipôle, à la charge q et à la taille d du dipôle. Cet effet peut être facilement mis en évidence en rapprochant une règle en plastique chargée (électrisée par frottement) d'un mince filet d'eau. Les molécules d'eau, polaires, sont attirées par la règle chargée. Celles-ci s'orientent en moyenne et migrent vers les champs forts comme le montre la figure 5.5-a. Le même phénomène est observé avec des petits morceaux de papier. Sous l'effet du champ électrostatique, ceux-ci se polarisent (apparition d'un moment dipolaire induit) et sont ensuite attirés vers la règle.

Les grains de semoule se polarisent également sous l'effet d'un champ électrique. Placés à la surface d'un liquide et dans un champ uniforme créé par un condensateur (figure 5.5-b), ils s'orientent dans le sens du champ, puis s'attirent mutuellement pour s'aligner le long des lignes de champ (voir figure 3.3).

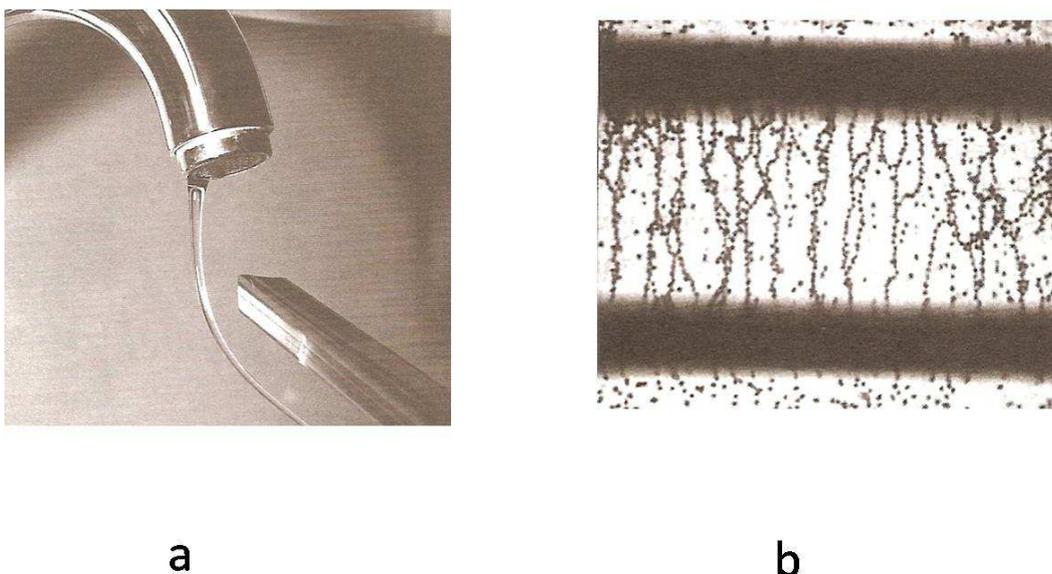


FIG. 5.5 – (a) filet d'eau dévié par un bâton électrisé (b) Grains de semoule à la surface d'un liquide et s'alignant sous l'effet d'un champ uniforme.

5.3.2 Énergie du dipôle placé dans un champ électrique

L'énergie \mathcal{E} d'un dipôle \vec{p} , de centre $O(0, 0, 0)$, placé dans un champ \vec{E} s'écrit :

$$\mathcal{E} = qV(P) - qV(N) = q(V(P) - V(N))$$

Sachant que

$$V(P) = V(O) + \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} \Big|_O x_p + \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} \Big|_O y_p + \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} \Big|_O z_p \quad (5.25)$$

$$= V(O) + \vec{\nabla}V|_O \cdot \vec{OP} \quad (5.26)$$

et que, de même, $V(N) = \vec{\nabla}V|_O \cdot \vec{ON}$. On en déduit :

$$\mathcal{E} = q(V(P) - V(N)) \quad (5.27)$$

$$= q(\vec{\nabla}V|_O \cdot \vec{OP} - \vec{\nabla}V|_O \cdot \vec{ON}) \quad (5.28)$$

$$= q\vec{\nabla}V|_O \cdot \vec{NP} \quad (5.29)$$

$$= -\vec{p} \cdot \vec{E}(O) \quad (5.30)$$

Finalement, l'énergie \mathcal{E} d'un dipôle placé dans un champ \vec{E} s'écrit :

$$\mathcal{E} = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (5.31)$$

5.3. COMPORTEMENT D'UN DIPÔLE PLACÉ DANS UN CHAMP ÉLECTRIQUE 47

L'expression de l'énergie potentielle électrostatique \mathcal{E} d'un dipôle rigide dans un champ \vec{E} intervient souvent dans de nombreux domaines de la physique. Elle permet notamment de prédire l'évolution d'un dipôle placé dans un champ électrostatique. L'énergie du dipôle s'écrit $\mathcal{E} = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos \theta$ avec $\theta = \widehat{\vec{p}, \vec{E}}$. Il y a donc deux positions d'équilibre correspondant à deux extrémums de l'énergie. $\theta = \mathbf{0}$ correspond à un minimum d'énergie et donc à un **équilibre stable**, alors que $\theta = \pi$ correspond à un maximum d'énergie et donc à un **équilibre instable**. Une fois dans sa position d'équilibre stable (\vec{p} et \vec{E} parallèles et orientés dans le même sens), le dipôle se déplace vers les champs forts pour diminuer son énergie.