Polytech Paris-Sud PeiP 2

Mémo des formules et outils mathématiques

Les vecteurs

On note f(x,y,z) une fonction quelconque dépendant de x,y,z.

On note deux vecteurs $\vec{U} = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix}$ et $\vec{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}$ dans un repère cartésien orthonormé (Oxyz).

Leurs coordonnées peuvent dépendre de x,y,z. Ainsi, U_x peut dépendre de x, mais aussi de y ou z. Par exemple si $U_x=\cos(x+y+z-\omega t)$

Produit scalaire	$\vec{U}\cdot\vec{V} = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = U_xV_x + U_yV_y + U_zV_z$	Le produit scalaire est un nombre. Il est égal à : $\vec{U}.\vec{V} = \lVert\vec{U}\rVert.\lVert\vec{V}\rVert\cos(\vec{U},\vec{V})$
Produit vectoriel	$\vec{U}\wedge\vec{V} = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_yV_z - U_zV_y \\ U_zV_x - U_xV_z \\ U_xV_y - U_yV_x \end{bmatrix}$	Le produit vectoriel est un vecteur. Il est perpendiculaire à $\vec{U}$ et $\vec{V}$. Sa norme vaut : $\lVert\vec{U}\wedge\vec{V}\rVert = \lVert\vec{U}\rVert.\lVert\vec{V}\rVert.\lvert\sin(\vec{U},\vec{V})\rvert$
Gradient	$\overrightarrow{grad}(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$	Le gradient s'applique à un nombre, et c'est un vecteur
Divergence	$div\left(\vec{U}(x,y,z)\right) = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$	Le divergent s'applique à un vecteur, et c'est un nombre
Rotationnel	$\overrightarrow{rot}\left(\vec{U}\right) = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \\ \frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \\ \frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \end{bmatrix}$	Le rotationnel s'applique à un vecteur, et c'est un vecteur
Laplacien	$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ $\Delta\left(\vec{U}\right) = \begin{bmatrix} \Delta(U_x) \\ \Delta(U_y) \\ \Delta(U_z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}$	Le Laplacien peut s'appliquer à un nombre comme à un vecteur. Le Laplacien d'un nombre est un nombre. Le Laplacien d'un vecteur est un vecteur.

Quelques relations vectorielles utiles

$$\vec{U}\,.\,(\vec{V}\wedge\vec{W})=\vec{V}\,.\,(\vec{W}\wedge\vec{U})=\vec{W}\,.\,(\vec{U}\wedge\vec{V})$$

$$(\vec{U}\wedge\vec{V})\wedge\vec{W}=(\vec{W}\cdot\vec{U})\vec{V}-(\vec{V}\cdot\vec{W})\vec{U}$$

$$\vec{U}\wedge(\vec{V}\wedge\vec{W})=(\vec{W}\cdot\vec{U})\vec{V}-(\vec{U}\cdot\vec{V})\vec{W}$$

$$(\vec{U}\wedge\vec{V})\cdot\vec{W}=(\vec{V}\wedge\vec{W})\cdot\vec{U}=(\vec{W}\wedge\vec{U})\cdot\vec{V}$$

$$div\left[\overrightarrow{rot}\left(\vec{U}\right)\right]=0$$

$$div(f\,\vec{U})=f\,div\vec{U}+\vec{U}\cdot\overrightarrow{grad}\;f$$

$$div(\vec{U}\wedge\vec{V})=(\overrightarrow{rot}\,\vec{U})\cdot\vec{V}-(\overrightarrow{rot}\,\vec{V})\cdot\vec{U}$$

$$\overrightarrow{rot}\left[\overrightarrow{grad}\,(f)\right]=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{rot}(f\,\vec{U})=f\,\overrightarrow{rot}\,\vec{U}+(\overrightarrow{grad}\;f)\wedge\vec{U}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{U}\wedge\vec{V})=\vec{U}\,div\vec{V}-\vec{V}\,div\vec{U}+(\overrightarrow{grad}\,\vec{U})\cdot\vec{V}-(\overrightarrow{grad}\,\vec{V})\cdot\vec{U}$$

$$\overrightarrow{rot}\left[\overrightarrow{rot}\left(\vec{U}\right)\right]=\overrightarrow{grad}\left[div\left(\vec{U}\right)\right]-\Delta\left(\vec{U}\right)$$

Théorème de Stokes

$\oint_C \vec{A}.\vec{dl}=\iint_S \overrightarrow{rot}\vec{A}.\vec{dS}$ où C est un contour fermé entourant la surface S

Théorème d'Ostrogradsky

$\oiint_S \vec{A}.\vec{dS}=\iiint_V div\vec{A}.d\tau$ où S est une surface fermée entourant le volume V

Les nombres complexes

Un nombre complexe z peut s'écrire sous deux formes équivalentes :

- $z = a + ib = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$, *a est la partie réelle de z, et b sa partie imaginaire*
- $z = |z|\,e^{i\varphi}$, $|z|$ *est le module de z et* φ *sa phase*,

où $i^2 = -1$

On a les relations suivantes entre ces grandeurs :

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\varphi = \arctan(b/a)$ si $a > 0$; $\varphi = \arctan(b/a) + \pi$ si $a < 0$.

$a = |z|\cos\varphi$; $b = |z|\sin\varphi$.

Utile : $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ **et** $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Le **complexe conjugué** de z se note z* et vaut $a - ib$ *ou* $|z|\,e^{-i\varphi}$ suivant la notation utilisée, on l'obtient en faisant l'opération i donne –i dans l'expression de z. Une propriété très intéressante du complexe conjugué est la relation $zz^* = |z|^2$

Ex : $\left(\dfrac{e^{i\theta}}{a+ib}\right)^* = \dfrac{e^{-i\theta}}{a-ib}$; $(1+e^{i\theta})^* = 1 + e^{-i\theta}$

Opération sur les nombres complexes :

Si $z = \dfrac{z_1}{z_2}$; *alors* $|z| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ *et* $\varphi(z) = \varphi(z_1) - \varphi(z_2)$

Si $z = z_1 \cdot z_2$; *alors* $|z| = |z_1| \cdot |z_2|$ *et* $\varphi(z) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$

Utilisation des nombres complexes en trigonométrie

La formule fondamentale est : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Il en découle : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \mathrm{Re}(e^{i\theta})$; $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \mathrm{Re}(-ie^{i\theta})$

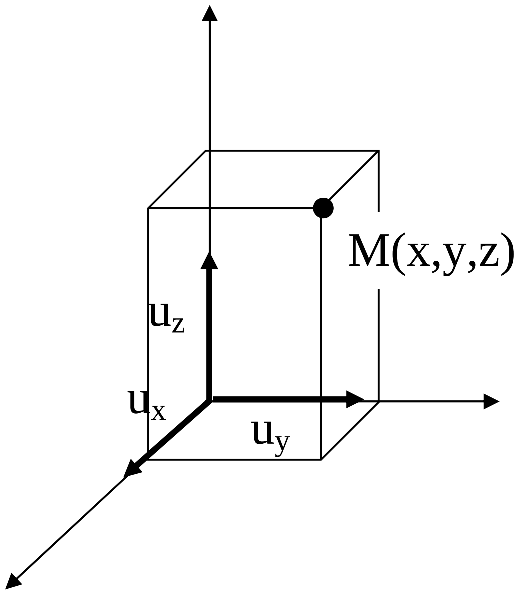
Et aussi : $|e^{i\theta}|^2 = 1 = (e^{i\theta})(e^{-i\theta}) = \cos^2\theta + \sin^2\theta$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$$
$$\sin 2a = 2\sin a\cos a$$
$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

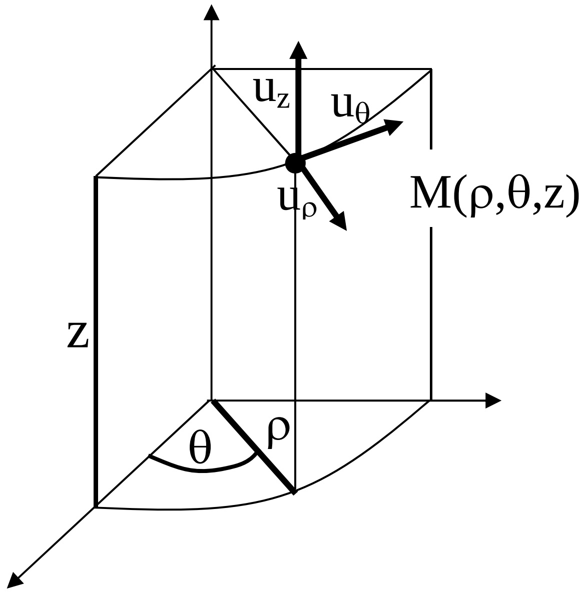
Les séries géométriques

$$\sum_{p=0}^{p=N} A^p = \frac{1 - A^{N+1}}{1 - A} \text{ ; } si\ |A| < 1\ on\ a : \sum_{p=0}^{\infty} A^p = \frac{1}{1 - A}$$

Les repères



Repère cartésien $(\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z})$



Repère cylindrique $(\overrightarrow{u_\rho},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_z})$

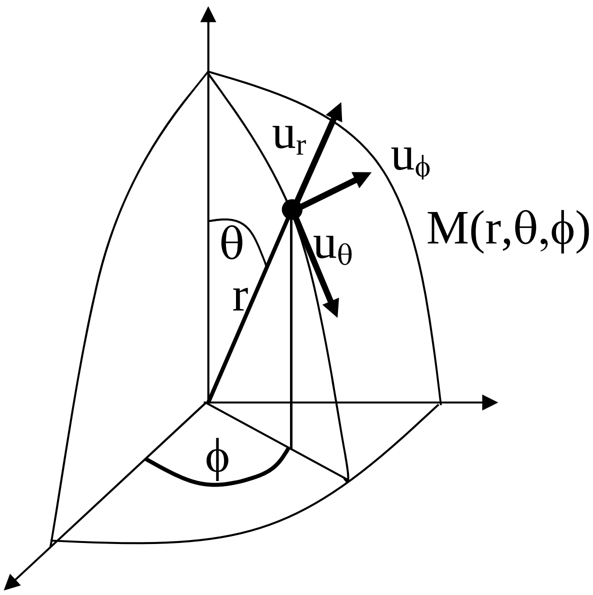
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\overrightarrow{u_\rho} = \cos\theta\,\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{u_y}$$

$$\overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_y}$$

Repère sphérique $(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_\varphi})$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\overrightarrow{u_r} = \sin\theta\cos\phi\,\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\sin\phi\,\overrightarrow{u_y} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\sin\phi\,\overrightarrow{u_y} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{u_\varphi} = -\sin\phi\,\overrightarrow{u_x} + \cos\phi\,\overrightarrow{u_y}$$

Attention : l'angle θ en sphérique n'est pas le même que l'angle θ en cylindrique !

Les opérateurs vectoriels en coordonnées sphériques et cylindriques

	Coordonnées **Cylindriques** dans le repère $(\overrightarrow{u_\rho},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_z})$	Coordonnées **Sphériques** dans le repère $(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_\varphi})$
Gradient $\overrightarrow{grad}(f)$	$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \rho} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$
Divergence $div(\overrightarrow{U})$	$\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(\rho U_\rho)}{\partial \rho}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(U_\theta)}{\partial \theta}+\dfrac{\partial U_z}{\partial z}$	$\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2 U_r)}{\partial r}+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(\sin\theta U_\theta)}{\partial \theta}+\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi}$
Rotationnel $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{U})$	$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial U_z}{\partial \theta}-\dfrac{\partial U_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial U_\rho}{\partial z}-\dfrac{\partial U_z}{\partial \rho} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(\rho U_\theta)}{\partial \rho}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial U_\rho}{\partial \theta} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(\sin\theta U_\varphi)}{\partial \theta}-\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial U_\theta}{\partial \varphi} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial U_r}{\partial \varphi}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rU_\varphi)}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rU_\theta)}{\partial r}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(U_r)}{\partial \theta} \end{bmatrix}$
Laplacien Δf	$\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial f}{\partial \rho}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\Delta f=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2(rf)}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\right)$

Les équations différentielles

Une équation différentielle est une équation qui contient des variables indépendantes, des fonctions inconnues ainsi que des dérivées ou différentielles de ces fonctions.

Une équation différentielle d'ordre *n* peut s'écrire $\phi(x, y, y', y'', ...y^n) = 0$.

Equation linéaire du 1er ordre

- *Equation sans second membre* : $y'(x) + p(x)y(x) = 0$

  La solution générale est $y(x) = Ae^{-h(x)}$, où h(x) est une primitive de la fonction p(x) et A une constante (réelle ou complexe).

- *Equation avec second membre* : $y'(x) + p(x)y(x) + q(x) = 0$
  - Si on connaît une solution $y_1(x)$ de l'équation différentielle, sa solution générale est. $y(x) = Ae^{-h(x)} + y_1(x)$
  - Si on ne connaît pas de solution particulière, on effectue le changement de fonction $y(x) = A(x)e^{-h(x)}$ où A n'est plus constante mais dépend aussi de x, que l'on remplace dans (E) pour trouver l'expression de $A(x)$ d'où celle de y(x)

Equation linéaire du 2ème ordre

- *Equation sans second membre* : $Ay''(x) + By'(x) + Cy(x) = 0$

  L'équation $Ar^2 + Br + C = 0$ est l'équation caractéristique.
  - Si elle admet deux racines distinctes r_1 et r_2 (réelles ou complexes), la solution est $y(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$ (λ_1, λ_2 constantes arbitraires).
  - Si elle admet une racine double r, la solution générale de H est $y(x) = (a + bx)e^{rx}$ a, b constantes arbitraires.
- *Cas particulier plus simple* : $y''(x) + \alpha y(x) = 0$
  - Si $\alpha > 0$, la solution est $y = Ae^{i\sqrt{\alpha}x} + Be^{-i\sqrt{\alpha}x}$ qui peut aussi s'écrire $y = A\cos(\sqrt{\alpha}x + \varphi)$ ou $y = A\cos(\sqrt{\alpha}x) + B\sin(\sqrt{\alpha}x)$ (fonction oscillante)
  - Si $\alpha < 0$, la solution est $y = A\exp(\sqrt{-\alpha}x) + B\exp(-\sqrt{-\alpha}x)$ (fonction exponentielle)
- *Equation avec second membre* : $Ay''(x) + By'(x) + Cy(x) = f(x)$
  - Si on connaît une solution $y_1(x)$ particulière de l'équation différentielle, sa solution générale est la somme de la solution sans second membre et de $y_1(x)$.