Licence 2 — Institut Villebon-Charpak, Orsay
Mathématiques — 2022-2023

Evaluation 3

Dans cette évaluation, il suffit de prendre 20 points sur les 30 disponibles pour avoir 20. Le problème n'est pas nécessaire pour avoir 20, il est destiné aux étudiants qui souhaiteraient se tester en évaluation sur un problème plus difficile.

▸ **Exercice 1**. **3pts** Déterminer l'équivalent le plus simple en 0 de $\frac{e^t + t}{2\ln(t) + t^2}$.

Supposons $\alpha < \beta$. Donner l'équivalent le plus simple de $t^\alpha + t^\beta$ en 0 puis en $+\infty$.

Eléments de correction et pas rédaction propre. Voir les exemples rédigés dans le cours pour ça.

1. $\frac{1}{2\ln(t)}$.
2. Si $\alpha > 0$, en 0 : t^α, en $+\infty$: t^β. Si $\alpha < 0 < \beta$: en 0 : t^α, en $+\infty$: t^β. Si $\beta < 0$, en 0 : t^α, en $+\infty$: t^β.

▸ **Exercice 2**. **6pts** Déterminer la nature des séries suivantes

1. $\sum \frac{\ln(n)}{n!}$
2. $\sum \frac{\sin(n^2)}{1+n^4}$
3. $\sum \frac{n+6e^n}{n^2+2e^{2n}}$
4. $\sum \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$

Eléments de correction et pas rédaction propre. Voir les exemples rédigés dans le cours pour ça.

1. CV par le critère de d'Alembert : le quotient vaut $\frac{\ln(n)+\ln(1+1/n)}{\ln(n)(n+1)}$ qui tend vers 0 avec $0 < 1$.
2. CVA donc CV. On majore pour cela la valeur absolue par $\frac{1}{n^4}$.
3. CV : théorème de comparaison par équivalents. L'équivalent est $3e^{-n}$ (qui est une série géométrique).
4. DV en minorant à partir d'un certain rang $\ln(n)$ par 1. Ainsi $\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ se minore par $\frac{1}{n^{1/2}}$ à partir d'un certain rang.

▸ **Exercice 3**. **8pts** Dire pourquoi les intégrales suivantes sont des intégrales généralisées, écrire leurs définitions en termes de limite(s), puis déterminer si elles sont convergentes et, dans ce cas, calculer leurs valeurs.

1. $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$.
2. $\int_0^{+\infty} te^{-2t}dt$.
3. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^3}dt$.
4. $\int_0^1 \frac{1}{x(x+1)}dx$.

Eléments de correction et pas rédaction propre. Voir les exemples rédigés dans le cours pour ça.

1.

▸ **Exercice 4**. **Adaptation : 3pts** Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Une réponse sans justification vaudra 0 point.

1. Si f est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $f(t)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ alors $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge.
2. Si f est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $f(t)$ tend vers un réel $l \neq 0$ quand x tend vers $+\infty$ alors $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ diverge.
3. Si une fonction f est impaire et continue sur $\mathbb{R}$ alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Eléments de correction et pas rédaction propre. Voir les exemples rédigés dans le cours pour ça.

1. $1/x$ est un contre exemple.
2. Vrai. Si $l > 0$, on peut trouver ϵ tel que $l - \epsilon > 0$. Comme f tend vers l en $+\infty$, on peut trouver x_0 tel que pour $x \geq x_0$, $f(x) \geq l - \epsilon$. Alors $\int_{x_0}^{x} f(t)dt \geq \int_{x_0}^{x} ldt = l(x - x_0)$. Donc par comparaison, $\int_{x_0}^{+\infty} f(t)dt$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Donc $\int_1^{x} f(t)dt$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Donc $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ diverge.
3. Faux prenons $f(t) = t$, $\int_0^{+\infty} tdt$ diverge (calculez-la) donc $\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$ diverge.

▸ **Exercice 5**. **Problème $\star\star$: 10pts**
Le résultat de chaque question (sauf la dernière) est utilisé au moins une fois dans une question ultérieure.

1. *Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par :*
$$\forall x \in]0,1[\;\; f(x) = \frac{x \ln x}{x-1}.$$
En étudiant les variations de la fonction f, démontrer que :
$$\forall x \in]0,1[\;\; 0 \leq f(x) \leq 1.$$
2. *Pour chaque entier $n \geq 0$, on note :*
$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} \ln x}{x-1} dx.$$
Démontrer que cette intégrale est faussement généralisée, puis que :
$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$
3. *Pour chaque entier $n \geq 0$, démontrer que l'intégrale suivante :*
$$u_n = \int_0^1 x^n \ln x \; dx$$
est convergente si $n = 0$ et faussement généralisée (et donc convergente) si $n > 0$ et calculer sa valeur.
4. *On note :*
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} x^k \right) \ln x \; dx.$$
En exprimant différemment $\sum_{k=0}^{n} x^k$, montrer que l'intégrale :
$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} \; dx$$
est convergente et que : $S_n = -I + I_n$.

5. *Démontrer que :*

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

(Ainsi, $I = \pi^2/6$.)

✂ -

Eléments de correction et pas rédaction propre. Voir les exemples rédigés dans le cours pour ça.

1. Une autre possibilité est d'utiliser le fait que pour tout x sur son ensemble de définition, $\ln(x) \leq x - 1$ (se démontre en étudiant la fonction $\ln(x) - (x-1)$) et comme $x \leq 1$ sur $]0,1[$, on obtient le résultat.
2. Il y a deux pbs en 0 et 1.
   En 0, le numérateur tend vers 0 par croissances comparées, donc la fonction intégrée aussi.
   En 1, $\dfrac{\ln(x)}{x-1} = \dfrac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1}$ tend vers la dérivée de ln en 1 cad 1 donc la fonction intégrée a aussi une limite finie.
   On intègre donc une fonction prolongeable par continuité sur $[0,1]$ ce qui rend l'intégrale faussement généralisée.
   La fonction intégrée est inférieure à x^{n+1} en utilisant que $\ln(x) \leq x - 1$ sur l'intervalle. La croissance de l'intégrale donne ensuite le résultat.
3. déjà vu en cours pour $n = 0$ et voir la question précédente pour le côté faussement généralisé.
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$. Remplacez et utilisez la linéarité de l'intégrale pour obtenir la relation entre S_n et I_n.
   L'intégrale converge car I_n converge d'après Q2 et S_n converge car chaque u_k cv d'après Q3.
5. I_n tend vers 0 par encadrement d'après Q2 donc I est égal à l'opposé de la limite de S_n. Pour calculer S_n, il suffit de calculer pour k fixé l'intégrale $u_k = \displaystyle\int_0^1 x^k \ln(x) dx$ par IPP.

- ✂