Licence 2 — Institut Villebon-Charpak, Orsay
Mathématiques — 2022-2023

Evaluation 2

Dans cette évaluation, il suffit de prendre 20 points sur les 30 disponibles pour avoir 20. Le problème n'est pas nécessaire pour avoir 20, il est destiné aux étudiants qui souhaiteraient se tester en évaluation sur un problème plus difficile.

▸ **Exercice 1**. **4pts**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer de manière plus simple la quantité
$$u_n = \frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}}.$$
2. Pour chaque entier naturel N, calculer les sommes
$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{7^n}, \quad T_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{n-1}{2^{n+1}}$$
3. Calculer la limite de S_N et T_N quand N tend vers $+\infty$.
4. Les séries $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{7^n}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{n-1}{2^{n+1}}$ sont-elles convergentes ?

✂ -

Eléments de correction et pas rédaction propre. Voir les exemples rédigés dans le cours pour ça.

1. $u_n = \frac{n-1}{2^{n+1}}$ après réduction au même dénominateur.
2. $S_N = \sum_{n=0}^{N} (\frac{-1}{7})^n = \frac{1-(\frac{-1}{7})^{N+1}}{\frac{8}{7}} = \frac{7}{8}(1-(\frac{-1}{7})^{N+1})$.

   $T_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{N+1}{2^{N+1}}$ (somme télescopique).
3. $S_N \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{7}{8}$ car la raison $\frac{-1}{7}$ est comprise entre -1 et 1 et $T_N \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$ par croissances comparées.
4. Les sommes partielles convergent (ont une limite finie) donc les séries convergent.

- ✂

▸ **Exercice 2**. **13pts** Déterminer la nature des séries suivantes

1. $\sum \frac{1}{2n^4+n}$.
2. $\sum \frac{8^n}{n!}$
3. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$
4. $\sum n - e^n$
5. $\sum \frac{\cos(n^2+7)}{n+5n^3}$
6. $\sum \frac{n+\cos(n)}{n^2-\ln(n)}$
7. $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$

✂ -

Eléments de correction et pas rédaction propre. Voir les exemples rédigés dans le cours pour ça.

1. Cette série converge par comparaison (majoration par $\frac{1}{2n^4}$.
2. CV par le critère de d'Alembert : le quotient vaut $\frac{8}{n+1}$ qui tend vers 0 avec $0 < 1$.
3. CV par le critère des séries alternées.
4. diverge grossièrement car le terme général tend vers $-\infty$ par croissances comparées.
5. CVA donc CV. On majore pour cela la valeur absolue par $\frac{1}{5n^3}$.
6. DV : théorème de comparaison par équivalents. L'équivalent est $\frac{1}{n}$ (par théorème d'encadrement, on obtient l'équivalent du numérateur, par croissances comparées celui du dénominateur).
7. CV en majorant à partir d'un certain rang $\ln(n)$ par $n^{\frac{1}{2}}$. Ainsi $\frac{\ln(n)}{n^2}$ se majore par $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ à partir d'un certain rang.

- ✂

▸ Exercice 3. Adaptation : 3pts

Dans cet exercice, (u_n) est une suite réelle donnée. Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses. Une réponse sans justification vaudra 0 point.

1. Si pour tout n, $u_n > 0$ et que $\sum u_n$ converge alors $\sum \sqrt{u_n}$ converge.
2. Si $\sum u_n$ converge alors $\sum u_n^2$ converge.
3. Soit (v_n) une suite telle que la série $\sum v_n$ converge. Si $v_n \leq u_n \leq 0$ pour tout n entier naturel alors la série $\sum u_n$ converge.

Eléments de correction et pas rédaction propre. Voir les exemples rédigés dans le cours pour ça.

1. Faux $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ est un contre-exemple.
2. Faux $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est un contre-exemple.
3. Vrai, on a $0 \leq -u_n \leq -v_n$. $\sum v_n$ converge donc $\sum -v_n$ converge donc $\sum -u_n$ converge par comparaison à majoration donc $\sum u_n$ converge.

▸ Exercice 4. Problème $\star\star$: 10pts

Bagage admis :

- On dit qu'une suite réelle (u_n) est bornée s'il existe $M \geq 0$ telle que pour tout n entier naturel, $|u_n| \leq M$.
- On admet que si une suite réelle converge alors elle est bornée.

On s'intéresse dans cet exercice à des séries de la forme $\sum a_n x^n$ où (a_n) est une suite de réels et x un réel.

1. On commence par étudier quelques exemples.
   (a) Rappeler pour quels x, la série $\sum x^n$ converge.
   (b) Déterminer pour quels x réels, la série $\sum \dfrac{x^n}{n}$ converge ou non.
   (c) Démontrer que pour $|x| < 1/2$, la série $\sum \cos(n)(2x)^n$ converge. Déterminer la nature de cette série pour $|x| \geq 1/2$.
2. On se donne maintenant une suite (a_n) quelconque et un réel $x_0 > 0$ tel que $(a_n x_0^n)$ est bornée.
   (a) Démontrer que si $|x| < x_0$ alors la série $\sum a_n x^n$ converge absolument. On pourra pour cela remarquer que pour tout réel x, $a_n x^n = a_n x_0^n \left(\dfrac{x}{x_0}\right)^n$.
   (b) Soit $x_1 > 0$ tel que la série $\sum a_n x_1^n$ converge. Déduire de la question précédente que si $x_1 > 0$ tel que la série $\sum a_n x_1^n$ converge alors pour tout $|x| < x_1$, la série $\sum a_n x^n$ converge absolument.
   (c) Soit $x_2 > 0$ tel que la série $\sum a_n x_2^n$ diverge. Démontrer par l'absurde que pour tout $|x| > x_2$, la série $\sum a_n x^n$ diverge.
   (d) Conjecturez la forme du domaine réel de convergence d'une série de la forme $\sum a_n x^n$. Essayer d'expliquer ensuite graphiquement en quoi la question 2 aide à prouver cette conjecture.

Eléments de correction et pas rédaction propre. Voir les exemples rédigés dans le cours pour ça.

1. (a) $x \in]-1, 1[$.
   (b) Critère de d'Alembert appliqué à la valeur absolue du terme général. Le quotient tend vers $|x|$ ce qui assure la convergence absolue pour $|x| < 1$. En $x = 1$, c'est la série harmonique qui diverge. En $x = -1$, c'est une série alternée qui converge par le critère des séries alternées. Pour $|x| > 1$, la série diverge grossièrement par croissances comparées.

(c) On majore en valeur absolue par $|2x|^n$. Cette série cv pour $|x| < 1/2$ donc la série cva pour ces x par comparaison à majoration.
Pour $|x| \geq 1/2$, la série diverge grossièrement.

2. (a) $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \times |\left(\dfrac{x}{x_0}\right)^n| \leq M|\left(\dfrac{x}{x_0}\right)^n|$. Si $|x| < |x_0|$, la série du majorant cv (géométrique de raison comprise entre -1 et 1). On conclut par comparaison à majoration.

   (b) Si la série cv, son terme général tend vers 0 donc est borné donc d'après la question précédente, la série cva.

   (c) S'il existait x_3 tel que $|x_3| > x_2$, et que la série $\sum a_n x_3^n$ convergeait alors d'après la question précédente $\sum a_n x_2^n$ convergerait absolument ce qui est absurde.

   (d) On va avoir un disque dans lequel il y a convergence absolue et en dehors duquel il y aura divergence de la série.

- ✂