Licence 2 — Institut Villebon-Charpak, Orsay
Mathématiques — 2022-2023

Evaluation 1

Dans cette évaluation, il suffit de prendre 20 points sur les 30 disponibles pour avoir 20. Le problème n'est pas nécessaire pour avoir 20, il est destiné aux étudiants qui souhaiteraient se tester en évaluation sur un problème plus difficile.

▸ **Exercice 1**. **4pts** Déterminez en justifiant précisément l'équivalent en $+\infty$ le plus simple des quantités suivantes

$$\ln(n) + n, \quad \frac{n^2}{4n^3 - n + 1}, \quad \frac{n^2 + e^n}{3^n + \cos(n)}, \quad \ln(n^2 + 1).$$

Eléments de correction et pas rédaction propre. Voir les exemples rédigés dans le cours pour ça.
$n, \dfrac{1}{4n}, (\dfrac{e}{3})^n, 2\ln(n)$.

▸ **Exercice 2**. **4pts**

1. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{2^n}{3^n}$ pour N un entier naturel. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^n}{3^n}$ et calculer sa somme.
2. Les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{2^n}{3^n}$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^n}{3^n}$ sont-elles de même nature ? Quelle est la valeur de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n}$?

Eléments de correction et pas rédaction propre. Voir les exemples rédigés dans le cours pour ça.

1. La somme partielle vaut $3(1 - (\frac{2}{3})^{N+1})$. La série converge car la limite est 3. La somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n} = 3$
2. Oui la nature ne dépend pas des premiers termes. La valeur en est changé. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n} - 1 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

▸ **Exercice 3**. **5pts**

1. Pour $N \geq 2$, calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$.
2. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$ est-elle convergente ?
3. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-1)n}$?
4. Déduire de la question 3 la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Eléments de correction et pas rédaction propre. Voir les exemples rédigés dans le cours pour ça.

1. C'est une somme télescopique, on obtient $1 - \dfrac{1}{N}$.
2. La série tend vers 1 donc elle converge.
3. Pour tout $n \geq 2$, $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{(n-1)n}$. Donc la série converge.

4. $\forall n \geq 2, 0 \leq n-1 \leq n$ donc $0 \leq (n-1)n \leq n^2$ et donc $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. Or la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-1)n}$ converge donc par comparaison à majoration, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

▸ **Exercice 4**. **4pts** Déterminer la nature des séries suivantes

$$\sum \frac{1}{4^n+2}, \quad \sum \frac{n}{\ln(n)} \quad \sum \frac{1}{n-1}.$$

Eléments de correction et pas rédaction propre. Voir les exemples rédigés dans le cours pour ça.

La première série converge par comparaison (majoration par $(\frac{1}{4})^n$, la seconde diverge grossièrement, la troisième diverge par comapraison (minoration par $\frac{1}{n}$).

▸ **Exercice 5**. **Adaptation : 3pts**

Dans cet exercice (S_N) est définie pour tout N entier naturel par $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ pour (u_n) une suite réelle donnée

1. Peut-on trouver une suite (u_n) croissante non nulle telle que (S_N) soit décroissante ? Justifiez votre réponse.
2. Construire (u_n) non nulle de sorte que (S_N) soit croissante pour $N < 5$ et décroissante pour $N \geq 5$.
3. Si pour tout n, $u_n \leq v_n$ et que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge, peut-on dire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge ? Justifiez votre réponse.

Eléments de correction et pas rédaction propre. Voir les exemples rédigés dans le cours pour ça.

1. Oui $u_n = -\frac{1}{n}$ est croissante mais sa somme partielle est décroissante car u_n est négatif pour tout n.
2. Oui $u_n = 5 - n$ convient.
3. Non par exemple $-n \leq 0$. La série de $-n$ diverge grossièrement mais la série nulle converge.

▸ **Exercice 6**. **Problème ⋆ ⋆ : 10pts**

L'objectif de cet exercice est de calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. On note $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ pour $N \in \mathbb{N}^\star$.

1. On cherche dans cette question à calculer $C_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \cos(nt)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^\star$.
   (a) Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \cos(nt)$ si t est un multiple de 2π.
   (b) On suppose dans la suite du problème que t n'est pas un multiple de 2π. Déterminer l'expression de $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} e^{int}$.
   (c) En utilisant la technique de l'angle moitié, en déduire que
$$\forall N \in \mathbb{N}^\star, \quad C_N = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(\frac{(2N+1)t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})}.$$
2. Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \frac{1}{n^2} = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)dt.$$
   On pourra intégrer par parties.
3. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad S_N = -\frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)dt + \int_0^\pi \frac{\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)}{2\sin(\frac{t}{2})}\sin(\frac{(2N+1)t}{2})dt.$$
4. On admet que $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)}{2\sin(\frac{t}{2})}\sin(\frac{(2N+1)t}{2})dt$ est de limite nulle quand $N \to +\infty$. Calculer alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
5. En coupant suivant les termes pairs et impairs $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

✂ -

Eléments de correction et pas rédaction propre. Voir les exemples rédigés dans le cours pour ça.

1. (a) Le cos vaut 1 en t multiple de 2π donc la somme de 0 à N vaut $N+1$ donc la série diverge.
   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} e^{int} = \sum_{n=1}^{N} (e^{it})^n = \frac{e^{it} - e^{it(N+1)}}{1 - e^{it}}$.
   (c) C_N est la partie réelle de la somme de la question 2.
$$\frac{e^{it} - e^{it(N+1)}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{it(N/2+1)}(e^{it(-N/2)} - e^{it(N/2)})}{e^{it/2}(e^{-it/2} - e^{it/2})} = e^{it(N/2+1/2)}\frac{\sin(Nt/2)}{\sin(t/2)}$$
   Donc la partie réelle est $\dfrac{\cos((N+1)t/2)\sin(Nt/2)}{\sin(t/2)}$. Pour conclure, on utilise que $\cos(a)\sin(b) = (\sin(a+b) - \sin(a-b))/2$.
   (d) On effectue deux IPP en intégrant à chaque fois le terme oscillant (cos ou sin) et en dérivant le polynôme.
   (e) $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{N} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)dt = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\sum_{n=1}^{N}\cos(nt)dt$ par linéarité de la somme. On remplace alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\cos(nt)dt$ par son expression trouvée en Q3 et on coupe par linéarité de l'intégrale.

(f) La limite de S_N est donc $-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi \left(\dfrac{t^2}{2\pi} - t\right) dt$ puisque la seconde intégrale est de limite nulle. On primitive par $\dfrac{t^3}{6\pi} - \dfrac{t^2}{2}$ pour obtenir que la somme vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ en coupant en somme des termes pairs et impairs. On peut effectuer ce découpage car chacune des séries convergent. $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2}$ est une série de Riemann convergente multipliée par 1/4. $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ converge aussi car $0 \leq \dfrac{1}{(2p+1)^2} \leq \dfrac{1}{(2p)^2}$.

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
