Licence 2 — Institut Villebon-Charpak, Orsay
Mathématiques — 2023-2024

Equivalents

Code pour les questions

- Sans étoile : Niveau exigible pour tout le monde.
- $\star$: Niveau exigible pour tout le monde mais moins importante.
- $\star\star$: Niveau pour aller plus loin (exigible pour ceux qui prétendent aux écoles gei)
- En violet : question menant à un théorème, proposition qu'on peut trouver dans le bilan de cours. Peut être passé en cas de retard mais nécessaire pour comprendre en profondeur.

Le contenu du cours

Ce cours traite de la notion d'équivalents de suite au voisinage de $+\infty$. Cette notion jouera un rôle important dans l'étude des séries numériques qui constituera un gros morceau de l'UE. La proposition qui suit rappelle des croissances comparées qui vous seront utiles pour trouver certains équivalents de suites.

Proposition 1: Croissances comparées à retenir

Soit $k \in \mathbb{N}^\star$, $a > 1$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^k} = 0$. (qui s'écrit aussi $\ln(n) \underset{+\infty}{=} o(n^k)$, ou encore $\ln(n)$ est négligeable devant n^k au voisinage de $+\infty$).
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$, (qui s'écrit aussi $n^k \underset{+\infty}{=} o(a^n)$).
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$, (qui s'écrit aussi $a^n \underset{+\infty}{=} o(n!)$).
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$, (qui s'écrit aussi $n! \underset{+\infty}{=} o(n^n)$).

Définition 1:

On dit que deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont équivalentes s'il existe une suite (ϵ_n) tendant vers 0 en $+\infty$ telle que pour tout entier naturel n, $u_n = v_n(1 + \epsilon_n)$.

Nous vous donnons maintenant la définition "officieuse", c'est celle-ci dont vous vous servirez pour les questions qui suivent.

Définition 2: Cas particulier

On dit que deux suites réelles non nulles (u_n) et (v_n) sont équivalentes si $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

1. **Equivalents de somme**
   (a) Trouvez des suites qui sont équivalentes à n, à 1, à $\dfrac{1}{n^2}$.
   (b) Déterminez des équivalents de $n + 1 + \dfrac{1}{n}$. Déterminez-en ensuite l'équivalent le plus simplifié. Même question pour $2n^2 - \ln(n) + 12$ et $n^3 + 4e^n + \ln(n) - 2$.
   (c) Etant donné une suite u_n et une autre suite v_n négligeable devant u_n (la limite de $\dfrac{v_n}{u_n}$ tend vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$), peut-on trouver un équivalent de $u_n + v_n$?
   (d) Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours la question 1c démontre-t-elle ?

(e) Reprenez les équivalents de la question 1b en utilisant le résultat obtenu aux questions précédentes.

2. **Opérations sur les équivalents**

   (a) On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} z_n$. A votre avis peut-on dire que :

      i. $u_n w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n z_n$?

      ii. $\dfrac{u_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{v_n}{z_n}$?

      iii. $u_n + w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n + z_n$?

   (b) Prouvez vos conjectures.

   (c) Déterminez l'équivalent le plus simple de $\dfrac{3n^2+\ln(n)}{-e^n+n+1}$ en exploitant la question 2a.

   (d) $\star\star$ On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, peut-on dire que :

      i. $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$?

      ii. $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$?

      iii. $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(v_n)$ pour f une fonction quelconque ?

      Prouvez vos conjectures.

   (e) Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours la question 2 démontre-t-elle ?

3. **Entraînez-vous !** Déterminez l'équivalent le plus simple des quantités suivantes :

$$n+\frac{1}{n},\quad n^2+n, 2^n-n^2,\quad 2^n+\ln(n)+n,\quad n!-2^n,\quad (n+(-1)^n)(-2n+\sqrt{n}),\quad \frac{n^3+6}{2^n-n},\quad \frac{n+6}{2n-(-1)^n},$$

$$\frac{1}{n+\ln(n)},\quad \frac{n^3+(-1)^n-\sin(n)}{n^2+2-e^n},\quad \frac{\sin(n)}{2\sqrt{n}-1},\quad \sqrt{n+1},\quad \sqrt{n+1}-\sqrt{n},\quad \exp(n+1),\quad \ln(\sqrt{n}+\sin(n))$$

Séries numériques : une nouvelle façon de définir une suite

Code pour les questions

- Sans étoile : Niveau exigible pour tout le monde.
- ⋆ : Niveau exigible pour tout le monde mais moins importante.
- ⋆ ⋆ : Niveau pour aller plus loin (exigible pour ceux qui prétendent aux écoles gei)
- En violet : question menant à un théorème, proposition qu'on peut trouver dans le bilan de cours. Peut être passé en cas de retard mais nécessaire pour comprendre en profondeur.

Le Contenu du cours

Dans ce paragraphe, nous allons découvrir une nouvelle façon de définir une suite.

1. ⋆ Une balle de ping-pong rebondit mais ses rebonds s'amortissent. Il s'est écoulé une seconde entre le premier et le deuxième rebond, puis l'intervalle de temps entre deux rebonds successifs est, à chaque rebond, divisé par deux. La balle va-t-elle rebondir jusqu'à la fin des temps ou y aura-t-il un moment où elle ne rebondira plus ?

   On pourra noter u_n l'intervalle de temps écoulé entre le n-ième et le $(n+1)$-ième rebond.

2. ⋆ ⋆ Une île, peuplée d'un million d'habitants et isolée du reste du monde, reçoit la visite d'un bateau de ravitaillement chaque année. Cette année, à bord du bateau se trouvait une personne atteinte d'une maladie très contagieuse qui, avant de reprendre la mer, a contaminé 12 habitants de l'île. Les effets de la maladie sont très rapides : une personne contaminée est aussitôt contagieuse et ne reste contagieuse qu'un seul jour. L'évolution de la contagion est mesurée par le facteur de reproduction R qui indique le nombre moyen de personnes qu'une personne contaminée va contaminer pendant la journée où elle est contagieuse. Grâce aux mesures sanitaires immédiatement prises par les autorités, R baisse selon la loi suivante : $R_n = 12/n$, où R_n est sa valeur au n-ième jour.

   Questions : l'épidémie va-t-elle s'arrêter un jour ? Si oui, toute la population aura-t-elle été touchée ? On notera u_n le nombre estimé de personnes tombant malades le n-ième jour et S_n le nombre estimé de personnes tombées malades entre le premier et le n-ième jour. On considèrera que l'épidémie est arrêtée le jour où $u_n < 1$.

Définition 3: Série numérique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.

- La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

  s'appelle la *série de terme général* u_n.
- *Pour chaque entier n, le réel S_n s'appelle* la somme partielle *d'ordre n de la série.*

Notation : la série de terme général u_n est aussi notée la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

3. Calculer les sommes suivantes :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} 5^n; \qquad R_N = \sum_{n=0}^{N} 1;$$

$$Q_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n; \qquad T_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} \right);$$

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}; \qquad \star\star\ V_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}.$$

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \ln(k+1);$$

Indication pour V_N : se rappeler l'égalité remarquable (à compléter) : $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\cdots}$.

Les six séries ainsi définies sont-elles convergentes ? Pouvez-vous calculer la limite de celles qui le sont ?

Définition 4: Série convergente, somme d'une série convergente

On dit que la série de terme général u_n est *convergente* si la suite (S_n) de ses sommes partielles l'est. Si c'est le cas, la limite de la suite (S_n) s'appelle la *somme de la série* et on la note : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Ainsi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

Quand la suite (S_n) n'est pas convergente, on dit que la série *diverge.*

Quand la suite (S_n) n'est pas convergente mais tend vers l'infini, on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty.$$

Attention : Ne pas confondre les deux notations :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

La première notation désigne la série de terme général u_n, c'est-à-dire la suite (S_n) de ses sommes partielles. La seconde notation désigne la *limite* de cette suite.

4. — Quel est la nature de l'objet mathématique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$?

   — Quel est la nature de l'objet mathématique $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$?

5. *Retour sur l'exercice 3.*

   (a) Dans l'exercice 3, quel est le point commun entre les séries définies par les suites (S_n), (Q_n) et (U_n) ? Pouvez-vous en imaginer une généralisation ?

   (b) Dans l'exercice 3, quel est le point commun entre les séries définies par les suites (T_n), (P_n) et (V_n) (enlevez (V_n) si vous ne l'avez pas traitée) ? Pouvez-vous en imaginer une généralisation ?

(c) Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours la question 2 démontre-t-elle ?

Quel résultat avez-vous démontré ?

6. *Divergence grossière.* Dans cet exercice, on cherche à étudier les liens entre la convergence d'une suite (u_n) et celle de la série de terme général u_n.

   (a) Revenir sur les six exemples de l'exercice 3 : dans le tableau suivant, indiquez pour chacun des exemples la nature de la série et la nature de son terme général.

	Terme général u_n	Limite de la suite (u_n)	Nature de la série $\sum u_n$ (CV ou DV)
S_N			
R_N			
Q_N			
T_N			
U_N			
V_N			

   (b) Pour les exemples précédents, que peut-on dire de la suite (u_n) quand la série correspondante est convergente ?

   (c) *Cas général.*

      i. *Petite question préliminaire.* Soit (x_n) une suite de nombre réels qui converge vers un réel l. Que peut-on dire de la suite $(x_{n+1} - x_n)$?

      ii. Soit $\sum u_n$ une série numérique. On note, pour chaque entier n :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

      On suppose que cette série est convergente. En appliquant la question préliminaire à la suite (S_n), que peut-on dire de la suite (u_n) ?

      iii. On suppose que la suite (u_n) tend vers 0. Peut-on en conclure que la série $\sum u_n$ est convergente (et si vous parcouriez les différents exemples vus dans ce cours) ?

      iv. Etablir un schéma logique qui relie les deux affirmations :

      — La série $\sum u_n$ est convergente ;

      — La suite (u_n) tend vers 0.

      v. Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours la question 6 démontre-t-elle ?

Définition 5: Série grossièrement divergente

Une série numérique $\sum u_n$ est dite **grossièrement divergente** si son terme général u_n ne tend pas vers 0.

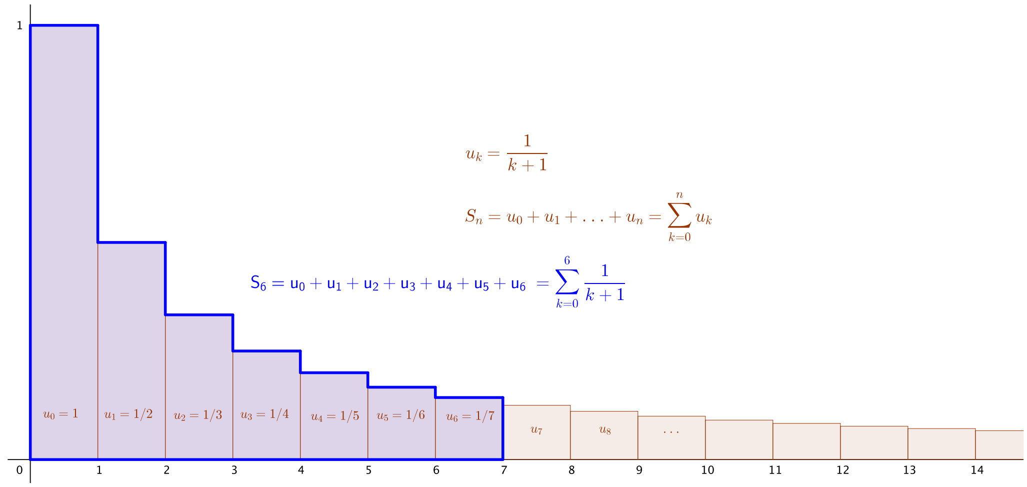
7. **La série harmonique** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{1}{n+1}.$$

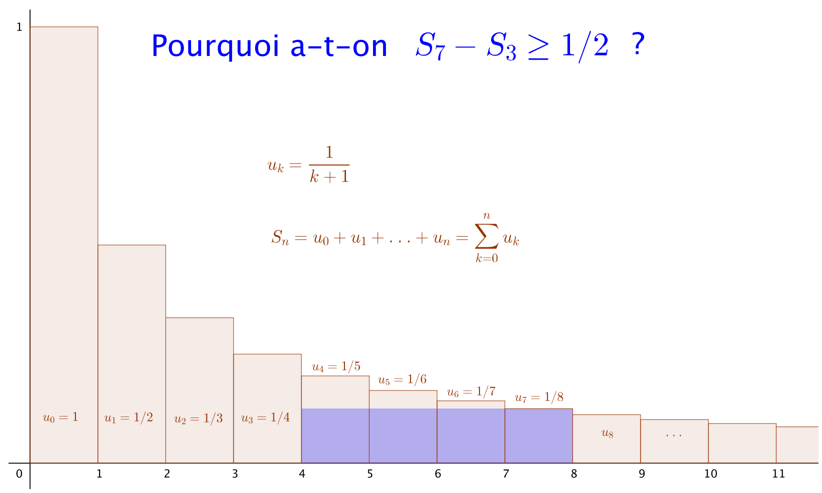
L'objet de l'exercice est d'étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n.$$

   (a) ⋆ Quelle(s) propriété(s) pouvez-vous conjecturer/démontrer sur la suite (S_n) ?



(b) ⋆ Démontrer que, pour tout entier n, $S_{2n+1} - S_n \geq 1/2$.



(c) ⋆ Au regard de la question précédente, pensez-vous que la série $\sum u_n$ est convergente ? Justifiez.

(d) Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours la question 7 démontre-t-elle ?

8. *Que se passe-t-il quand on modifie quelques termes d'une série ?*

   (a) ⋆ On considère la suite (u_n) définie par :

   $$\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = 2^{-n}.$$

   Étudier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ puis, si elle est convergente, calculer sa somme.

   (b) ⋆ On considère maintenant la suite (v_n) définie par :

   $$v_n = 1 \text{ si } n \leq 10 \;\text{ et } v_n = 2^{-n} \text{ si } n > 10.$$

   Étudier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ puis, si elle est convergente, calculer sa somme.

   (c) ⋆ Pouvez-vous imaginer une propriété générale qui présente ce qui se passe quand on modifie les premiers termes d'une série ? Démontrer cette propriété.

   (d) Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours la question 8 démontre-t-elle ?

Nous avons vu dans les exercices de ce paragraphe trois *séries de référence* :

— La série harmonique ;

— Les séries géométriques (à vous de préciser de quoi il s'agit) ;

— Les séries télescopiques (à vous de préciser de quoi il s'agit).

Séries à termes positifs

Code pour les questions

— Sans étoile : Niveau exigible pour tout le monde.
— ⋆ : Niveau exigible pour tout le monde mais moins importante.
— ⋆ ⋆ : Niveau pour aller plus loin (exigible pour ceux qui prétendent aux écoles gei)
— En violet : question menant à un théorème, proposition qu'on peut trouver dans le bilan de cours. Peut être passé en cas de retard mais nécessaire pour comprendre en profondeur.

Le déroulé attendu : nombre de séances et objectifs

1. Comprendre en quoi la positivité du terme général influe sur la nature de la série : questions 1 et 2.
2. Comprendre et utiliser le théorème de comparaison à majoration : questions 3 et 4.
3. Etudier la nature des séries de Riemann : question 5.
4. S'entraîner sur l'étude de séries positives : questions 6 à 11.
5. Comprendre et utiliser le théorème de comparaison à équivalents : questions 12 et 13.
6. Comprendre et utiliser le critère de d'Alembert : questions 14 et 15.

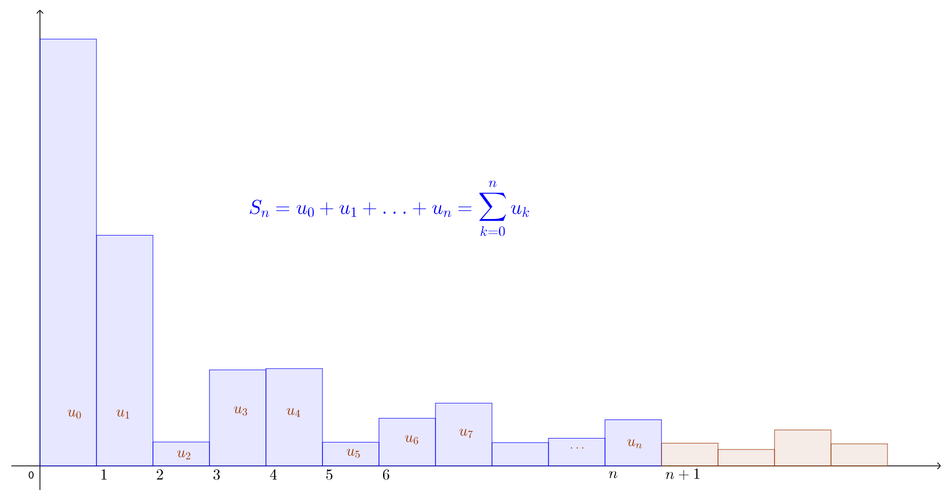
Le contenu du cours

Dans le paragraphe précédent, nous avons calculé la somme de séries géométriques ou de séries télescopiques convergentes. Nous avons pu le faire car nous étions capables d'exprimer simplement en fonction de n les sommes partielles S_n de ces séries.
Malheureusement, en général, il n'est pas possible d'écrire l'expression de S_n en fonction de n, si bien que l'étude de la nature de la série (convergence ou divergente) n'est pas aussi simple. Et quand la série converge, le calcul de sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est souvent très difficile.
Dans ce paragraphe et le suivant, nous allons nous contenter d'étudier la nature d'une série (convergence ou divergence) et nous ne chercherons pas à en calculer la somme (quand elle est convergente).
Dans ce paragraphe, nous étudions uniquement les séries à termes positifs, c'est-à-dire les séries numériques $\sum u_n$ pour lesquelles $u_n \geq 0$ pour tout entier n.

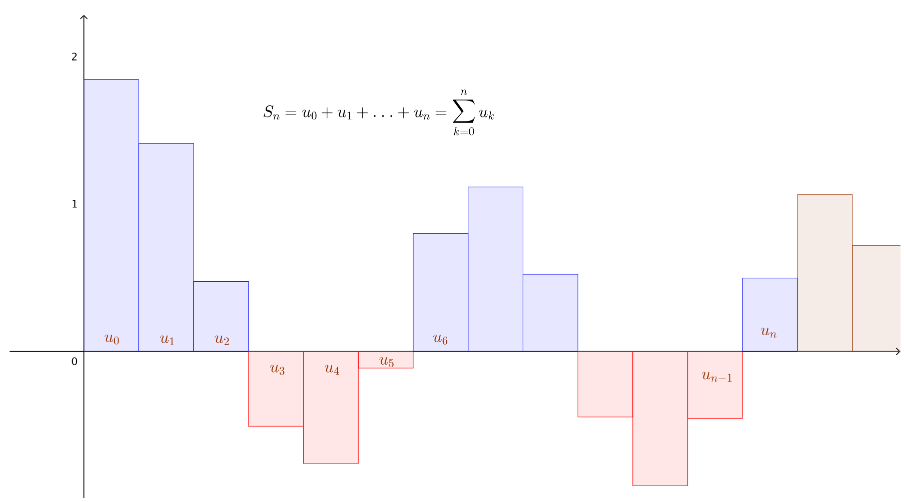
La **démarche** sera la suivante :
— Disposer d'un certain nombre de séries de référence dont nous connaîtrons la nature ;
— Établir ensuite des propriétés générales qui permettent de ramener l'étude d'une série à termes positifs à celle d'une série de référence.

Mais, tout d'abord, **pourquoi étudier les séries à termes positifs** ? C'est le sujet du premier exercice.

1. Soit (u_n) une suite à termes positifs et soit, pour chaque entier naturel n : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
   (a) En s'inspirant du graphique ci joint, interpréter S_n comme l'aire d'une partie du plan.



(b) Et si les u_n n'étaient pas tous positifs, pourrait-on encore interpréter S_n comme une aire ?



2. *Mais qu'ont donc de si spécial les séries à termes positifs ?*

   (a) Avez-vous le souvenir d'une propriété qui permet de montrer qu'une suite est convergente sans avoir besoin de calculer sa limite ?

   (b) Soit $\sum u_n$ une série numérique. On note :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

   À quelle condition la suite (S_n) est-elle croissante ?

   (c) On suppose maintenant que la suite (u_n) est à termes positifs.

   — On suppose que la suite (S_n) est majorée. Que peut-on dire de la série $\sum u_n$?

   — On suppose que la suite (S_n) n'est pas majorée. Que peut-on dire de la série $\sum u_n$?

   (d) On suppose à nouveau que la suite (u_n) est à termes positifs. Établir un schéma logique qui relie les deux affirmations :

   — La série $\sum u_n$ est convergente ;

— La suite (S_n) est majorée.

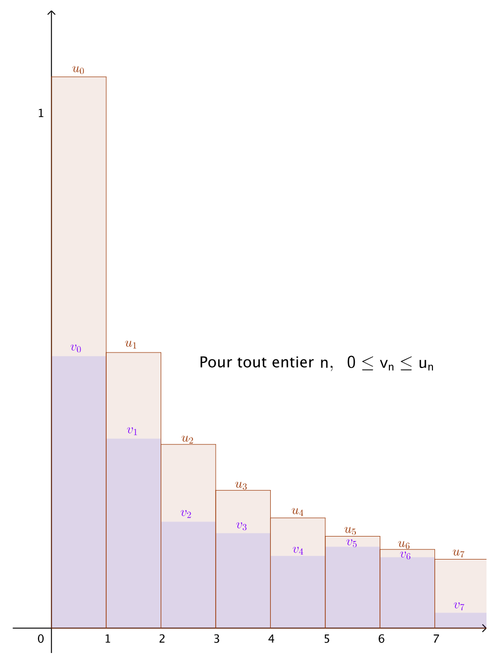
(e) *Question subsidiaire.* Revenir sur la série dont les sommes partielles sont notées Q_N dans l'exercice 3 du paragraphe précédent. La suite (Q_n) est-elle majorée ? La série est-elle convergente ? Que pouvez-vous conclure ?

(f) Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours la question 2 démontre-t-elle ?

3. *Comparaison par majoration ou minoration de deux séries à termes positifs.* Cet exercice utilise le résultat démontré dans l'exercice 2

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq v_n \leq u_n.$$



(a) Pouvez-vous conjecturer le ou les liens logiques entre les deux affirmations suivantes ?

— La série $\sum u_n$ est convergente ;

— La série $\sum v_n$ est convergente.

Indication. Si l'on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, peut-on comparer S_n et T_n ?

(b) Démontrer vos conjectures.

(c) Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours le début de la question 2 démontre-t-elle ?

(d) Peut-on déduire de ce qui précède la nature des séries suivantes ?

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n+1} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} (5^n+n)$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n-1} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} (5^n-1)$$

Indication. Comparer le terme général de ces séries avec celui de séries plus simples déjà vues.

4. Utiliser le résultat obtenu à l'exercice 2 pour imaginer des exemples de séries convergentes et divergentes.

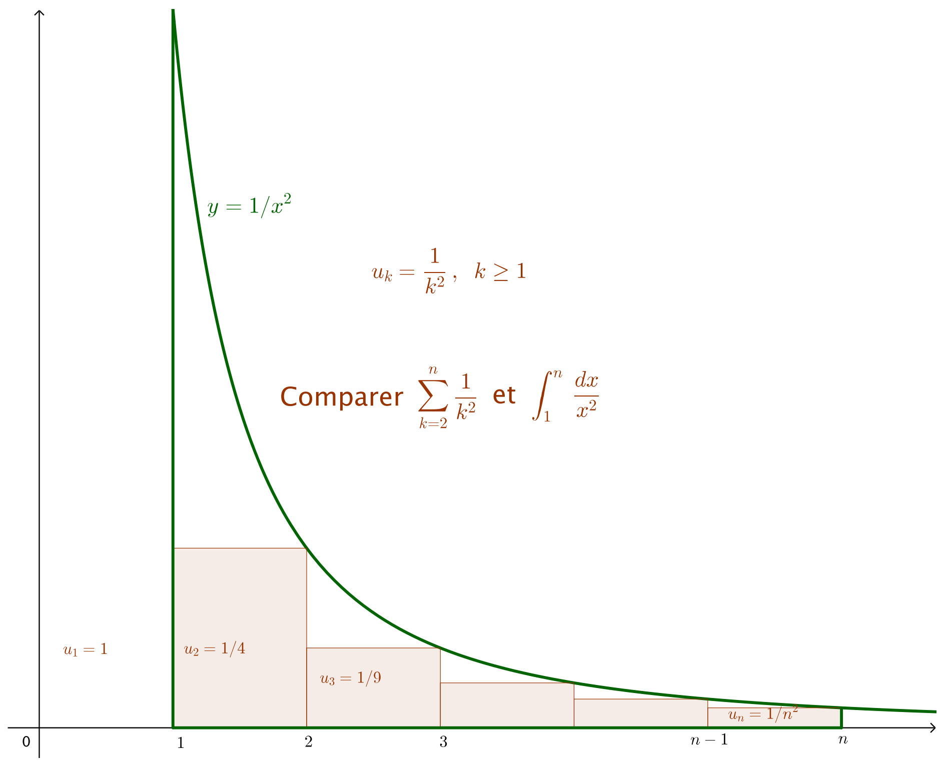
5. *À la recherche d'autres séries de référence : les séries de Riemann.*

(a) ⋆⋆ On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2}$. Comme u_0 n'est pas défini, les sommes partielles sont définies ici par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

i. ⋆⋆ Soit $n \geq 2$. En utilisant le graphique ci-joint pour se donner des idées, comparer les deux quantités :

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \quad U_n = \int_1^n \frac{dx}{x^2}.$$



ii. ⋆ ⋆ Étudier les propriétés de la suite (U_n) : est-elle monotone ? convergente ? bornée ?

iii. ⋆ ⋆ En déduire que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.

(b) ⋆ ⋆ Soit α un nombre réel positif ou nul. La **série de Riemann** de paramètre α est la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Comme à la question précédente, on constate que u_0 n'est pas défini, aussi les sommes partielles de la série sont définies par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Refaire tout le raisonnement de la question précédente en remplaçant 2 par α. Pour quelles valeurs de α est-il encore valable ?

(c) ⋆ ⋆ Que peut-on dire dans le cas $\alpha = 1$? (Utiliser sa mémoire ...)

(d) ⋆ ⋆ On suppose que $0 \leq \alpha < 1$. Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, comparer $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^\alpha}$ puis utiliser le résultat de l'exercice 2 pour étudier la nature de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

(e) Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours la question 5 démontre-t-elle ?

6. En utilisant l'exercice 2 et les séries de référence déjà vues, peut-on étudier la nature des séries suivantes ?

$$(A) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{n^3+1} \qquad (B) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2-1}{n^4} \qquad (C) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n+1}{n^4} \qquad (D) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n}-1} \qquad (E) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$$

7. En utilisant l'exercice 2 et les séries de référence déjà vues, étudier la nature des séries suivantes :

$$(a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{5n^4+n}; \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sin^2 n};$$

$$(c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{4+\cos n}; \qquad (d)\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}};$$

$$(e)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}; \qquad (f)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\ln n};$$

$$(g)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^3}; \qquad (h)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n};$$

8. ⋆ *Utilisation des croissances comparées.*
   (a) ⋆ Rappelez-vous la limite des suites (u_n) définies par :
      i. $u_0 = 0$ et $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$ pour ≥ 1 ;
      ii. $u_0 = 0$ et $u_n = \dfrac{\ln n}{n^\alpha}$ pour ≥ 1, où $\alpha > 0$;
      iii. $u_n = \dfrac{n^4}{e^n}$;
      iv. $u_n = \dfrac{n^p}{a^n}$, avec $p > 0$ et $a > 1$.
   (b) ⋆ On se rappelle que si une suite (u_n) tend vers 0, alors on a : $u_n \leq 1$ à partir d'un certain rang. C'est-à-dire qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq 1$ pour tout $n \geq N$. Voyez-vous comment utiliser cela pour démontrer que la série

   $$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln n}{n^3}$$

   est convergente ?
   (c) ⋆ Étudier de la même manière la nature de la série suivante :

   $$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2}{e^n}$$

   (*Indication :* à partir d'un certain rang, on a : $e^n \geq n^4$. Pourquoi ?)
   (d) ⋆ Étudier de la même manière la nature de la série suivante :

   $$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$$

   (*Indication :* à partir d'un certain rang, on a : $\ln n \leq n^{1/2}$. Pourquoi ?)
9. ⋆ Dans les exemples suivants, quelles sont les séries pour lesquelles il est utile d'appliquer les propriétés de croissance comparées pour étudier leur convergence ? Pour quelles séries est-ce inutile ?

$$(A)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln n}{n} \quad (B)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4\ln n} \quad (C)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln n}{2^n} \quad (D)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{ne^n} \quad (E)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(\ln n)^2}{e^n}$$

Étudier la convergence de ces séries.

10. ⋆ ⋆ En utilisant des croissances comparées, étudier la nature des séries suivantes :

$$(a) \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^{\sqrt{n}}}{e^n}; \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}};$$

$$(c) \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^2}; \qquad\qquad (d) \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2}{(\ln n)^{\ln n}}.$$

(comparer avec $1/n$)   *(comparer avec $1/n^2$).*

11. ⋆ ⋆ Imaginer deux exemples de séries dont la convergence s'étudie avec les propriétés des croissances comparées ; puis deux exemples de séries dont le terme général contient $\ln n$ ou 2^n et n^2 et pour lesquelles il n'est pas utile d'utiliser les proporétés des croissances comparées.

12. *Utilisation de la comparaison par équivalents.* On rappelle que si une suite (ϵ_n) tend vers 0, alors on a pour n assez grand :

$$-\frac{1}{2} \leq \epsilon_n \leq \frac{1}{2}$$

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs. On suppose que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.$$

(a) Vérifier que, pour tout n assez grand, on a :

$$\frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n.$$

(b) Démontrer que si la série $\sum v_n$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ l'est aussi.

(c) Démontrer que les deux séries sont de même nature.

(d) Dans les questions précédentes, où a-t-on utilisé le fait que les deux suites (u_n) et (v_n) sont à termes positifs ?

(e) Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours la question 12 démontre-t-elle ?

13. En utilisant le résultat démontré, étudier la nature des séries suivantes.

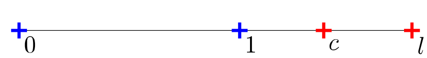
$$(a) \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2+n+1}{3n^4-2n+3}; \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n-1}{3n^2+2};$$

$$(c) \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2-\sin n}; \qquad\qquad (d) \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2}{\sqrt{n-1}+\ln(n+1)}.$$

14. *Critère de d'Alembert.* On considère une suite à termes strictement positifs (u_n) et l'on suppose que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

(a) ⋆ ⋆ Dans cette première question, on suppose que $l > 1$.



On choisit un réel c tel que $1 < c < l$. Puisque u_{n+1}/u_n tend vers l, alors pour tout n assez grand, on a : $u_{n+1}/u_n > c$. En déduire que la suite (u_n) tend vers l'infini. Que peut-on en déduire sur la nature de la série $\sum u_n$?

(b) ⋆ ⋆ Dans cette deuxième question, on suppose que $l < 1$.

On choisit alors un réel c tel que $l < c < 1$. Puisque la suite u_{n+1}/u_n tend vers l, alors à partir d'un certain rang N, on a : $u_{n+1}/u_n < c$.

i. ⋆ ⋆ Vérifier que, pour tout $n > N$, on a : $u_n < c^{n-N} u_N$.

ii. ⋆ ⋆ Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c^n c^{-N} u_N$?

iii. ⋆ ⋆ Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$?

(c) On suppose que $u_n = 1/n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la valeur de l ? La série est-elle convergente ?

(d) On suppose que $u_n = 1/n^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la valeur de l ? La série est-elle convergente ?

(e) Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours la question 14 démontre-t-elle ?

15. Utiliser le critère démontré pour étudier la nature des séries suivantes :

$$(a) \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2^n n!}{n^n};$$

$$(c) \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\, x^n \quad \text{avec } x > 0;$$

Séries à termes quelconques

Code pour les questions

— Sans étoile : Niveau exigible pour tout le monde.
— $\star$: Niveau exigible pour tout le monde mais moins importante.
— $\star\star$: Niveau pour aller plus loin (exigible pour ceux qui prétendent aux écoles gei)
— En violet : question menant à un théorème, proposition qu'on peut trouver dans le bilan de cours. Peut être passé en cas de retard mais nécessaire pour comprendre en profondeur.

Le déroulé attendu : nombre de séances et objectifs

1. Comprendre et utiliser le théorème de convergence absolue : questions 1 et 2.
2. Comprendre et utiliser le critère des séries alternées : questions 3 et 4.
3. S'entraîner à l'étude de séries : questions 5 à la fin.

Le contenu du cours

Dans le chapitre précédent, nous avons vu plusieurs outils permettant d'étudier la nature d'une série à termes positifs en se ramenant à des séries de référence déjà connues. Tous ces outils étaient basés sur le fait que la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est croissante, et qu'une suite croissante est convergente dès qu'elle est majorée.
Pour étudier une série à termes de signes quelconque, on ne peut plus utiliser ces outils. Une première méthode consiste à essayer de se ramener à l'étude d'une série à termes positifs, c'est le sujet des deux premiers exercices.

Objectifs disciplinaires :

— Comprendre quelle est l'utilité du théorème de convergence absolue.
— Comprendre graphiquement pourquoi une série peut converger sans converger absolument (série alternée).
— Savoir étudier la convergence de certaines séries de signes non constant en utilisant le théorème sur la convergence absolue et celui des séries alternées.

1. $\star$ **Convergence absolue**

   (a) $\star$ Si x est un nombre réel, on note x^+ sa partie positive et x^- sa partie négative, c'est-à-dire :

$$\text{si } x \geq 0 \quad \text{on pose : } \begin{cases} x^+ = x \\ x^- = 0 \end{cases}$$
$$\text{si } x < 0 \quad \text{on pose : } \begin{cases} x^+ = 0 \\ x^- = -x \end{cases}$$

   i. $\star$ Déterminer x^+ et x^- quand $x = 4$ et $x = -3$.

   ii. $\star$ Démontrer que, pour tout réel x, on a :

$$x = x^+ - x^- \quad \text{et} \quad |x| = x^+ + x^-$$

   et que :

$$0 \leq x^- \leq |x| \quad \text{et} \quad 0 \leq x^+ \leq |x|.$$

(b) ⋆ Soit (u_n) une suite de nombres réels. On suppose que la série $\sum |u_n|$ est convergente.

i. ⋆ Démontrer que les deux séries $\sum (u_n)^+$ et $\sum (u_n)^-$ sont convergentes.

ii. ⋆ En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente.

Définition 6:

On dit qu'une série $\sum u_n$ converge absolument si la série $\sum |u_n|$ converge.

(c) Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours la question 1 démontre-t-elle ?

2. Étudier la convergence absolue des séries suivantes. En déduire la nature de ces séries lorsque c'est possible. Dans cette question, x est un réel quelconque, la convergence de la série dépend peut-être de la valeur de x.

$$(a) \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n^3+2)}{n^4+n}; \qquad (b) \quad \sum_{n\geq 1} \frac{n^2 \sin n - 1}{2^n - 2\ln n};$$

$$(c) \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n^4 + \sin n}; \qquad (d) \quad \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!};$$

$$(e) \quad \sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+1}{2n}\right) x^n; \qquad (f) \quad \sum_{n\geq 0} \frac{\sin(nx)}{n^2+1}.$$

$$(g) \quad \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^2-5n+3}; \qquad (h) \quad \sum_{n\geq 0} \frac{\cos(e^{nx})}{n^2+\ln n}.$$

3. ⋆ **Un premier exemple de série convergente qui ne converge pas absolument** Considérons la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

(a) ⋆ Représenter graphiquement les termes successifs de la suite des sommes partielles (S_N) définie pour tout N entier non nul par $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n}$. Que pouvez-vous conjecturer sur le comportement de la suite (monotonie,convergence, divergence) ?

(b) ⋆ Dessinez sur le même graphe, les suites (S_{2N}). Que pouvez-vous conjecturer sur le comportement de la suite (monotonie,convergence, divergence) ?

(c) ⋆ Même question pour (S_{2N+1}). Quels liens pouvez-vous faire entre ces deux suites ?

(d) ⋆ Démontrer que les suites (S_{2N}) et (S_{2N+1}) sont adjacentes.

(e) ⋆ On admet que si pour une suite (u_n), les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite alors (u_n) converge vers cette même limite. Démontrez que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

4. **Généralisation : les séries alternées** On considère maitenant une suite de la forme $\sum (-1)^n u_n$.

(a) ⋆ Quelles propriétés la suite (u_n) doit-elle avoir pour que la démonstration faite dans l'exemple ci-dessus reste vraie et que la sérié $\sum (-1)^n u_n$ converge ?

(b) ⋆ Ecrire le résultat obtenu dans votre résumé de cours.

(c) ⋆ Est-ce que toute série de la forme $\sum (-1)^n u_n$ converge ?

(d) Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours les questions 4 et 4 démontrent-t-elle ?

5. **Nature de séries à termes quelconques :**

(a) Proposez un schéma résumant la démarche de l'étude de la nature d'une série.

(b) Etudier la nature des séries suivantes en deux étapes :

D'abord deviner sans rien rédiger si ces séries vont converger absolument, converger ou diverger et quel outil vous allez utiliser : théorème de comparaison à majoration, à équivalents, d'Alembert, critère des séries alternées ? Ensuite rédigez proprement la résolution.

i. $\sum_{n\in\mathbb{N}} 1$.

ii. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^n}{n!}$.

iii. $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{(-1)^n}{n2^n}$.

iv. $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} (-1)^n\frac{\sin(n)}{n^4}$.

v. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2-(-1)^n n}{2^n+n^3}$.

vi. $\sum_{n\geq 2} \frac{n^2}{\ln(n)}$.

vii. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{3^n\ln(n)}$.

viii. $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{n^2}{n^4+10n}$.

ix. $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

x. $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}$.

xi. $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{-1-\sin n}{n^2}$.

xii. $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{1}{n\cos(n)^2}$.

xiii. $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$.

xiv. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$.

xv. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a^n}{3-\cos(n)}$, $0\leq a<1$.

xvi. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^5+(-1)^n\cos(n)}{n^7-12n^3+5}$.

xvii. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^3\ln(n)}$.

xviii. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$.

xix. $\sum_{n\geq 2} \frac{\ln(n)}{n^{1/4}}$.

6. D'autres exercices : Dans les exercices suivants, ne perdez pas de vue les compétences essentielles : savoir tester sur des exemples, savoir conjecturer un résultat et enfin le démontrer.

   (a) Soit x un réel, la série $\sum nx^n$ est-elle convergente ?

   (b) Même question pour $\sum \sin(n)x^n$.

7. ⋆ ⋆ La transformation d'Abel : Intégrer par parties dans $\mathbb{N}$

   Soit (b_n) une suite positive, décroissante et de limite nulle. Soit (a_n) une suite telle que la suite des sommes partielles (A_n), $A_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$ est bornée. Soit $S_n=\sum_{k=0}^{n} a_kb_k$.

   (a) Démontrer que $\sum_{k=0}^{n}\sin(k)$ définit une suite bornée en remarquant que $\sin k=\Im(e^{ik})$. On essaiera de faire apparaître le somme partielle d'une série géométrique.

   (b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2, \sum_{k=1}^{n} a_kb_k=\sum_{k=1}^{n-1}A_k(b_k-b_{k+1})+A_nb_n-A_0b_1$. Pour cela, vous écrirez que $a_k=A_k-A_{k-1}$, vous développerez et ferez un changement d'indice. Faire une analogie terme à terme entre la formuler d'intégration par parties et cette formule.

   (c) Quelle est la limite de A_nb_n ? Démontrez à l'aide d'un théorème de comparaison (en n'oubliant pas que (A_k) est bornée que $\sum_{k=1}^{n-1}A_k(b_k-b_{k+1})$ a une limite quand $n\to+\infty$. En déduire que $\sum a_kb_k$ converge.

   (d) Démontrer que $\forall\alpha>0, \sum\frac{\sin(k)}{k^\alpha}$ converge à l'aide des questions précédentes.

Intégrales généralisées : définitions, calculs

Code pour les questions

- Sans étoile : Niveau exigible pour tout le monde.
- $\star$: Niveau exigible pour tout le monde mais moins importante.
- $\star\star$: Niveau pour aller plus loin (exigible pour ceux qui prétendent aux écoles gei)
- En violet : question menant à un théorème, proposition qu'on peut trouver dans le bilan de cours. Peut être passé en cas de retard mais nécessaire pour comprendre en profondeur.

1. **Rappels : primitives usuelles à connaître.** Déterminer les primitives des fonctions f définies par les relations suivantes :
   (a) $f(t) = \dfrac{1}{t}$;
   (b) $f(x) = \cos x$;
   (c) $f(y) = \sin y$;
   (d) $f(s) = \cos^3 s \ \sin s$;
   (e) $f(x) = \cos^2 x$;
   (f) $f(x) = \ln x$;
   (g) $f(y) = e^y$;
   (h) $f(a) = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$;
   (i) $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{Z}$;
   (j) $f(x) = x^y, \quad y \in \mathbb{R}$;
   (k) $f(y) = x^y, \quad x > 0$;
   (l) $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$;
   (m) $f(t) = \dfrac{1}{(t+4)(t-3)}$;
   (n) $f(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$.

2. **Rappel : calcul d'intégrales.** Calculer les intégrales suivantes.
   (a) $I = \displaystyle\int_0^3 (x^2+2)\ dx$;
   (b) $I_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin t\ dt$;
   (c) $I = \displaystyle\int_0^{3/2} \cos(\pi t)\ dt$;
   (d) $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x \cos x\ dx$;
   (e) $I(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{t}{t^2+1}\ dt$;
   (f) $\star\star$ $I(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\ dt$ (IPP) ;
   (g) $I = \displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cos x\ dx$;
   (h) $I(t) = \displaystyle\int_0^{\pi} 2x\ e^{xt}\ dx$;
   (i) $I = \displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dt}{t(\ln t)^2}$;
   (j) $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{dy}{y(1+2y)}$;
   (k) $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{1+2e^x}$;
   (l) $\star$ $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

3. **Intégrales généralisées : intégrale sur $[a,+\infty[$ d'une fonction continue sur $[a,+\infty[$.** Dans chacun des trois cas suivants :
   - déterminer l'intervalle (ou les intervalles) où la fonction à intégrer est définie et continue ;
   - calculer $I(c)$;
   - si la limite existe, calculer $\lim\limits_{c\to+\infty} I(c)$.

   (a) $I(c) = \displaystyle\int_1^c \frac{dt}{t^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$.
   (b) $I(c) = \displaystyle\int_1^c e^{-\alpha x} dx$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (c) $I(c) = \displaystyle\int_2^c \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

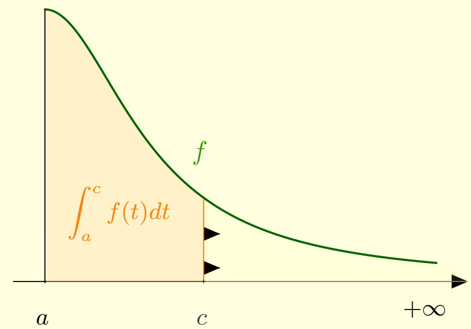
Définition 7: Intégrale généralisée sur un intervalle $[a, +\infty[$

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, +\infty[$ et soit $I(c) = \int_a^c f(t)dt$, pour $c \geq a$.

Si $I(c)$ admet une limite quand c tend vers $+\infty$, on la note : $\int_a^{+\infty} f(t)dt$. Ainsi :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(t)dt.$$

Attention : cette limite n'existe pas toujours.



Quand cette limite **existe et est finie**, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est **convergente**. Dans le cas contraire, l'intégrale est dite **divergente**.

4. **Exemples**

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \quad ? \qquad \int_\pi^{+\infty} \cos t = \quad ? \qquad \int_2^{+\infty} e^{-3x}dx = \quad ?$$

5. **Intégrales généralisées : intégrale sur un intervalle $]a, b]$ d'une fonction continue sur $]a, b]$.**
   Dans chacun des trois cas suivants :
   - déterminer l'intervalle (ou les intervalles) où la fonction à intégrer est définie et continue ;
   - calculer $I(c)$;
   - si la limite existe, calculer $\lim_{c \to 0} I(c)$.

$$(a) \;\; I(c) = \int_c^1 \frac{dt}{t^\alpha}, \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \qquad\qquad (b) \;\; I(c) = \int_c^1 \ln x \; dx.$$

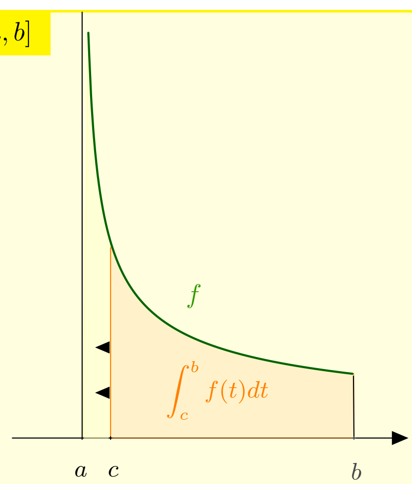
$$(c)\star \;\; I(c) = \int_c^1 \frac{dx}{x|\ln x|^\alpha}, \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Définition 8: Intégrale généralisée sur un intervalle $]a, b]$

Soit f une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert $]a, b]$ et soit $I(c) = \int_c^b f(t)dt$, pour $c \in]a, b]$. Si $I(c)$ admet une limite quand c tend vers a, on la note : $\int_a^b f(t)dt$. Ainsi :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(t)dt.$$

Attention : cette limite n'existe pas toujours.



Quand cette limite **existe et est finie**, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est **convergente**. Dans le cas contraire, l'intégrale est dite **divergente**.

Attention : une intégrale généralisée est définie comme une **limite**. Si cette limite n'existe pas, l'intégrale généralisée correspondante n'a pas de sens. Par exemple, l'écriture $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos x\, dx$ n'a aucune signification mathématique.

6. **Premiers exemples** Les intégrales suivantes sont des intégrales généralisées. Pourquoi ? Quelle est la définition précise de chacune d'entre elles ? Calculer ces intégrales quand c'est possible.

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \quad ? \qquad \int_0^1 \ln t \; dt = \quad ?$$

7. Mêmes questions que dans l'exercice précédent.

   (a) $I = \displaystyle\int_0^1 x^2 \ln x \; dx.$;

   (b) $I(s) = \displaystyle\int_0^1 x^s \ln x \; dx,\ s \in \mathbb{R}$;

   (c) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^2+1}$;

   (d) $\star$ $I(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+4y^2x^2}$;

   (e) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$;

   (f) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(2+\sin x)^2}\; dx$;

   (g) $\star\star$ $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}\; dx.$

   (h) $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dy}{y(1+2y)}$;

   (i) $I(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x\; e^{-px}\; dx,\ p \in \mathbb{R}$;

   (j) $\star\star$ $I(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x\; e^{-x}\; dx$

   (k) $I = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}.$

   (l) $I = \displaystyle\int_1^{e} \frac{dt}{t\sqrt{\ln t}}.$

Proposition 2: Intégrales généralisées de référence

— L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

— L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

— L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\; dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

— L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln t\; dt$ est convergente.

8. $\star$ **Intégrale faussement généralisée**. On considère la fonction f définie par :

$$\forall x > 0 \;\; f(x) = x \ln x.$$

(a) Quel est le domaine de définition de la fonction f ?

(b) Quelle est la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 ?

(c) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La fonction g est-elle continue en 0 ? L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(x)\ dx$ est-elle une intégrale généralisée ?

(d) Expliquer pourquoi on a :

$$\forall c \in]0,1] \quad \int_c^1 f(x)\ dx = \int_c^1 g(x)\ dx.$$

(e) Expliquer, sans calcul, pourquoi l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$ est convergente et pourquoi on a :

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 g(x)\ dx.$$

(f) Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$.

Proposition 3: Intégrale faussement généralisée

Soient a et b deux réels et f une fonction continue sur un intervalle $]a,b]$. Si f admet une limite finie l en a, alors l'intégrale généralisée :

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

est convergente.

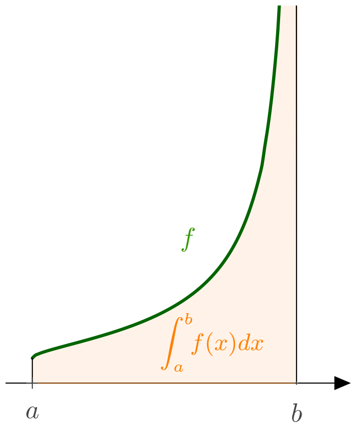
(g) ⋆ ⋆ En s'inspirant des questions précédentes, rédiger une démonstration de cette proposition.

9. (a) La proposition 3 est-elle encore vraie si $b = +\infty$?

(b) Soit f une fonction continue sur $[1,+\infty[$. On suppose que $f(x)$ tend vers une limite finie l en $+\infty$. Peut-on en déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\ dx$ est convergente ?

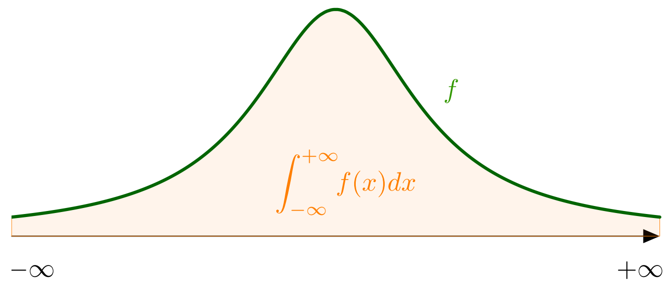
(c) ⋆ ⋆ Soit f une fonction continue sur $[1,+\infty[$. Si l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente, peut-on en déduire que $f(x)$ tend vers 0 à l'infini ?

10. **Autres cas :** Comment définir l'intégrale généralisée correspondant à chacune des situations suivantes ?



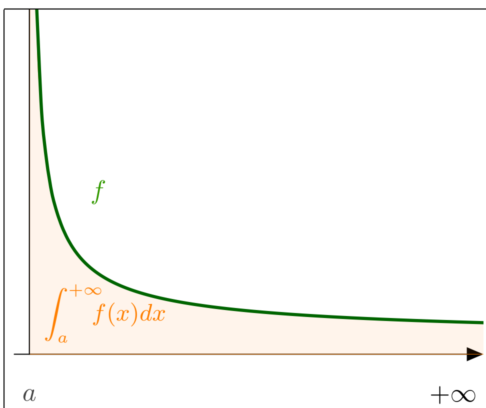
A. f continue sur $[a, b[$

$$\int_a^b f(x)\ dx =$$



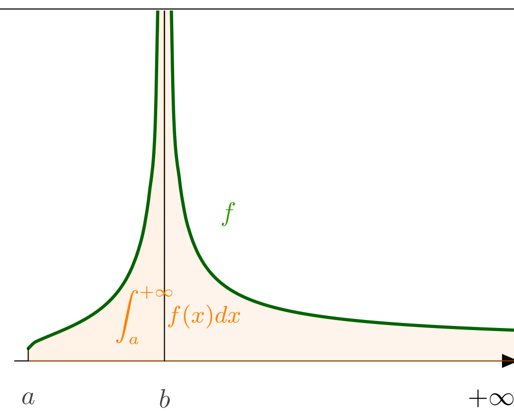
C. f continue sur $\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx =$$



B. f continue sur $]a, +\infty[$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx =$$



D. f continue sur $[a, +\infty[\backslash\{b\}$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx =$$

11. **Exemples** Les intégrales suivantes sont-elles des intégrales généralisées ? Où sont situés leurs problèmes de définition ? Comment les calculer ?

(a) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$;

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$;

(c) $\displaystyle\int_{1/2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{|x-1|}}$; l'exercice 2f pourra être utile.

(d) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t\sqrt{|\ln t|}}$.

(e) $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2}$.

Equivalents de fonctions

Code pour les questions

- Sans étoile : Niveau exigible pour tout le monde.
- $\star$: Niveau exigible pour tout le monde mais moins importante.
- $\star\star$: Niveau pour aller plus loin (exigible pour ceux qui prétendent aux écoles gei)
- En violet : question menant à un théorème, proposition qu'on peut trouver dans le bilan de cours. Peut être passé en cas de retard mais nécessaire pour comprendre en profondeur.

Le contenu du cours

Définition 9:

On dit que deux fonctions f et g définies sur un intervalle I sont équivalentes en $a \in I$ s'il existe une fonction ϵ tendant vers 0 quand t tend vers a telle que pour tout réel t de I, $f(t) = g(t)(1+\epsilon(t))$. On note alors $f(t) \underset{t\to a}{\sim} g(t)$

Nous vous donnons maintenant la définition "officieuse", c'est celle-ci dont vous vous servirez pour les questions qui suivent.

Définition 10: Cas particulier

On dit que deux fonctions f et g non nulles définies sur un intervalle I sont équivalentes en $a \in I$ si $\dfrac{f(t)}{g(t)} \underset{t\to a}{\longrightarrow} 1$.

1. **Equivalents de somme**
   (a) Trouvez des fonctions qui sont équivalentes à 1 en $+\infty$ puis en 0.
   (b) Déterminez des équivalents de $t + t^2 + 2t^3$ en $+\infty$. Déterminez-en ensuite l'équivalent le plus simplifié.
   (c) Reprendre la question précédente en remplaçant $+\infty$ par 0.
   (d) Soit $k > l \geq 0$, entre t^k et t^l qui est négligeable devant qui en $+\infty$? en 0 ? en 1 ? Donnez alors l'équivalent le plus simple en chacun de ces points.
   (e) Etant donné une fonction f et une autre fonction g négligeable devant f au voisinage de a (la limite de $\dfrac{g(t)}{f(t)}$ tend vers 0 quand $x \longrightarrow a$), peut-on trouver un équivalent de $f+g$?
   (f) Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours la question 1c démontre-t-elle ?
   (g) Reprenez les équivalents de la question 1b en utilisant le résultat obtenu aux questions précédentes.
2. **Opérations sur les équivalents**
   (a) $\star$ On suppose que $f(t) \underset{x\to a}{\sim} g(t)$ et $h(t) \underset{t\to a}{\sim} i(t)$. Démontrez que :
      i. $f(t)h(t) \underset{t\to a}{\sim} g(t)i(t)$.
      ii. $\dfrac{f(t)}{h(t)} \underset{t\to a}{\sim} \dfrac{g(t)}{i(t)}$ si h et i ne s'annulent pas au voisinage de a.
   (b) Déterminez l'équivalent le plus simple de $\dfrac{3t^2+\ln(t)}{t+4e^t}$ en exploitant la question 2a.

(c) Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours la question 2 démontre-t-elle ?

3. **Entraînez-vous !** Déterminez l'équivalent le plus simple des quantités suivantes : Déterminez l'équivalent le plus simple au voisinage de $+\infty$ de

$$t^2 + t, 2t + \ln(t), t - \sin(t), \frac{t + \ln(t)}{\ln(t) + t^2}, \frac{t^2 - t}{-10t^2 + 2\sqrt{t}}$$

.

4. **Entraînez-vous !** Déterminez l'équivalent le plus simple au voisinage de 0 de

$$t^2 + t, \frac{t + \ln(t)}{\ln(t) + t^2}, \frac{t^2 - t}{-10t^2 + 2\sqrt{t}}.$$

Intégrales généralisées de fonctions positives

Code pour les questions

- Sans étoile : Niveau exigible pour tout le monde.
- ⋆ : Niveau exigible pour tout le monde mais moins importante.
- ⋆ ⋆ : Niveau pour aller plus loin (exigible pour ceux qui prétendent aux écoles gei)
- En violet : question menant à un théorème, proposition qu'on peut trouver dans le bilan de cours. Peut être passé en cas de retard mais nécessaire pour comprendre en profondeur.

Le contenu du cours

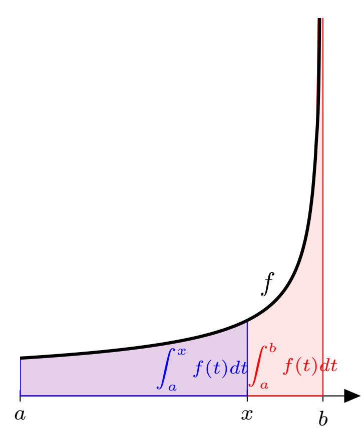
Dans les paragraphes précédents, nous avons étudier la convergence d'intégrales généralisées en les calculant. L'outil primitive permet de calculer beaucoup plus d'intégrales qu'on ne pouvait calculer des séries. Cependant, de nombreuses intégrales doivent se traiter sans calcul. Nous allons voir que l'étude des intégrales généralisées est en beaucoup de points analogue à celle des séries. Dans ce paragraphe, nous étudions uniquement les intégrales généralisées à termes positifs.

La **démarche** sera la suivante :

- Disposer d'un certain nombre d'intégrales de référence (fait précédemment) ;
- Établir ensuite des propriétés générales qui permettent de ramener l'étude d'une intégrale généralisée à termes positifs à celle d'une intégrale généralisée de référence.

Mais, tout d'abord, **pourquoi étudier les séries à termes positifs** ? C'est le sujet du premier exercice.

1. *Spécificités des intégrales généralisées positives.* Soit une fonction f continue sur $[a, b[$, positive. Définissons la fonction $F : x \in [a, b[\mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. Ici la lettre b désigne soit un réel strictement supérieur à a soit $+\infty$.
   (a) Sur le graphique ci-contre, à quoi correspond $F(x)$ géométriquement.
   (b) En observant le graphique ci-contre, devinez quelle sera la monotonie de F sur $[a, b[$.
   (c) Démontrez alors votre conjecture (vous comparerez $F(x)$ et $F(y)$ pour $x < y$).
   (d) Que dire alors de F si
      - F est majorée sur $[a, b[$.
      - F n'est pas majorée sur $[a, b[$.
   (e) Établir un schéma logique qui relie les deux affirmations :
      - $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge ;
      - F est majorée sur $[a, b[$.
   (f) Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours la question 1 démontre-t-elle ?
   (g) Ecrire un résultat semblable pour l'intégrale sur un intervalle $]a, b]$ d'une fonction continue sur $]a, b]$ où $-\infty \leq a < b$.



2. *Comparaison par majoration ou minoration de deux intégrales généralisées à termes positifs.* Cet exercice utilise le résultat démontré dans l'exercice 1

(a) Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b[$ telles que, pour tout t dans $[a,b[$:

$$0 \leq f(t) \leq g(t).$$

(b) Pouvez-vous conjecturer le ou les liens logiques entre les deux affirmations suivantes ?

— L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente ;

— L'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ est convergente.

Indication. Si l'on note $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ et $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)dt$, peut-on comparer F et G ?

(c) Démontrer vos conjectures.

(d) Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours le début de la question 2 démontre-t-elle ?

(e) Ecrire un résultat semblable pour l'intégrale sur un intervalle $]a,b]$ d'une fonction continue sur $]a,b]$ où $-\infty \leq a < b$.

(f) Peut-on déduire de ce qui précède la nature des intégrales généralisées suivantes ? Commencez par déterminer le(s) problème(s) de définition.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx \qquad \int_2^{+\infty} \frac{1}{t-1}dt, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}dx$$

3. Etudiez la nature des intégrales généralisées suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dt}{t+5\sqrt{t}}$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+2}}$

(c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u-1}du$

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)^2}{t^4+6}dt$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx$

(f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^3+\sqrt{t}}dt$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(t^2+2)(3+5t)}dt$

(h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{3-\cos(x)}dx$

4. ⋆ *Croissances comparées :* En utilisant des arguments de croissances comparées (inspirez-vous de ce que vous aviez fait pour les séries), déterminez la nature des intégrales suivantes.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}dx$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\ln(t)}dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(x)e^{-x}dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$

(e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u^3}{(u+1)(e^u-1)}du$

5. ⋆ *Utilisation de la comparaison par équivalents.* On rappelle que si une fonction (ϵ) tend vers 0 quand x tend vers b, alors on a pour x suffisamment proche de b :

$$-\frac{1}{2} \leq \epsilon(x) \leq \frac{1}{2}$$

Soient f et g deux fonctions à termes positifs continues sur $[a,b[$. On suppose que

$$f(x) \underset{b}{\sim} g(x).$$

(a) ⋆ Vérifier que, pour tout x suffisamment proche de b, on a :

$$\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x).$$

(b) ⋆ Démontrer que si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ est convergente, alors la série $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ l'est aussi.

(c) ⋆ Démontrer que les deux intégrales sont de même nature.

(d) Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours la question 5 démontre-t-elle ?

6. Etudiez la nature des intégrales généralisées suivantes :

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t+\sin(t)}{t+e^{-t}}dt$ (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[6]{t}+10}{\sqrt[3]{t}+\sqrt[4]{t^2}}dt$;

7. Reprendre la question 3 en utilisant cette fois le théorème de comparaison par équivalents et en identifiant au préalable celles qui peuvent se traiter via cet outil.

8. $\star\star$ *Et si le pb de définition est ailleurs qu'en* 0 *et* $+\infty$ *?*

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}-t}dt$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t^3-t^5}}dt$

Complément : comparaison séries-intégrales

Code pour les questions

— Sans étoile : Niveau exigible pour tout le monde.

— ⋆ : Niveau exigible pour tout le monde mais moins importante.

— ⋆ ⋆ : Niveau pour aller plus loin (exigible pour ceux qui prétendent aux écoles gei)

— En violet : question menant à un théorème, proposition qu'on peut trouver dans le bilan de cours. Peut être passé en cas de retard mais nécessaire pour comprendre en profondeur.

Nous avons constaté dans le chapitre sur les séries que la série de Riemann $\sum_{n\in N^*} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ puis, dans le chapitre sur les intégrales généralisées, que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ est convergente sous le même condition $\alpha > 1$.
L'objectif de ce chapitre est de comprendre le lien qui peut exister entre une intégrale généralisée de la forme $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ et la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ définie par la même fonction f.
L'idée sera de généraliser le raisonnement fait à l'exercice 5, page 9. Ce chapitre est réservé à ceux qui ont fait cet exercice.

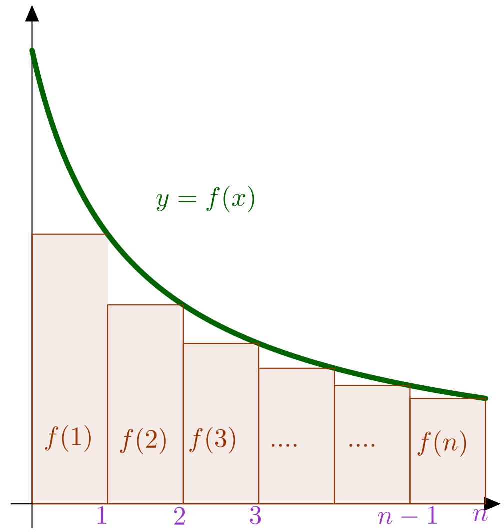
1. ⋆ ⋆ Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction f est décroissante et à valeurs positives ou nulles.

   L'objectif de cet exercice est de comparer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} f(k)$.

   (a) Dans cette première question, on suppose que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ est convergente.

      i. Pour chaque entier naturel n, on note :
      $$U_n = \int_0^n f(x)\, dx.$$
      La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

      ii. Soit $n \geq 1$. En utilisant le graphique ci-joint pour se donner des idées, comparer U_n et la somme partielle : $T_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$.



iii. En déduire que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et donc que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ est convergente.

Donner une majoration de $T = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$.

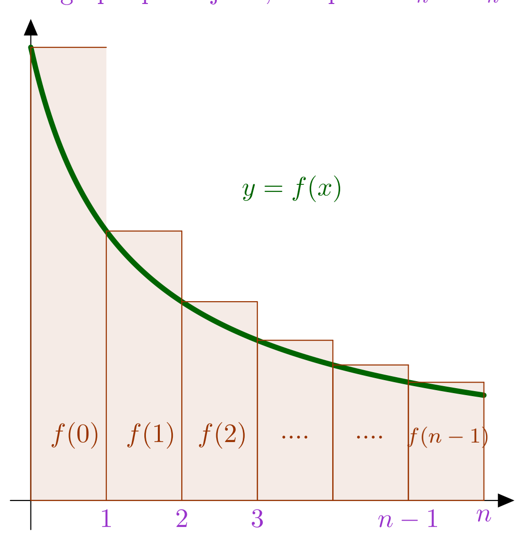
iv. En déduire que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ est convergente.

(b) Dans cette deuxième question, on suppose réciproquement que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ est convergente.

i. Pour chaque entier naturel n, on note : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$. La suite (S_n) est-elle convergente ? majorée ?

ii. Pour chaque entier naturel n, on note à nouveau : $U_n = \int_0^n f(x)\, dx$. Démontrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

iii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En s'aidant du graphique ci-joint, comparer U_n et S_n.



iv. En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, puis qu'elle est convergente.

v. Démontrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ est convergente.

(c) Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours a-t-on démontré dans cet exercice ?

2. *Application : intégrales de Bertrand, séries de Bertrand.*
   (a) Soit $\alpha > 0$. Par un changement de variable approprié, étudier la nature de l'intégrale suivante :

$$I\alpha = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}.$$

   Dans le cas où l'intégrale est convergente, calculer sa valeur.

   (b) Étudier la nature de la série suivante :

$$S_\alpha = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}.$$

3. ⋆ ⋆ *La constante d'Euler.* Pour chaque entier $n \geq 1$, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

   (a) Quelle est la limite de la suite (S_n) ?
   (b) Pour chaque entier $n \geq 2$, on note :

$$T_n = S_{n-1} - \ln n.$$

   En s'inspirant des deux graphiques de l'exercice 1, montrer que, pour chaque $k \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}.$$

   (c) En déduire que, pour $n \geq 1$:

$$0 \leq T_{n+1} - T_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

   (d) Démontrer que la suite (T_n) est croissante.
   (e) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leq 1$.
   Indication : on pourra écrire :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} (T_{k+1} - T_k)$$

   puis utiliser la question 3c.

   (f) Démontrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. (La limite de cette suite s'appelle la constante d'Euler, on la note traditionnellment γ. On ne sait toujours pas si γ est un nombre rationnel ou non.)
   (g) Démontrer que $T_n \sim \ln n$ quand n tend vers l'infini.

Intégrales généralisées de fonctions de signe quelconque

Code pour les questions

- Sans étoile : Niveau exigible pour tout le monde.
- $\star$: Niveau exigible pour tout le monde mais moins importante.
- $\star\star$: Niveau pour aller plus loin (exigible pour ceux qui prétendent aux écoles gei)
- En violet : question menant à un théorème, proposition qu'on peut trouver dans le bilan de cours. Peut être passé en cas de retard mais nécessaire pour comprendre en profondeur.

Le contenu du cours

1. $\star$ **Convergence absolue**

   (a) $\star$ Si x est un nombre réel, on note x^+ sa partie positive et x^- sa partie négative, c'est-à-dire :

   $$\text{si } x \geq 0 \qquad \text{on pose : } \begin{cases} x^+ = x \\ x^- = 0 \end{cases}$$

   $$\text{si } x < 0 \qquad \text{on pose : } \begin{cases} x^+ = 0 \\ x^- = -x \end{cases}$$

   i. $\star$ Rappeler pourquoi, pour tout réel x, on a :

   $$x = x^+ - x^- \quad \text{et} \quad |x| = x^+ + x^-$$

   et que :

   $$0 \leq x^- \leq |x| \quad \text{et} \quad 0 \leq x^+ \leq |x|.$$

   (b) $\star$ Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ pour a, b réels. On suppose que l'intégrale $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente.

   i. $\star$ Démontrer que les deux intégrales $\int_a^b f(t)^+dt$ et $\int_a^b f(t)^-dt$ sont convergentes.

   ii. $\star$ En déduire que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

   Définition 11:

   Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ pour a, b réels. On dit qu'une intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument ou que f est intégrable sur $[a, b[$ si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|dt$ converge.

   (c) Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours la question 1 démontre-t-elle ?

2. Étudier la convergence absolue des intégrales suivantes. En déduire la nature des intégrales lorsque c'est possible.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt;$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+10x}dx;$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\ln(s))}{2s^2+s^{\frac{1}{4}}}ds;$ (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(\frac{1}{t^2})dt;$

3. $\star$ **Semi-convergence : une intégrale généralisée convergente qui ne converge pas absolument** Considérons l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt.$$

   (a) $\star$ Rappeler pourquoi $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge absolument.

   (b) $\star$ Soit $X > 1$. Exprimer $\displaystyle\int_1^X \frac{\sin(t)}{t}dt$ en fonction de $\displaystyle\int_1^X \frac{\cos(t)}{t^2}dt$.

   (c) $\star$ Quelle est la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$?

   (d) $\star$ A l'aide des deux précédentes questions, déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge.

   (e) $\star$ Expliquer alors pourquoi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge.

4. $\star$ **Semi-convergence : un peu de recul** Considérons l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt.$$

   (a) $\star$ Pour quels α, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$ converge-t-elle absolument ?

   (b) $\star$ Pour quels α, le raisonnement de la question 3 reste-t-il valide ?

   (c) $\star$ Quels sont alors les α pour lesquels on peut assurer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$ au vu des deux questions précédentes ?

5. $\star\star$ **Non convergence absolue de** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$

   (a) $\star\star$ Démontrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \int_1^{(N+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt \geqslant \sum_{k=1}^{N} \int_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{3\pi}{4}} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt.$$

   (b) $\star\star$ En utilisant le fait que sur $[\pi/4, 3\pi/4]$, $|\sin(t)| \geqslant \sqrt{2}/2$, démontrer que

$$\int_1^{(N+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt \geqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \frac{1}{k\pi+\frac{3\pi}{4}}.$$

   (c) $\star\star$ Conclure que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}$ ne converge pas absolument.

6. **Nature d'intégrales à termes quelconques :**

   (a) Proposez un schéma résumant la démarche de l'étude de la nature d'une intégrale. Vous pourrez vous inspirer de celui réalisé pour les séries !

(b) Etudier la nature des séries suivantes en deux étapes :

D'abord deviner sans rien rédiger si ces séries vont converger absolument, converger ou diverger et quel outil vous allez utiliser : calcul direct, théorème de comparaison à majoration, à équivalents, convergence absolue ? Ensuite rédigez proprement la résolution.
Dans cette question s est un paramètre réel sur lequel il faut discuter pour étudier la nature de certaines intégrales généralisées. De même n est un paramètre entier naturel.

i. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^4+6}dt$

ii. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin t}{(3+\cos(t))t^{4/3}}dt$

iii. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^x}dx$

iv. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}dx.$

v. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^s\ln(x)}dx$ pour $s>1$.

vi. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^s\ln(x)}dx$ pour $s<1$.

vii. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}dx.$

viii. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(e^x)dx.$

ix. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{ist}dt.$

x. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt.$

7. $\star\star$ *Introduction à la transformée de Fourier, une intégrale généralisée paramétrée*
Dans cette question, on admet que la définition des intégrales généralisées se généralise aux fonctions continues par morceaux. Essentiellement, on s'autorise à intégrer des fonctions qui effectuent des sauts de continuité.

(a) $\star\star$ Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ (dont l'intégrale converge absolument sur $\mathbb{R}$), on appelle transformée de Fourier de f, l'application

$$\widehat{f} : \xi\in\mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx.$$

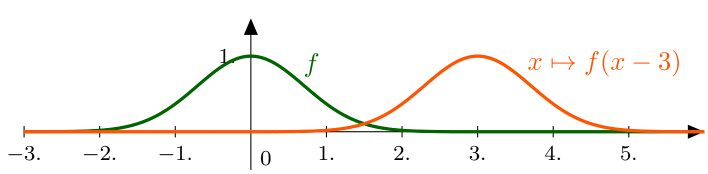
Montrer que chacune des fonctions suivantes est intégrable sur $\mathbb{R}$, calculer leur transformée de Fourier :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x\in[-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}, \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x\in[-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}, \quad f_3 : x \mapsto e^{-|x|}$$

Dessiner enfin la fonction et sa transformée de Fourier.

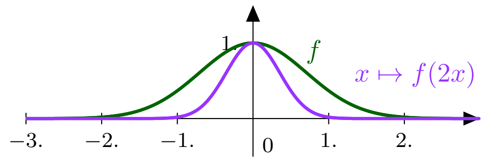
(b) $\star\star$ **Translation :** Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$. On considère la translation de f, $g : x\mapsto f(x-a)$ Démontrer en faisant un changement de variable que

$$\forall \xi\in\mathbb{R}, \quad \widehat{g}(\xi) = e^{-ia\xi}\widehat{f}(\xi).$$



(c) $\star\star$ **Dilatation :** Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\lambda\in\mathbb{R}^\star$. On considère la dilatation de f, $h : x\mapsto f(\lambda x)$. Démontrer en faisant un changement de variable que

$$\forall \xi\in\mathbb{R}, \quad \widehat{h}(\xi) = \frac{1}{\lambda}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$



(d) ⋆ ⋆ Soit f une fonction de classe $C_0^1(\mathbb{R})$ cad C^1 à support compact : il existe $A > 0$ tel que $\{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\} \subset [-A, A]$. Démontrer que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f'}(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi).$$