Licence 2, UE analyse 2 — Institut Villebon-Charpak, Orsay
Mathématiques — 2019-2020

Travaux dirigés

Pour chaque savoir faire, on vous propose une liste d'exercices pour atteindre l'apprentissage en profondeur : on commence par les classiques puis on ajoute une difficulté supplémentaire à chaque exo. Plus vous irez loin dans les exos d'un savoir-faire, plus ce savoir faire sera travaillé en profondeur.

Le symbole $\star$ désigne approximativement le niveau de profondeur et/ou de difficulté.

1 Prérequis

Savoir faire : Prérequis

- Savoir faire des majorations/minorations.
- Savoir faire des équivalents

▸ **Exercice 1**. $\star$ **Savoir majorer/minorer simplement une suite ou une fonction.**

Voici un raisonnement décortiquant comment obtenir une majoration du terme $\dfrac{|\sin(n)|}{(n+1)(n^2+2n+2)}$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

- $\forall n \in \mathbb{N}, |\sin(n)| \leq 1$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, n+1 \geqslant n$ et $n^2+2n+2 \geqslant n^2$. Donc $(n+1)(n^2+2n+2) \geqslant n^3 \geqslant 0$.
- Donc $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \dfrac{1}{(n+1)(n^2+2n+2)} \leq \dfrac{1}{n^3}$.
- Finalement $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \dfrac{|\sin(n)|}{(n+1)(n^2+2n+2)} \leq \dfrac{|\sin(n)|}{n^3} \leq \dfrac{1}{n^3}$.

1. En décortiquant au maximum vos étapes, majorez les quantités $\dfrac{|\sin(n)|}{n^4+2}, \dfrac{n^2}{n^4+10n}$.
2. En décortiquant au maximum vos étapes, minorez les quantités $\dfrac{\ln(n+1)}{(\sqrt{n}-2)\sqrt{n}}, \dfrac{2^n}{4-\cos(n)}$.

✂ -

1.
   - $\forall n \in \mathbb{N}, |\sin(n)| \leq 1$.
   - $\forall n \in \mathbb{N}, n^4+2 \geqslant n^4$.
   - Donc $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \dfrac{1}{n^4+2} \leq \dfrac{1}{n^4}$.
   - Donc $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \dfrac{|\sin(n)|}{n^4+2} \leq \dfrac{1}{n^4}$.

   - $\forall n \in \mathbb{N}, n^4+10n \geq n^4$.
   - Donc $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \dfrac{1}{n^4+10n} \leq \dfrac{1}{n^4}$.
   - Donc $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \dfrac{n^2}{n^4+10n} \leq \dfrac{1}{n^2}$.
2.
   - $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \ln(n+1) \geqslant \ln(n)$ car ln est croissante.
   - $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n}-2 \leq \sqrt{n}$ donc $(\sqrt{n}-2)\sqrt{n} \leq n$.
   - Donc $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \dfrac{\ln(n+1)}{(\sqrt{n}-2)\sqrt{n}} \geq \dfrac{\ln(n)}{n}$.

   - $\forall n \in \mathbb{N}, \cos(n) \geq -1$ donc $-\cos(n) \leqslant 1$.
   - $\forall n \in \mathbb{N}, 4-\cos(n) \leqslant 5$.
   - Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{4-\cos(n)} \geq \dfrac{1}{5}$.
   - Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{2^n}{4-\cos(n)} \geq \dfrac{2^n}{5}$.
3. Ce genre d'inégalité est indispensable afin d'utiliser le théorème de comparaison à majoration : cela sert à déterminer si une série est convergente ou divergente. Pour un exemple de raisonnement, regarder l'exercice 7.

- ✂

▸ **Exercice 2**. $\star$ **Savoir déterminer un équivalent d'une suite ou d'une fonction.**

1. Donnez les développements limités à l'ordre 4 de

$$\sin(\frac{1}{n}), \ln(1+\frac{1}{n}), \exp(\frac{1}{n})$$

2. Déterminez l'équivalent le plus simple des quantités suivantes

$$\frac{2^n}{4-2\ln(n)}, n\sin(\frac{1}{n}), \frac{-n^2+\ln(n)}{n^4+10\sin(n)}, n^2(\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}), \frac{3^n-6(-1)^n}{10n!-n^4}, \exp(\frac{1}{n^2})-1.$$

2-

$$\frac{2^n}{4-2\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-2^{n-1}}{\ln(n)}, n\sin(\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1, \frac{-n^2+\ln(n)}{n^4+10\sin(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{n^2},$$

$$n^2(\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\frac{-1}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2}, \frac{3^n-6(-1)^n}{10n!-n^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3^n}{10n!}, \exp(\frac{1}{n^2})-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

2 AAV : Etudier des séries numériques par le calcul

▸ **Exercice 3**. ⋆

1. Montrez en superposant $1+2+\ldots+n$ et $n+(n-1)+\ldots+2+1$ que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. On considère une pyramide de carrés d'aires 1, dont la base a n carrés comme sur le dessin. Calculez de deux façons l'aire de cette pyramide. Retrouver la formule (1)
3. Quelle est la nature de la série $\sum k$?

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $(1+2+\ldots+n)+(n+(n-1)+\ldots+2+1) = (n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)$. Il y a n fois le terme $n+1$. Donc $2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$ ce qui donne l'égalité voulue.
2.
3. Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. La suite (S_n) est de limite $+\infty$. Donc $\sum k$ diverge.

▸ **Exercice 4**. ⋆ **La géométrique**
Montrez par récurrence sur n

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall x \neq 1, \quad \sum_{k=0}^{n} x^k = 1+x+x^2+\ldots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

En déduire si la série $\sum x^k$ converge suivant les valeurs de x.

Initialisation à $n=1$: $\sum_{k=0}^{1} x^k = 1+x = \frac{1-x^2}{1-x}$. car $1-x^2 = (1+x)(1-x)$.

Hérédité : Supposons qu'au rang n, $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Notre but : Montrer que $\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$.

Or $\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1}$, la dernière égalité étant l'hypothèse de récurrence.
Donc $\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$.

On a donc prouvé par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall x \neq 1, \quad \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Nature de la série :

Or si $-1 < x < 1, x^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-x}$. Donc $\sum x^n$ converge.
Si $x > 1$, $x^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et comme $1-x<0$ alors $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc $\sum x^n$ diverge.
Si $x \leq -1$, (x^{n+1}) n'a pas de limite. Elle augmente en module mais oscille indéfiniment entre négatifs et positifs. (S_n) n'a donc pas de limite. Donc $\sum x^n$ diverge.

▸ **Exercice 5.** ⋆ ⋆ **Une série alternée**

On dit que deux suites sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et leur différence tend vers 0.
On admet que deux suites adjacentes convergent vers la limite.
Enfin, on admet que si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l alors (u_n) converge vers l.

1. On considère la suite définie par

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^N}{N}.$$

Calculez pour $N \in \mathbb{N}^\star, S_{N+1} - S_N$. Quelle est sa limite ?

Soit $N \in \mathbb{N}^\star$,

$$S_{N+1} - S_N = (-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^N}{N}) - (-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^N}{N} + \frac{(-1)^{N+1}}{N+1})$$

Donc

$$S_{N+1} - S_N = \frac{(-1)^{N+1}}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Trouvez l'erreur dans le raisonnement suivant :

"$\forall N \in \mathbb{N}^\star, S_{2N} - S_{2N-1} = \frac{1}{2N} \geqslant 0$. Donc (S_{2N}) est une suite croissante".

Ce raisonnement n'étudie en rien la croissance de la suite $u_N = S_{2N}$. Cette étude ferait calculer $u_{N+1} - u_N$ qui vaut $S_{2(N+1)} - S_{2N} = S_{2N+2} - S_{2N}$ et non pas $S_{2N+1} - S_{2N}$.

3. Démontrer proprement qu'au contraire (S_{2N}) est une suite décroissante et que (S_{2N+1}) est une suite croissante.

Soit $N \in \mathbb{N}$, à chaque fois dans les calculs suivants il restera les deux derniers termes de la première somme :

$$S_{2N+2} - S_{2N} = \sum_{n=1}^{2N+2} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{2N+2} - \frac{1}{2N+1} \leq 0.$$

$$S_{2N+3} - S_{2N+1} = \sum_{n=1}^{2N+3} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{2N+3} + \frac{1}{2N+2} \geqslant 0.$$

Donc (S_{2N}) est une suite décroissante et que (S_{2N+1}) est une suite croissante.

4. En déduire que (S_{2N}) et (S_{2N+1}) sont adjacentes. En déduire la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

✂ -

Soit $N \in \mathbb{N}$, il reste à montrer que $S_{2N+1} - S_{2N}$ est de limite nulle quand $N \to +\infty$.
Or

$$S_{2N+1} - S_{2N} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{2N+1} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc sachant que les deux suites ont une monotonie inverse l'une de l'autre (S_{2N}) et (S_{2N+1}) sont adjacentes. On en déduit qu'elles convergent vers une même limite. Ainsi d'après ce qui est admis dans l'énoncé, la suite (S_N) converge. Ce résultat est connu pour les **séries numériques** sous le nom de **critère des séries alternées**.

- ✂

▸ Exercice 6. ⋆ ⋆ Séries télescopiques

Calculez les suites suivantes, commencez par écrire la somme complètement développée.

$$\textbf{1)}\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \qquad \textbf{2)}\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Les séries associées convergent-elles ?

✂ -

Remarque importante : Attention la notation u_n ne désigne ici pas le terme général mais la somme partielle !

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{l=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{l}} && \text{en changeant l'indice :} l = k+1 \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} && \text{: tous les termes s'annulent sauf le premier et le dernier.} \end{aligned}$$

Donc la somme partielle u_n est de limite 1. On en déduit que $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$ converge (et sa limite vaut 1).

Pour la seconde série, c'est le même raisonnement en commençant par démontrer en décomposant en éléments simples que pour tout k dans $\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

- ✂

▸ Exercice 7. ⋆ ⋆ ⋆ La comparaison série intégrale

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$,

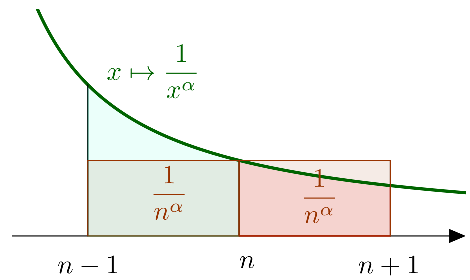
• Si $\alpha \leq 0$, quelle est la nature de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$? (démontrez que la série diverge grossièrement).

Si $\alpha \leq 0$, le terme général ne tend pas vers 0 donc la série diverge.

• En utilisant la décroissance sur $\mathbb{R}_+^\star$ de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$, montrer que

$$\forall n \geqslant 2, \quad \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Remarquez que cette inégalité est visible sur le dessin ci contre. L'aire bleue est supérieure à l'aire marron qui est supérieure à l'aire rouge.



Soit $n \geqslant 2$,

$$\forall t \in [n, n+1], \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha},$$

par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$. Par croissance de l'intégrale

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}.$$

L'inégalité de droite se montre par un raisonnement analogue sur $[n-1, n]$.

• On définit la suite (S_N) par $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$ pour $N \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que

$$\forall N \geqslant 2, \quad 1 + \int_2^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq S_N \leq 1 + \int_1^N \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Soit $N \geqslant 2$. L'inégalité précédente est vrai pour tout n entier supérieur ou égal à 2. On somme donc ces inégalités de 2 à N.

$$\sum_{n=2}^{N} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Les termes extrêmes de l'inégalité se simplifient par la relation de Chasles :

$$\int_2^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_1^N \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Pour retrouver S_N, il ne reste plus qu'à ajouter le premier terme cad 1 à tous les membres de l'inégalité.

• Posons $\alpha = 1$, déduire de l'inégalité précédente que $S_N \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Même question pour $0 < \alpha < 1$.

D'après la question précédente, on a pour $\alpha = 1$,

$$\forall N \geqslant 2, \quad 1 + \int_2^{N+1} \frac{dt}{t} \leq S_N.$$

Autrement dit

$$\forall N \geqslant 2, \quad 1 + \ln(N+1) - \ln(2) \leq S_N.$$

Le terme de gauche tend vers $+\infty$ lorsque $N \to +\infty$. Il en est de même donc pour S_N.

- Démontrer que (S_N) est croissante. Pour $\alpha > 1$, montrer que (S_N) converge.

Soit $N \in \mathbb{N}^\star$, $S_{N+1} - S_N = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n^\alpha} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{(N+1)^\alpha} > 0$. Donc (S_N) est une suite croissante.

Pour la convergence, on utilise le côté droit de l'inégalité :

$$\forall N \geqslant 2, \quad S_N \leq 1 + \int_1^N \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Donc

$$\forall N \geqslant 2, \quad S_N \leq 1 + \frac{1}{(1-\alpha)N^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}.$$

Comme $\alpha > 1$, le terme de droite converge et est donc borné et donc majoré.
Ainsi (S_N) est une suite croissante majorée donc converge.

3 AAV : Etudier la nature d'une série numérique non calculable

▸ **Exercice 8.** ⋆ Déterminer la nature de :

1. $\sum n + \ln(n)$, $\sum n\ln(1+\frac{1}{n})$ en utilisant la divergence grossière.
2. $\sum \frac{n^2}{3^n}$ en utilisant le critère de d'Alembert.
3. $\sum \frac{4}{n^3+n}$ et $\sum \frac{1}{\sqrt{3n-2}}$ à l'aide du théorème de comparaison à majoration.
4. $\sum \frac{4n+2^n}{n^3+4^n}$ et $\sum \exp(\frac{1}{n^2}) - 1$ à l'aide du théorème de comparaison à équivalents.
5. $\sum \frac{4\cos(n^2+1)}{2n^4+1}$ à l'aide du théorème de convergence absolue.
6. $\sum \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$ à l'aide du critère des séries alternées.

1. $n + \ln(n)$ tend vers $+\infty$ donc $\sum n + \ln(n)$ diverge grossièrement.

   On a au voisinage de $+\infty$, $\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$.

   Donc $n\ln(1+\frac{1}{n}) = 1 + o(1)$.

   Donc $n\ln(1+\frac{1}{n})$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

   Donc $\sum n\ln(1+\frac{1}{n})$ diverge grossièrement.

2. Posons $u_n = \frac{n^2}{3^n}$.
   $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$,

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2 3^n}{n^2 3^{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{3n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} < 1.$$

   D'après le critère de d'Alembert, $\sum \frac{n^2}{3^n}$ converge.

3. • $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leq \dfrac{4}{n^3+n} \leq \dfrac{4}{n^3}$ car $n^3+n \geq n > 0$. Or $\sum \dfrac{1}{n^3}$ converge (série de Riemann $\alpha > 1$). Donc par comparaison $\sum \dfrac{4}{n^3+n}$ converge.

   • $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leq \dfrac{1}{\sqrt{3n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3n-2}}$ car $0 < 3n-2 \leq 3n$ et la fonction racine carrée est croissante. Or $\sum \dfrac{1}{n^{1/2}}$ diverge (série de Riemann $\alpha \leq 1$). Donc par comparaison $\sum \dfrac{1}{\sqrt{3n-2}}$ diverge.

4. • $\dfrac{4n+2^n}{n^3+4^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^n}{4^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} (\dfrac{1}{2})^n$. puisque pour α réel, $n^\alpha = o(a^n)$ en l'infini lorsque $\alpha > 1$.

   $\forall n \geqslant 1, (\dfrac{1}{2})^n \geqslant 0$.

   $\sum (\dfrac{1}{2})^n$ converge (série géométrique de raison $1/2$).

   Donc par comparaison $\sum \dfrac{4n+2^n}{n^3+4^n}$ converge.

   • $\exp(\dfrac{1}{n^2}) - 1 = \dfrac{1}{n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$.

   On en déduit que $\exp(\dfrac{1}{n^2}) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

   Or $\forall n \geqslant 1, \dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$.

   $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge.

   Donc par comparaison $\sum \exp(\dfrac{1}{n^2}) - 1$ converge.

5. Soit $u_n = \dfrac{4\cos(n^2+1)}{2n^4+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   $\forall n \in \mathbb{N}, |4\cos(n^2+1)| \leq 4$ et $2n^4+1 \geq 2n^4 > 0$.

   Donc $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leq |u_n| \leq \dfrac{2}{n^4}$. Or $\sum \dfrac{1}{n^4}$ converge (série de Riemann $\alpha > 1$). Donc par comparaison $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

6. On applique le critère des séries alternées en posant pour n dans $\mathbb{N}^\star$, $u_n = 1/n\ln(n)$:

   • $\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_n \geqslant 0$.

   • (u_n) est une suite décroissante car ln est croissante.

   • $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   Donc d'après le critère des séries alternées, $\sum \dfrac{(-1)^n}{n\ln(n)}$ converge.

- ✂

▸ **Exercice 9**. ⋆ ⋆

L'objectif de cet exercice est de mettre en oeuvre la stratégie d'étude d'une série numériques. Les séries sont mélangées contrairement au cours où les séries étaient associées à un théorème bien particulier. L'objectif ici est que vous sachiez repérer si une série est de signe constant ou non, que vous ayez en tête un catalogue de résultats à utiliser et que vous sachiez déceler lequel est le plus à même de traiter la série. Essayez d'avoir en tête la feuille de méthodologie que je vous ai distribuée.

Etudier la nature des séries suivantes en deux étapes :

D'abord deviner sans rien rédiger si ces séries vont converger absolument, converger ou diverger et quel outil vous allez utiliser : théorème de comparaison à majoration, à équivalents, d'Alembert, critère des séries alternées ? Ensuite rédigez proprement la résolution.

1. $\sum 1$.
2. $\sum \dfrac{2^n}{n!}$.
3. $\sum \dfrac{(-1)^n}{n2^n}$.
4. $\sum (-1)^n \dfrac{\sin(n)}{n^4}$.
5. $\sum \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}$.
6. $\sum \dfrac{n^2-(-1)^n n}{2^n+n^3}$.
7. $\sum n\sin(\dfrac{1}{n})$.

8. $\sum \frac{n^2}{\ln(n)}$.

9. $\sum \frac{1}{3^n \ln(n)}$.

10. $\sum \frac{n^2}{n^4+10n}$.

11. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

12. $\sum \ln(1+\frac{1}{n})$.

13. $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$.

14. $\sum \frac{-1-\sin n}{n^2}$.

15. $\sum \frac{1}{n\cos(n)^2}$.

16. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

17. $\sum \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$.

18. $\sum \frac{a^n}{3-\cos(n)}$, $0 \leq a < 1$.

19. $\sum \frac{n^5+(-1)^n\cos(n)}{n^7-12n^3+5}$.

20. $\sum \frac{1}{n^3\ln(n)}$.

21. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$.

22. $\sum \frac{\ln(n)}{n^{1/4}}$.

✂ -

Vous avez de nombreuses rédactions dans le poly et ci-dessus, je vous donne ici la nature et la méthode utilisée, à vous de reconstituer la rédaction en prenant exemple sur les corrigés donnés.

1. DV : terme général ne tend pas vers 0.
2. CV : d'Alembert, limite de u_{n+1}/u_n : 0.
3. CVA : d'Alembert en valeur absolue, limite de u_{n+1}/u_n : 1/2.
4. CVA : majoration en valeur absolue par $1/n^4$.
5. CV : équivalent à $-1/6n^3$.
6. CV : équivalent à $n^2/2^n$ puis d'Alembert, limite de u_{n+1}/u_n : 1/2.
7. DV : terme général ne tend pas vers 0.
8. DV : terme général ne tend pas vers 0.
9. CV : d'Alembert, limite de u_{n+1}/u_n : 1/3.
10. CV : équivalent ou majoration, $1/n^2$.
11. CV : critère des séries alternées.
12. DV : DL puis équivalent $1/n$.
13. CV : série télescopique de limite -1.
14. CVA : majoration en valeur absolue par $2/n^2$.
15. DV : minoration par $1/n$.
16. DV : somme de CV(CSA) et DV (référence).
17. CV : majoration par $1/2^n$.
18. CV : majoration par $a^n/2$.
19. CV : équivalent à $1/n^2$.
20. CV : majoration par $1/n^3$.
21. DV : minoration par $1/n$.
22. DV : minoration par $1/n^{1/4}$.

- ✂

▸ Exercice 10. ⋆ ⋆ ⋆ Un cas compliqué d'application de d'Alembert

Considérons la suite (a_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^\star, a_n = \frac{4^n}{n^n}$.

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$. En déduire la limite de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.
2. Déterminer la nature de $\sum \frac{4^n}{n^n}$.

✂ -

1. $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{4^n} = \frac{4n^n}{(n+1)(n+1)^n} = \frac{4}{(n+1)(\frac{n+1}{n})^n} = \frac{4}{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

   Or
   $$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \exp(\ln((1+\frac{1}{n})^n)) \\ &= \exp(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)) \\ &= \exp(n\left(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\right)) \\ &= \exp(1+o(1))\end{aligned}$$

   Donc $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$.

   Donc $\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. On applique le critère de d'Alembert :
   $\forall n \in \mathbb{N}^\star, a_n > 0$.
   Le quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$ d'après la question précédente.
   Donc la série $\sum a_n$ converge.

- ✂

▸ **Exercice 11.** ⋆⋆⋆ **Séries de Bertrand**

On étudie la nature des séries de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$.

1. **Un cas particulier :** $\alpha = 2, \beta = -1$
   (a) Trouver $a > 1$ tel que $\frac{\ln(n)}{n^2}$ soit négligeable devant $\frac{1}{n^a}$.
   (b) Conclure quant à la nature de $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$.
2. **Cas** $\alpha > 1$ **:** Démontrer que $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge.
3. **Cas** $\alpha < 1$ **:** Démontrer que $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ diverge.
4. **Cas** $\alpha = 1$ **:** Déterminer la nature de la série à l'aide du critère de comparaison série intégrale.

---

1. (a) On veut trouver $a > 1$ tel que $\frac{\frac{\ln(n)}{n^2}}{\frac{1}{n^a}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or

$$\frac{\frac{\ln(n)}{n^2}}{\frac{1}{n^a}} = \frac{\ln(n)}{n^{2-a}}.$$

   Pour que cette quantité tende vers 0 par croissances comparées, il est nécessaire et suffisant que $2-a > 0$. Il suffit donc de prendre n'importe quel a strictement entre 1 et 2 comme par exemple la moyenne : $3/2$.

   (b) On a $\forall n \geq 1, \frac{\ln(n)}{n^2} \geq 0$.
   On a $\frac{\ln(n)}{n^2} = o(\frac{1}{n^{3/2}})$ en $+\infty$.
   Or $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann $\alpha > 1$).
   Donc par comparaison, $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge.

2. Si $\beta \geq 0$, $\forall n \geq e, \ln(n)^\beta \geq 1 > 0$. On en déduit que $n^\alpha \ln(n)^\beta \geq n^\alpha > 0$ et donc que

$$0 \leq \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

   Or $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge puisque $\alpha > 1$ donc par comparaison $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge.

   Si $\beta < 0$, on se retrouve dans le cas de la question 1 avec un terme en $\frac{\ln(n)^{-\beta}}{n^\alpha}$. On montre que ceci est négligeable devant $\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}$. Essayez de le rédiger en vous inspirant de la question 1, c'est un cas compliqué.

3. Cette fois trouvez un $\gamma < 1$ tel que

$$\frac{1}{n^\gamma} \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}).$$

   et appliquez le théorème de comparaison à minoration.

4. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)^\beta}$ est continue et positive sur $[e, +\infty[$. Pour la décroissance, on démontre que $f : t \mapsto t\ln(t)^\beta$ est croissante à partir d'un certain rang. Comme $f'(t) = \ln(t)^\beta + \beta\ln(t)^{\beta-1} = \ln(t)^{\beta-1}(\ln(t)+\beta)$. Donc pour $t \geqslant \max(1, e^{-\beta})$, la dérivée est positive ce qui prouve la croissance de la fonction.

   Donc d'après le critère de comparaison série intégrale, $\sum \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$ et $\int_e^N \frac{1}{t\ln(t)^\beta}dt$ sont de même nature.

   Or si $\beta \neq 1$, $\int_e^N \frac{1}{t\ln(t)^\beta}dt = [\frac{1}{(1-\beta)\ln(t)^{\beta-1}}]_e^N$. Quand $N \to +\infty$, cela converge si et seulement si $\beta > 1$.

   Si $\beta = 1$, $\int_e^N \frac{1}{t\ln(t)^\beta}dt = [\ln(|\ln(t)|]_e^N$. Quand $N \to +\infty$, cela diverge.

▸ **Exercice 12.** ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ **La transformation d'Abel : Intégrer par parties dans $\mathbb{N}$**

Soit (b_n) une suite positive, décroissante et de limite nulle. Soit (a_n) une suite telle que la suite des sommes partielles $(A_n), A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ est bornée. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$.

1. Démontrer que $\sum_{k=0}^{n} \sin(k)$ définit une suite bornée en remarquant que $\sin k = \Im(e^{ik})$. On essaiera de faire apparaître le somme partielle d'une série géométrique.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n - A_0 b_1$. Pour cela, vous écrirez que $a_k = A_k - A_{k-1}$, vous développerez et ferez un changement d'indice. Faire une analogie terme à terme entre la formuler d'intégration par parties et cette formule.
3. Quelle est la limite de $A_n b_n$? Démontrez à l'aide d'un théorème de comparaison (en n'oubliant pas que (A_k) est bornée que $\sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1})$ a une limite quand $n \to +\infty$. En déduire que $\sum a_k b_k$ converge.
4. Démontrer que $\forall \alpha > 0, \sum \frac{\sin(k)}{k^\alpha}$ converge à l'aide des questions précédentes.

1. $\sum_{k=0}^{n} \sin(k) = \sum_{k=0}^{n} \Im(e^{ik}) = \Im(\sum_{k=0}^{n} e^{ik})$.

   Or $\sum_{k=0}^{n} e^{ik} = \sum_{k=0}^{n} (e^i)^k = \frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^i} = \frac{e^{i(n+1)/2}}{e^{i/2}} \frac{e^{-i(n+1)/2} - e^{i(n+1)/2}}{e^{-i/2} - e^{i/2}} = e^{in/2} \frac{\sin((n+1)/2)}{\sin(1/2)}$.

   Donc $\sum_{k=0}^{n} \sin(k) = \sin(n/2) \frac{\sin((n+1)/2)}{\sin(1/2)}$. Cette suite est bien bornée en n puisque sin est comprise entre -1 et 1.

2. $$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k$$

   On effectue un changement d'indice sur la seconde somme : $l = k - 1$.

   $$\sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{l=0}^{n-1} A_l b_{l+1}$$

   Comme la variable l est muette, on la renomme k et on isole les termes non communs aux deux sommes :

   $$\sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{l=0}^{n-1} A_l b_{l+1} = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} = A_n b_n - A_0 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1}$$

   En réunissant les deux sommes, on obtient le résultat attendu.

3. Comme (A_n) est bornée et que $b_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $A_n b_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

   Par ailleurs,
   $$\exists C > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |A_k(b_k - b_{k+1})| \leq M |b_k - b_{k+1}|$$
   Or comme (b_k) est décroissante alors $|b_k - b_{k+1}| = b_k - b_{k+1}$.
   Donc
   $$\exists C > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |A_k(b_k - b_{k+1})| \leq M(b_k - b_{k+1})$$
   Or $\sum M(b_k - b_{k+1})$ converge car c'est une série télescopique avec (b_k) qui converge. Donc par comparaison, $\sum a_k b_k$ converge.

4. La série $\sum \frac{\sin(k)}{k^\alpha}$ est de la forme $\sum a_k b_k$ avec $a_k = \sin(k)$ et $b_k = \frac{1}{k^\alpha}$. Alors (A_n) est bien bornée d'après la première question, (b_n) est bien positive, décroissante (si $\alpha > 0$) et de limite nulle (si $\alpha > 0$).

   Donc d'après la question 2, $\forall \alpha > 0, \sum \frac{\sin(k)}{k^\alpha}$ converge.

5. • La convergence de la série $\frac{\sin(k)}{k^\alpha}$ n'est vraiment utile que pour $\alpha \leq 1$. Pour $\alpha > 1$, on peut conclure par comparaison en valeur absolue. Pour $\alpha \leq 1$, le critère de convergence absolue ne marche plus tout simplement car la série ne converge pas absolument (c'est un exo à part entière). Cet exercice permet alors de démontrer que la série converge (bien qu'elle ne converge pas absolument). C'est une série du même type que les séries alternées : les séries semi convergentes (qui convergent sans converger absolument).

   • Le calcul de la question 2 s'appelle la transformation d'Abel, c'est l'équivalent pour les séries de la formule d'intégration par parties.

- ✂

▸ **Exercice 13.** ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ **Des séries géométriques dans la vraie vie**

Pour définir des nombres décimaux périodiques.

Considérons la série $\sum 1/10^n$.

1. Cette série converge-t-elle ? Quelle est la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/10^n$?

2. Ecrire 0.9, 0.99, 0.999 en fonction des sommes partielles de $S_N = \sum_{n=1}^{N} 1/10^n$. Pouvez-vous justifier de l'égalité $0.9999\cdots = 1$?

Le paradoxe de Zénon : pouvez-vous aller d'un point A à un point B.

3. Pouvez-vous résoudre le paradoxe suivant : vous souhaitez parcourir une distance de 1 km. Pour parcourir cette distance, il faut en parcourir la moitié. Il faudra ensuite parcourir la moitié de la distance restante c'est-à-dire un quart de km. Il est nécessaire à chaque fois de parcourir la moitié de la distance restante. Ainsi il y a une infinité de moitié à parcourir et on ne pourra jamais atteindre le km. Pourtant quand vous décidez de marcher 1km a priori vous y parvenez avec un peu de volonté !

✂ -

1. C'est une série géométrique de raison 1/10. Elle est donc convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/10^n = \frac{1/10}{1-1/10} = \frac{1}{9}$.

2. On a $0.9 = 9 \times \frac{1}{10}$, $0.99 = 9 \times 0.11 = 9 \times (\frac{1}{10} + \frac{1}{100})$. De manière générale, 0.999..9 où on a mis N 9 après la virgule est égal à $9(\sum_{n=1}^{N} 1/10^n)$. Cette quantité tend vers 1 d'après la question précédente. Ceci justifie pourquoi $0.9999\cdots = 1$.

- ✂

▸ **Exercice 14.** ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ **Le début des séries de fonctions**

On introduit dans les séries un paramètre x.

1. Démontrez que pour tout x dans $]-1,1[$, $\sum nx^n$ converge.

2. Démontrez que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\sum \frac{1}{n^2+x^2}$ converge.

3. Démontrez que pour tout x dans $\mathbb{R}^\star$, $\sum \frac{(-1)^n}{nx}$ converge.

4. Démontrez que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\sum \frac{x\sin(nx)}{n^2+1}$ converge.

Vous avez étudié ce qu'on appelle **la convergence simple** d'une série de fonctions sur un intervalle donné. On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur un intervalle I si pour tout x de I, $\sum f_n(x)$ converge. La convergence simple d'une série de fonctions est la convergence point par point d'une série numérique.

▸ **Exercice 15.** ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ **Loi des événements rares : lien avec le cours de proba**
Une usine de fabrication de voitures cherche à évaluer les risques de présenter des anomalies au sein de sa production. Une étude statistique montre que sur un contingent de n voitures, la probabilité d'obtenir une anomalie est de $1/n$. Ainsi cette probabilité dépend du nombre de voitures produites. L'usine cherche donc à savoir comment évoluera le nombre d'anomalies lorsque la production augmentera indéfiniment.
On note X_n la variable aléatoire décrivant le nombre d'anomalies sur un contingent de n voitures. On suppose que X_n suit une loi binomiale de paramètre $1/n$ (Chaque voiture a une chance $1/n$ d'avoir un problème).

1. Déterminer $P(X_n = k)$ pour $0 \leq k \leq n$.
2. Calculer la limite de $P(X_n = 0)$. Interpréter ce résultat.
3. Prouver que $P(X_n = k+1) = \dfrac{n-k}{(k+1)(n-1)} P(X_n = k)$.
4. Notons $p_k = \lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = k)$. Relier p_{k+1} à p_k.
5. Démontrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, p_k = \dfrac{1}{ek!}$.
6. On admet que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. Prouver que p_k définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$. On l'appelle loi de Poisson de paramètre 1.
7. Calculer l'espérance associée à cette loi de probabilité. Comment évolue le nombre d'anomalies lorsque la production de voitures tend vers l'infini ?

4 Vrai ou faux et problème

L'objectif de cette feuille est de vous proposer des exercices plus originaux sur les séries numériques. Ils n'entrent pas dans le cadre de méthodes classiques, il s'agit donc d'axer sur la réflexion même si certaines questions utilisent des classiques.

▸ **Exercice 16. Débroussaillage sur les séries.**
Pour les Vrai/Faux : donner un contre-exemple si c'est faux.

1. Qu'est-ce qu'une série numérique ? Quel type d'objet mathématique est-ce ? (réel, suite, fonction, matrice, espace).
2. Même question pour une somme partielle puis pour la somme d'une série.
3. Vrai ou faux : Une série dont le terme général tend vers 0 converge.
4. Vrai ou faux : Une série divergente tend vers $\pm\infty$.
5. Vrai ou faux : Une série positive divergente tend vers $+\infty$.
6. Vrai ou faux : Le rang de départ d'une série a une importance pour sa convergence.
7. Vrai ou faux : Le rang de départ d'une série a une importance pour la valeur de sa somme.
8. Vrai ou faux : Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
9. Donner les séries convergentes de référence.
10. Donner un exemple de série télescopique, de série de Riemann, de série géométrique, de série alternée, de série à laquelle le critère de d'Alembert s'appliquerait.
11. Vrai ou faux : Si on majore le terme général d'une première série par celui d'une série divergente alors la première série diverge.
12. Vrai ou faux : Si on majore le terme général d'une première série par celui d'une série convergente alors la première série converge.

13. Vrai ou faux : Sommer deux séries divergentes donne une série divergente.
14. On vous donne une série à termes positifs à étudier : présentez les théorèmes qui pourraient permettre d'étudier cette série.
15. Qu'est-ce qui est plus fort entre la convergence et la convergence absolue ? Autrement dit quelle convergence implique l'autre.
16. Donner une série convergeant sans converger absolument.
17. Faites un dessin avec l'image que vous vous faites d'une série alternée.
18. On vous donne une série : expliquez à l'écrit votre démarche, méthode pour étudier sa convergence.

1. Cours.
2. Cours
3. Non : $\sum 1/n$.
4. Non : $\sum(-1)^n$ n'a pas de limite.
5. Oui car elle est alors croissante (prouvez-le) et une suite croissante est soit convergente soit tend vers $+\infty$.
6. Non car changer de rang ne fait qu'ajouter ou soustraire un nombre fini de termes.
7. La valeur est quant à elle changée : ajouter ou soustraire un nombre fini de termes change la valeur de la somme.
8. Non il manque l'hypothèse de positivité. Par exemple, $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, cependant $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$ diverge comme somme d'une série divergente et d'une convergente mais $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
9. Cours.
10. Cours.
11. Non il faut minorer par une divergente ou majorer par une convergente si on espère conclure.
12. Non il faut en plus la positivité : $-1/n \leq 1/n^2$ par exemple.
13. Non $\sum 1 - \sum 1 = 0$ on a sommé deux séries divergentes et le résultat converge.
14. Théorème de comparaison à majoration/minoration ou équivalents et critère de d'Alembert.
15. Cours
16. $\sum(-1)^n/n$.
17.
18. Je vous ai donné un schéma pour la démarche.

▸ Exercice 17. Calcul de la limite d'une somme

On considère la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Démontrer que (u_n) est une suite croissante.
2. Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_{2n} - u_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
3. En déduire que (u_n) diverge et déterminer sa limite.

Soient $(a_n), (b_n)$ définies par $\forall n \in \mathbb{N}^\star, a_n = u_n - \ln(n+1), b_n = u_n - \ln(n)$.

4. Démontrer que $\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$.
5. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) \leq u_n \leq \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$
6. Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes. On note γ leur limite commune.
7. Justifier la relation $u_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

On définit deux suites réelles (v_n) et (S_n) par $\forall n \in \mathbb{N}^\star, v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{v_k}$.

8. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3v_n + \frac{n(3n+5)}{2}$.
9. En déduire une expression factorisée du terme général de (v_n).
10. Déterminer des réels a, b, c tels que $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$.
11. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = u_{2n+1} - \frac{u_n}{2} - 1$.
12. Obtenir une expression de S_n à l'aide des termes de la suite (u_n).
13. Déterminer la limite de (S_n).

5 Prérequis

Savoir faire :

- Savoir déterminer une primitive de fonctions simples.

▸ **Exercice 18. Prérequis**
Déterminer les primitives d'au moins 25 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto 1$
2. $x \mapsto \sin(x)$.
3. $x \mapsto \cos(x)$
4. $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
5. $x \mapsto e^x$
6. $x \mapsto \ln(x)$
7. $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N} - \{-1\}$
8. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$
9. $2x^{27} + x^3 + 4x + 5$,
10. $\sin(t + \pi/5)$,
11. $1 - 2e^t$,
12. $\dfrac{2}{\sqrt{1+t}}$,
13. $\tan(x)$
14. $\dfrac{x^2+1}{(x^3/3+x+1)^3}$,
15. $x^2\exp(x^3)$,
16. $\dfrac{e^x}{e^x+4}$,
17. $\cos(5x+3)$,
18. $\dfrac{1}{x^n}$,
19. $\dfrac{1}{\tan(x)}$
20. $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$
21. $f(x) = e^{-x} + 3e^{2x} + e^{-3x}$
22. $\dfrac{3x^2}{4x^3+1}$,
23. $\dfrac{e^x+1}{e^x+x}$,
24. $\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}$,
25. $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)^4}$,
26. $x\cos(3x^2)$,
27. $\dfrac{1}{\cos^2(x)}$,
28. $f(x) = \dfrac{1}{(3x+5)^3}$
29. $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-4)^2}$
30. $f(x) = (x^2-4x+5)^4(x-2)$
31. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$
32. $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$
33. $f(x) = \sin(x)\cos(x)^3$
34. $f(x) = (2+\sin(x))^2\cos(x)$
35. $f(x) = \cos(x)^2$
36. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$
37. $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$
38. $f(x) = xe^{x^2-1}$

✂ -

On note F toute primitive des fonctions précédentes.

1. $F(x) = x + C, C \in \mathbb{R}$.
2. $F(x) = -\cos(x) + C, C \in \mathbb{R}$.
3. $F(x) = \sin(x) + C, C \in \mathbb{R}$.
4. $F(x) = \sqrt{x} + C, C \in \mathbb{R}$.
5. $F(x) = e^x + C, C \in \mathbb{R}$.
6. $F(x) = x\ln(x) - x + C, C \in \mathbb{R}$.
7. $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, C \in \mathbb{R}$.
8. $F(x) = \ln(|x|) + C, C \in \mathbb{R}$.
9. $\dfrac{x^{28}}{14} + \dfrac{x^4}{4} + 2x^2 + 5x + C, C \in \mathbb{R}$
10. $-\cos(t+\pi/5) + C, C \in \mathbb{R}$
11. $t - 2e^t + C, C \in \mathbb{R}$
12. $4\sqrt{1+t} + C, C \in \mathbb{R}$
13. $-\ln(|\cos(x)|) + C, C \in \mathbb{R}$
14. $-\dfrac{1}{2(x^3/3+x+1)^2} + C, C \in \mathbb{R}$
15. $\dfrac{\exp(x^3)}{3} + C, C \in \mathbb{R}$
16. $\ln(e^x+4) + C, C \in \mathbb{R}$
17. $\dfrac{\sin(5x+3)}{5} + C, C \in \mathbb{R}$
18. $-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C, C \in \mathbb{R}$
19. $\ln(|\sin(x)|) + C, C \in \mathbb{R}$
20. $\dfrac{\ln(|2x-3|)}{2} + C, C \in \mathbb{R}$
21. $-e^{-x} + \dfrac{3}{2}e^{2x} - \dfrac{e^{-3x}}{3} + C, C \in \mathbb{R}$
22. $\dfrac{1}{4}\ln(|4x^3+1|) + C, C \in \mathbb{R}$
23. $\ln(|e^x+x|) + C, C \in \mathbb{R}$
24. $\dfrac{2}{3}\sqrt{3x+1} + C, C \in \mathbb{R}$
25. $\dfrac{1}{3\cos^3(x)} + C, C \in \mathbb{R}$
26. $\dfrac{1}{6}\sin(3x^2) + C, C \in \mathbb{R}$
27. $\tan(x) + C, C \in \mathbb{R}$
28. $-\dfrac{1}{6(3x+5)^2} + C, C \in \mathbb{R}$
29. $\dfrac{1}{2(x^2-4)} + C, C \in \mathbb{R}$
30. $\dfrac{1}{10}(x^2-4x+5)^5 + C, C \in \mathbb{R}$

31. $\frac{1}{2}\ln^2(x)+C, C\in\mathbb{R}$
32. $\ln(\ln(x))+C, C\in\mathbb{R}$
33. $-\frac{1}{4}\cos^4(x)+C, C\in\mathbb{R}$
34. $\frac{1}{3}(2+\sin(x))^3+C, C\in\mathbb{R}$
35. $\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{2}x+C, C\in\mathbb{R}$ car $cos^2(x)=\frac{1}{2}(\cos(2x)+1)$
36. $-e^{\frac{1}{x}}+C, C\in\mathbb{R}$
37. $2e^{\sqrt{x}}+C, C\in\mathbb{R}$
38. $\frac{1}{2}e^{x^2-1}+C, C\in\mathbb{R}$

Savoir faire :

- Savoir calculer une intégrale classique par primitive, IPP, changement de variable.
- Savoir montrer qu'une intégrale converge/diverge par primitive ou IPP ou changement de variable

▸ **Exercice 19. Prérequis**
Calculer 10 des intégrales suivantes à l'aide d'une primitive, IPP ou d'un changement de variable :

1. $\int_0^1 x\,dx$
2. $\int_0^\pi \sin(x)dx$
3. $\int_3^4 \frac{1}{2x}dx$
4. $\int_1^e \ln(x)dx$
5. $\int_0^2 (x+2)^3dx$
6. $\int_0^1 xe^{x^2}dx$
7. $\int_{\pi/2}^\pi x\sin(x)dx$
8. $\int_0^1 xe^x dx$
9. $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$ (poser $u=e^{-x}$)
10. $\int_0^{\pi/4}\tan(x)dx$ (poser $u=\cos(x)$)
11. $\int_0^2 x^2\sqrt{2+x}dx$ (poser $u=\sqrt{2+x}$)
12. $\int_0^1 \ln(3x+1)dx$ (poser $u=3x+1$)
13. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$
14. $\int_e^2 \frac{1}{t(\ln(t))^2}dt$
15. $\int_0^1 \frac{1}{e^{2x}+2}dx$

---

1. $\frac{1}{2}$
2. 2
3. $\ln(\frac{2}{\sqrt{3}})$
4. 1
5. 60
6. $\frac{1}{2}(e-1)$
7. $\pi-1$
8. 1
9. $1+ln(2)-\ln(1+e)$.
10. $\frac{\ln(2)}{2}$.
11. $-\frac{64}{105}(2\sqrt{2}-11)$.
12. On pose $u=3x+1$ alors $du=3dx$. Reste les bornes : quand $x=0$, alors $u=1$ et quand $x=1$ alors $u=4$.Alors,

$$\int_0^1 \ln(3x+1)dx=\frac{1}{3}\int_1^4\ln(u)du=\frac{1}{3}[u\ln(u)-u]_1^4=\frac{1}{3}(4\ln(4)-3).$$

13. $-\frac{2}{3}(\sqrt{2}-2)$

14. $1-\frac{1}{\ln(2)}$

15. $\frac{1}{4}(2+\ln(3)-\ln(2+e^2))$

6 AAV : Etudier les intégrales généralisées via le calcul

▶ **Exercice 20**. ⋆ ⋆
Etudier si les intégrales généralisées suivantes convergent ou non, à l'aide d'un calcul direct de primitive ou une IPP. Quand elles convergent donner leur valeur. Rédigez avec soin, je rappelle qu'on ne peut pas faire un calcul sur un intervalle contenant le point problématique.

$$\int_0^{+\infty} ue^{u^2}\ du;\quad \int_0^{+\infty} \frac{x\ dx}{x^2+4};\quad \int_0^{+\infty} x\ \cos(5x)dx;\quad \int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{t^2})dt\quad \int_0^1 t^2e^{-t}dt.$$

Réponses : diverge, diverge, diverge,converge : π.

▶ **Exercice 21**. ⋆ ⋆
Etudier si les intégrales généralisées suivantes convergent ou non, en les calculant à l'aide d'un changement de variable (essayez de les deviner : je mets les changements de variable à la fin de la feuille). Rédigez avec soin, je rappelle qu'on ne peut pas faire un calcul sur un intervalle contenant le point problématique.

$$\textbf{a)}\ \int_{-1/3}^{1} \ln(3x+1)\,\mathrm{d}x \quad \textbf{b)}\ \int_0^{1/2} \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}dt \quad \textbf{c)}\ \int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x, \textbf{d)}\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x}$$

Réponses : cv : $\frac{4(2\ln(2)-1)}{3}$, cv : $2(\sqrt{2}-2+2\ln(2)+(1-\frac{1}{\sqrt{2}})\ln(1-\frac{1}{\sqrt{2}})-(1+\frac{1}{\sqrt{2}})\ln(1+\frac{1}{\sqrt{2}}))$, cv : 0, cv : $\ln(2)$.

Je rédige ici l'exemple 2 qui est compliqué puisqu'il utilise deux changements de variable successifs. Déjà on se place sur $[x,1/2]$ pour $x>0$ car l'intégrale a un point problématique en 0.

Quand on a une racine carré d'un fonction polynomiale d'ordre 1, il est bienvenu de poser cette racine carrée en changement de variable. On pose donc $u=\sqrt{1-t}$, et donc $t=1-u^2$.
On a alors $du=\frac{-dt}{2\sqrt{1-t}}=-\frac{dt}{2u}$.
En termes de bornes, si $t=x$ alors $u=\sqrt{1-x}$ et si $t=1/2$ alors $u=1/\sqrt{2}$.
Ainsi

$$\int_x^{1/2} \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}dt = \int_{\sqrt{1-x}}^{1/\sqrt{2}} \frac{\ln(1-u^2)}{u}(-2udu) = 2\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{1-x}} \ln((1-u)(1+u))du = 2\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{1-x}} \ln(1-u)du + 2\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{1-x}} \ln(1+u)du$$

Calculons le morceau de gauche avec le changement de variable $s=1-u$ alors $ds=-du$. Pour les bornes, si $u=1/\sqrt{2}$ alors $s=1-1/\sqrt{2}$ et si $u=1$ alors $s=0$. Ainsi

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{1-x}} \ln(1-u)du = \int_{1-1/\sqrt{2}}^{1-\sqrt{1-x}} \ln(s)(-ds) = \int_{1-\sqrt{1-x}}^{1-1/\sqrt{2}} \ln(s)ds = [s\ln(s)-s]_{1-\sqrt{1-x}}^{1-1/\sqrt{2}}$$

Pour le morceau de droite, je vous laisse faire le changement de variable $u=1+t$. Ceci permet d'obtenir le résultat attendu en rassemblant les deux morceaux.

▸ **Exercice 22.** ⋆ ⋆ **Calcul d'une suite intégrale.**
Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : t \mapsto t^n \ln(t)$ est d'intégrale absolument convergente sur $]0,1]$ et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t)dt$.

Et si vous faisiez une IPP ? Vous devez trouver $-\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

▸ **Exercice 23.** ⋆ ⋆ ⋆ **Fourier c'est fou ! 1**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, on appelle transformée de Fourier de f, l'application

$$\widehat{f} : \xi \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx.$$

Montrer que chacune des fonctions suivantes est intégrable sur $\mathbb{R}$, calculer leur transformée de Fourier :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}, \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}, \quad f_3 : x \mapsto e^{-|x|}$$

Dessiner enfin la fonction et sa transformée de Fourier.

• Intégrabilité :
Les deux premières fonctions sont intégrables sur $\mathbb{R}$ car elles se ramènent à intégrer une fonction continue ($x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$) sur le segment $[-1,1]$.
Enfin le cours nous dit que $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. La fonction f_3 est alors intégrable sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est paire : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$.

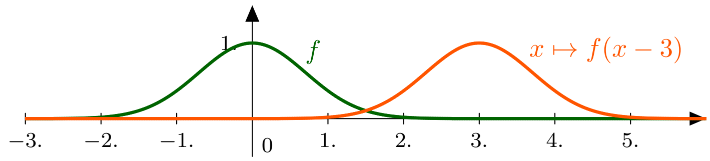
• Calculs des transformée de Fourier : soit $\xi \in \mathbb{R}$,
$\widehat{f_1}(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx = \int_{-1}^1 dx = 2$.
$\forall \xi \neq 0, \widehat{f_1}(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)e^{-ix\xi}dx = \int_{-1}^1 e^{-ix\xi}dx = \left[\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\right]_{-1}^1 = \frac{e^{-i\xi} - e^{i\xi}}{-i\xi} = \frac{2\sin(\xi)}{\xi}$.
Pour f_2, on fait une intégration par parties sachant que $x \mapsto x$ et $x \mapsto \dfrac{e^{-ix\xi}}{i\xi}$ sont de classe $C^1([-1,1])$. $\forall \xi \neq 0, \widehat{f_2}(\xi) = \displaystyle\int_{-1}^1 xe^{-ix\xi}dx = \left[x\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\right]_{-1}^1 + \frac{1}{i\xi}\int_{-1}^1 e^{-ix\xi}dx = \frac{e^{-i\xi} + e^{i\xi}}{-i\xi} + \frac{1}{i\xi}\widehat{f_1}(\xi) = -\frac{2\cos(\xi)}{i\xi} + \frac{2\sin(\xi)}{i\xi^2}$.
$\widehat{f_2}(0) = \displaystyle\int_{-1}^1 xdx = 0$.
$\widehat{f_3}(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}e^{-ix\xi}dx = \int_{-\infty}^0 e^x e^{-ix\xi}dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}e^{-ix\xi}dx = \int_{-\infty}^0 e^{x(1-i\xi)}dx + \int_0^{+\infty} e^{-x(1+i\xi)}dx$.
Or $\displaystyle\int_0^X e^{-x(1+i\xi)}dx = \frac{e^{-X(1+i\xi)} - 1}{-(1+i\xi)} = \frac{e^{-X}e^{-iX\xi} - 1}{-(1+i\xi)} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+i\xi}$ car $e^{iX\xi}$ est borné (de module 1) et que $e^{-X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Un calcul similaire mène à $\displaystyle\int_{-X}^0 e^{x(1-i\xi)}dx \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-i\xi}$.
Donc $\widehat{f_3}(\xi) = \dfrac{1}{1+i\xi} + \dfrac{1}{1-i\xi} = \dfrac{2}{1+\xi^2}$.

▸ **Exercice 24.** ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ **Fourier c'est fou ! 2 : Translations, dilatations**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, on appelle transformée de Fourier de f, l'application

$$\widehat{f} : \xi \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx.$$

1. **Translation :** Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On considère la translation de f, $g : x \mapsto f(x-a)$ Démontrer en faisant un changement de variable que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{g}(\xi) = e^{-ia\xi}\widehat{f}(\xi).$$



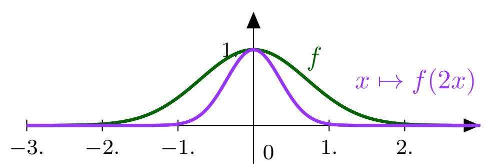
$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-ix\xi}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a)e^{-ix\xi}dx.$$

On effectue le changement de variable $\varphi : x \mapsto x-a$ qui est de classe $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Donc

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i(u+a)\xi}du = e^{-ia\xi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-iu\xi}du = e^{-ia\xi}\widehat{f}(\xi).$$

2. **Dilatation :** Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^\star$. On considère la dilatation de f, $h : x \mapsto f(\lambda x)$. Démontrer en faisant un changement de variable que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{h}(\xi) = \frac{1}{\lambda}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$



$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)e^{-ix\xi}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda x)e^{-ix\xi}dx.$$

On effectue le changement de variable $\varphi : x \mapsto \lambda x$ qui est de classe $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Donc

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{h}(\xi) = \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-iu\frac{\xi}{\lambda}}du = \frac{1}{\lambda}\widehat{f}(\frac{\xi}{\lambda}).$$

▸ **Exercice 25.** ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ **Fourier c'est fou ! 3 : La dérivée transformée en produit !**
Soit f une fonction de classe $C^1_0(\mathbb{R})$ cad C^1 à support compact : il existe $A > 0$ tel que $\{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\} \subset [-A, A]$. Alors

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f'}(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi).$$

Comme f est constante égale à 0 en dehors de $[-A, A]$, il en est de même pour f'. Donc $\widehat{f'}(\xi) = \int_{-A}^{A} f'(x)e^{-ix\xi}dx.$

Démontrer la proposition en faisant une intégration par parties.

Comme f et $x \mapsto e^{ix\xi}$ sont de classe $C^1([-A, A])$ alors

$$\widehat{f'}(\xi) = \int_{-A}^{A} f'(x)e^{-ix\xi}dx = [f(x)e^{-ix\xi}]_{-A}^{A} + i\xi\int_{-A}^{A} f(x)e^{-ix\xi}dx = i\xi\int_{-A}^{A} f(x)e^{-ix\xi}dx = i\xi\widehat{f}(\xi),$$

les deux dernières égalités venant du fait que f est nulle hors de $[-A, A]$ et que $f(A) = f(-A) = 0$.

7 AAV : Etudier la nature d'une intégrale généralisée non calculable

▸ **Exercice 26**. ⋆ ⋆
Etudier la convergence de chacune des intégrales généralisées suivantes, en précisant où se situe(nt) le(s) point(s) à problème. Même en cas de convergence, on ne demande pas de calculer la valeur de l'intégrale.

1. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dt}{t+5\sqrt{t}}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+2}}$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)dt}{e^{t^2}-1}$
4. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u-1}du$
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)^2}{t^4+6}dt$
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^4+6}dt$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^3+\sqrt{t}}dt$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^3}{(u+1)(e^u-1)}du$
10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[6]{t}+10}{\sqrt[3]{t}+\sqrt[4]{t^2}}dt$;
11. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(t^2+2)(3+5t)}dt$
12. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{3-\cos(x)}dx$
13. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin t}{(3+\cos(t))t^{4/3}}dt$
14. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(x)e^{-x}dx$
15. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}-t}dt$
16. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t^3-t^5}}dt$

✂ -

1. converge : équivalent en 0 : $1/5\sqrt{t}$.
2. converge : équivalent en $+\infty$: $1/t^2$.
3. diverge : équivalent en 0 : $1/t$.
4. diverge : minoration par $1/u$.
5. converge : majoration par $1/t^4$.
6. converge : majoration en valeur absolue par $1/t^4$.
7. converge : équivalent en 0 : 1.
8. converge : équivalent en 0 : $t^{3/2}$, majoration en $+\infty$ par $1/t^3$.
9. converge : équivalent en 0 : u^2, équivalent en $+\infty$: u^2e^{-u} qui est négligeable devant $e^{-u/2}$.
10. diverge : équivalent en 0 : $10/t^{1/3}$, équivalent en $+\infty$: $10/t^{1/3}$
11. converge : majoration par $\ln(t)/6$
12. converge : majoration par $e^{-2x}/2$
13. converge : majoration en valeur absolue par $1/(2t^{4/3})$.
14. converge : négligeable devant $e^{-x/2}$ en $+\infty$ et équivalent en 0 : $\ln(x)$.
15. diverge : équivalent en 1 : $2/1-t$
16. converge : équivalent en 0 : $10/t^{1/2}$, équivalent en 1 : $\sin(1)/\sqrt{2(1-t)}$

- ✂

▸ **Exercice 27**. ⋆ ⋆
Soit $0 < \alpha \leq 1$,

1. Expliquer pourquoi $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$ converge absolument.

✂ -

• $\displaystyle\frac{\sin(t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{1-\alpha}$ qui est positive et d'intégrale convergente sur $]0,1]$ car continue sur le segment $[0,1]$. Donc par comparaison, $t \mapsto \sin(t)/t^\alpha$ est-elle intégrable sur $]0,1]$.

- ✂

On va montrer maintenant que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente. Ainsi on aura prouvé que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge comme somme des deux intégrales convergentes sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$.

2. Soit $X > 1$. Effectuer une IPP de $\displaystyle\int_1^X \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$ en primitivant le sinus.

Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et cos sont de classe $C^1([1, X])$ donc par intégration par parties

$$\int_1^X \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t^\alpha}\right]_1^X - \alpha\int_1^X \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}dt$$

3. En déduire que $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_1^X \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$ existe. Conclure quant à l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$.

Pour l'intégrabilité c'est exactement le même raisonnement que la question 19 : il y a un problème en $+\infty$, on y applique un théorème de comparaison en majorant **en valeur absolue** par $1/t^{\alpha+1}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $\alpha + 1 > 1$.

Comme $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ alors l'intégrale de $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}$ sur $[1, +\infty[$ est convergente. Par définition, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_1^X \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}dt$ existe.

Comme par ailleurs $\cos(1) - \dfrac{\cos(X)}{X^\alpha}$ tend vers $\cos(1)$, on déduit l'existence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$ est convergente (d'après la question 1, la fonction est intégrable sur $]0, 1]$).

▸ Exercice 28. ⋆ ⋆ ⋆ **Calcul d'une suite intégrale**

$\forall n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. Etudier la monotonie puis la convergence de (I_n).
3. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n (Remplacez le numérateur 1 par $1 + t^2 - t^2$). En déduire la valeur de I_n.
4. $\sum(-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

1. En d'autres termes, montrer que cette intégrale converge.
2. Sous quelle condition une suite monotone converge-t-elle ?
3. Avec le terme en $t^2/(1+t^2)^{n+1}$, faites une IPP. Vous devez trouver $I_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n}I_n$ et donc que $I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n+1}n!^2}\pi$.

▸ Exercice 29. ⋆ ⋆ ⋆ **Calcul de l'intégrale de Gauss**

L'objectif de cet exercice est de calculer la valeur de l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$ est croissante et majorée. En déduire l'existence de l'intégrale de Gauss I.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n dx$. Calculer a_0 et a_1.

3. Démontrer l'inégalité stricte $0 < a_{n+1} < a_n$.
4. En posant $n \geqslant 2$, relier a_n à a_{n-2} à l'aide d'une IPP et de la relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
5. Montrer que si $n \geqslant 1$, on a $na_n a_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.
6. A l'aide de l'encadrement $a_{n+1} < a_n < a_{n-1}$ déterminer la limite de $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.
7. En déduire la limite de a_n et en déterminer un équivalent.
8. Démontrer que $\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$.
9. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, $b_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{x^2}{n})^n dx$ et $c_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\frac{x^2}{n})^n} dx$. Réaliser le changement de variable $x = \sqrt{n}\tan(t)$ sur $\displaystyle\int_0^X \frac{1}{(1+\frac{x^2}{n})^n} dx$ et en déduire l'existence de c_n.
10. A l'aide de l'inégalité de la question 8, démontrer que
$$b_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq c_n$$
11. A l'aide de deux changements de variable, exprimer c_n et b_n à l'aide de a_{2n+1} et a_{2n-2}. En déduire la valeur de I.

▸ **Exercice 30**. ⋆ ⋆ ⋆ Nous étudions dans ce problème des intégrales de la forme $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\sin(t)dt$ et nous cherchons à determiner des conditions sur f pour lesquelles cette intégrale est convergente.

1. **Deux exemples :** Etudier la nature des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\sin(t)dt$ en les calculant.
2. **Un résultat général :**
   (a) Démontrer que si f est d'intégrale absolument convergente sur $]0, +\infty[$ (si $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|dt$ converge) alors I est convergente. (on admet qu'on a un théorème de convergence absolue aussi sur les intégrales).
   (b) Expliquer alors pourquoi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1+t^2} dt$ est convergente.
3. **Un cas critique :** On choisit $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$. Démontrer que I est convergente.
4. **Une série numérique :** On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad a_n = \int_0^{+\infty} e^{-nt}\sin(t)dt$$
Démontrer que $\sum a_n$ converge.