Résumé sur la composition de DL

Methode pour faire une composition de DL

Exemple : Soit $f(x)$ une fonction usuelle pour les DL et $g(x) = 2 - 2x + 3x^2 + 4x^3 + x^3\varepsilon(x)$

On veut calculer le DL de $f(g(x))$

1. Si $f(x) = e^x$
   (a) Alors on ecrit (en utilisant $e^{a+b} = e^a e^b$)

$$e^{2-2x+3x^2+4x^3} = e^2 e^{\underbrace{-2x+3x^2+4x^3}_{h(x)}} \tag{1}$$

   (b) puis on calcule le DL de $e^{h(x)}$

2. Si $f(x) = \cos(x)$ ou $f(x) = \sin(x)$
   (a) Alors on ecrit (en utilisant les formules d'additions $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

$$\cos(2 - 2x + 3x^2 + 4x^3) = \cos(2)\cos(\underbrace{-2x+3x^2+4x^3}_{h(x)}) - \sin(2)\sin(\underbrace{-2x+3x^2+4x^3}_{h(x)}) \tag{2}$$

$$\sin(2 - 2x + 3x^2 + 4x^3) = \sin(2)\cos(\underbrace{-2x+3x^2+4x^3}_{h(x)}) + \sin(\underbrace{-2x+3x^2+4x^3}_{h(x)})\cos(2) \tag{3}$$

   (b) Puis on calcule le DL de $\cos(h(x))$ et $\sin(h(x))$

3. Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ou $f(x) = \sqrt{x}$ ou $f(x) = \ln(x)$
   (a) Alors on ecrit (en factorisant par 2) :

$$\frac{1}{2 - 2x + 3x^2 + 4x^3} = \frac{1}{2\left(1 - \frac{2}{2}x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{2}x^3\right)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1 + \underbrace{-\frac{2}{2}x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{2}x^3}_{h(x)}} \tag{4}$$

$$\ln\left(2 - 2x + 3x^2 + 4x^3\right) = \ln\left(2\left(1 - \frac{2}{2}x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{2}x^3\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(1 \underbrace{- \frac{2}{2}x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{2}x^3}_{h(x)}\right) \tag{5}$$

$$\sqrt{2 - 2x + 3x^2 + 4x^3} = \sqrt{2\left(1 - \frac{2}{2}x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{2}x^3\right)} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \underbrace{-\frac{2}{2}x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{2}x^3}_{h(x)}} \tag{6}$$

   (b) Puis on calcule le DL de $\dfrac{1}{1+h(x)}$ ou $\ln(1+h(x))$ ou $\sqrt{1+h(x)}$

Licence 1 2020-21
Transmission
Maths

Institut Villebon Georges Charpak

Chapitre 4 : Equivalents et développements asymptotiques

Equivalents

En gros, on va dire que deux fonctions sont 'équivalentes' en un point a si elles sont le même comportement autour de a. Voici la définition précise. On peut en donner une définition directe mais le plus simple est de se ramener à la définition qu'on vient de voir de la négligeabilité.

Définition 1 : Fonctions équivalentes

Soit f, g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ un élément de I ou l'une de ses bornes.
On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si $f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x)$ au voisinage de a.
On note

$$f \sim g,$$

ou bien lorsqu'on a besoin de précision, $f(x) \sim_{x \to a} g(x)$.

Si g ne s'annule pas autour de a, on a la définition équivalente, mais plus facile à manipuler :

Définition 2 :

Supposons que $g(x) \neq 0$ pour tout x dans un voisinage de a (g peut s'annuler en a).
Alors on a $f \sim g$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Preuve :

Supposons que $f \sim g$. Alors $f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x)$ pour une fonction ε qui tend vers 0 en a, donc $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 + \varepsilon(x)$ tend vers 1.
Réciproquement, si $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend ves 1, alors on peut définir $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} - 1$ et par conséquent ε tend vers 0 en a. Donc $f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x)$, qui donne $f \sim g$.

En particulier, si $f \sim_a g$, alors f et g ont la même limite en a.

Remarque 1 :

Si f admet une limite finie $\ell \neq 0$ lorsque x tend vers a, alors on a $f \sim_{x \to a} g$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

L'utilisation du mot "équivalent" est en partie justifié par la proposition suivante.

Proposition 1 :

- On a $f \sim g$ si et seulement si $g \sim f$.
- Supposons que $f \sim g$ et $g \sim h$ en un même point a. Alors on a $f \sim h$.

Proposition 2 :

Si f a un DL d'ordre n en 0, $f = P(x) + x^n\varepsilon(x)$ avec P non nul alors
f est équivalent a $a_i x^i$ où a_i est le premier coefficient non nul de P (ce coefficient existe forcément car sinon $P = 0$)

Preuve :

soit $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_i x^i + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$ avec $a_0 = a_1 = \ldots = a_{i-1} = 0$ et $a_i \neq 0$
c'est à dire que $f(x) = a_i x^i + a_{i+1} x^{i+1} + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$ alors

$$\frac{f(x)}{a_i x^i} = 1 + \underbrace{\frac{a_{i+1}}{a_i} x + \ldots + \frac{a_n}{a_i} x^{n-i} + x^{n-i}\varepsilon(x)}_{\varepsilon_1(x) \to 0}$$

$$\to 1$$

donc par définition $f \sim a_i x^i$

les équivalents les plus simples des fonctions usuelles en 0 sont donc :

Fonction	equivalents en 0
e^x	1
$\cos(x)$	1
$\sin(x)$	x
$\frac{1}{1-x}$	1
$\frac{1}{1+x}$	1
$\ln(1+x)$	x
$(1+x)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$	1
$\sqrt{1+x}$	1
$\tan(x)$	x

On peut faire la définition analogue pour les suites :

Définition 3 :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) est équivalente à (v_n), et on note $u_n \sim v_n$, si $u_n = v_n + o(v_n)$.
Si v_n ne s'annule pas (ou ne s'annule qu'un nombre fini de fois), cela revient à dire que $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Warning :

Malgré la tentation, ON N'ÉCRIT JAMAIS $f \sim 0$! La seule façon pour que ce soit vrai est en effet que $f(x) = 0$ pour tout x dans un voisinage de a. En général, ce n'est pas ce que vous voulez dire.

Règles de calcul

Pour les équivalents, les choses sont un peu plus compliquées. Les équivalents se comportent bien pour la multiplication :

Proposition 3 : Multiplication

Supposons $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$. Alors on a :

— $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.

— Si f_2 et g_2 ne s'annulent pas sur un voisinage de a (mais peuvent s'annuler en a), $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$.

Mais l'addition et la composition ne marchent pas très bien :

Warning :

On ne peut pas en général additionner des équivalents : Par exemple, si $f_1(x) = -x + x^2$ et $f_2(x) = x$, on a (quand x tend vers 0) $f_1 \sim -x$ et $f_2 \sim x$. Mais on a $f_1 + f_2 \sim x^2$ qui n'est pas équivalent à 0 !

Bonne pratique :

Pour trouver un équivalent de $f_1 + f_2$ en a, on fait un DL en a de $f_1 + f_2$ et on prend le premier coefficient $a_i x^i$ du DL.

▸ **Exercice 1**. Calculer les limites en 0 de ces fonctions

a) $\dfrac{\sin(x)\left(e^{3x} - \cos(x)\right)}{e^{-x} - \sin(-x) + \cos(-x) - 2}$

b) $\dfrac{\ln(1 + cos2x)}{sqrt1 + x + e^x}$

c) $\dfrac{sqrt1 + x}{2 + \sin(-3x)}$

d) $\dfrac{xe^{\cos(x) - \sin(x)}}{\sin(3x)}$

0.0.1 Tangente

Proposition 4 : Multiplication

Soit f une fonction qui admet un Dl d'ordre n en 0 : $f(x) = P(x) + x\varepsilon(x)$, $P(x) = \sum a_i x^i$
Alors $y = a_0 + a_1 x$ est l'équation de la tangente en 0. Soit $a_i x^i$ le premier terme non nul du DL plus grand que 1, la position du graphe de f dépend du signe de $a_i x^i$ au voisinage de 0.

— Si $a_i > 0$ et i pair alors f est au dessus de la tangente.

— si $a_i < 0$ et i pair alors f est en dessous de la tangente.

— Si $a_i > 0$ et i impair alors f est au dessus de la tangente pour $x > 0$ et en dessous pour $x < 0$.

— Si $a_i < 0$ et i impair alors f est en dessous de la tangente pour $x > 0$ et au dessus pour $x < 0$.

▸ **Exercice 2**. Donner les tangentes en 0 et la position relative de f pour les fonctions suivantes

a) e^x

b) e^{-x}

c) $3 + sin(x)$

d) $4e^x + cos(2x)$