

Equivalents

Définition 1:

On dit que deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont équivalentes s'il existe une suite (ϵ_n) tendant vers 0 en $+\infty$ telle que pour tout entier naturel n , $u_n = v_n(1 + \epsilon_n)$.

Nous vous donnons maintenant la définition "officielle", c'est celle-ci dont vous vous servirez pour les questions qui suivent. Commencez par l'écrire dans votre résumé de cours.

Définition 2: Cas particulier

On dit que deux suites réelles non nulles (u_n) et (v_n) sont équivalentes si $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

1. Equivalents de somme

- (a) Les suites suivantes sont équivalentes à $n : n, n-1, n+(-1)^n, n+\ln(n)$ car si on divise toutes ces quantités par n , la limite vaut 1.

$$A \ 1 : 1 + \frac{1}{n^2}, \frac{\ln(n)}{\ln(n)+1}.$$

- (b) $n+1+\frac{1}{n}$ est équivalent à $n+1, n+\frac{1}{n}$. Mais l'équivalent le plus simple est n .

L'équivalent le plus simple de $2n^2 - \ln(n) + 12$ est $2n^2$. Attention ce n'est pas équivalent à n^2 car le quotient tend vers 2.

Pour $n^3 + 4e^n + \ln(n) - 2$, le plus simple est n^3 .

- (c) Si v_n est négligeable devant u_n , l'intuition est que $u_n + v_n$ est équivalent à u_n . Vérifions le, il s'agit de montrer que $\frac{u_n + v_n}{u_n}$ tend vers 1.

$$\text{Or } \frac{u_n + v_n}{u_n} = 1 + \frac{v_n}{u_n} \text{ ce qui tend effectivement vers 1.}$$

- (d) Il s'agit de la proposition 2 du bilan.

- (e) Traitons $2n^2 - \ln(n) + 12 : v_n = -\ln(n) + 12$ est négligeable devant $u_n = 2n^2$ car $\frac{v_n}{u_n} = -\frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{12}{n^2}$ tend vers 0 (le premier terme tend vers 0 par croissances comparées). Donc $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n^2$.

2. Opérations sur les équivalents

- (a) En testant sur des exemples, les deux premiers marchent mais pas le dernier. Par exemple pour $u_n = n+1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n = v_n$ et $w_n = -n-2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n = z_n$ alors $u_n + w_n = -1$ n'est pas équivalent à $v_n + z_n = 0$.

- (b) Faisons la démonstration que $u_n w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n z_n$ cad montrons que $\frac{u_n w_n}{v_n z_n}$ tend vers 1.

On sait que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ cad que $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers 1 et que de même $\frac{w_n}{z_n}$ tend vers 1. Donc $\frac{u_n w_n}{v_n z_n}$ tend vers 1.

- (c) On utilise la propriété de quotient des équivalents (question précédente) : on détermine un équivalent du numérateur et du dénominateur.

Or $3n^2 + \ln(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3n^2$ car $\ln(n)$ est négligeable devant $3n^2$. De même $-e^n + n + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -e^n$

car $n+1$ est négligeable devant $-e^n$. Donc $\frac{3n^2 + \ln(n)}{-e^n + n + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{3n^2}{e^n}$.

- (d) On suppose que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, peut-on dire que :

- i. $e^{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{v_n} : n+1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ mais e^{n+1} n'est pas équivalent à e^n car le quotient tend vers e et pas 1. Donc le résultat est faux (on a un contre-exemple).
- ii. $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(v_n) :$
- iii. $f(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} f(v_n)$ pour f une fonction quelconque? Si on teste sur l'exponentielle, c'est faux d'après ce qui précède.

(e) La question 2 démontre la proposition 3 et la remarque 1 du bilan.

3. **Entraînez-vous!** Déterminez l'équivalent le plus simple des quantités suivantes :

$$n + \frac{1}{n}, \quad n^2 + n, 2^n - n^2, \quad 2^n + \ln(n) + n, \quad n! - 2^n, \quad (n + (-1)^n)(-2n + \sqrt{n}), \quad \frac{n^3 + 6}{2^n - n}, \quad \frac{n + 6}{2n - (-1)^n},$$

$$\frac{1}{n + \ln(n)}, \quad \frac{n^3 + (-1)^n - \sin(n)}{n^2 + 2 - e^n}, \quad \frac{\sin(n)}{2\sqrt{n} - 1}, \quad \sqrt{n+1}, \quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad \exp(n+1), \quad \ln(\sqrt{n} + \sin(n))$$

Solution

Voici dans l'ordre les solutions. Nous faisons en dessous un exemple de corrigé rédigé.

—

$$n, \quad n^2, 2^n, \quad 2^n, \quad n!, \quad -2n^2, \quad \frac{n^3}{2^n}, \quad \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{-n^3}{e^n}, \quad \frac{\sin(n)}{2\sqrt{n}}, \quad \sqrt{n}, \quad \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad \exp(n+1), \quad \ln(n)/2$$

Quelques exemples de rédaction :

- $(n + (-1)^n)(-2n + \sqrt{n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -2n^2$ car $n + (-1)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ et $-2n + \sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -2n$. En effet, $\frac{n + (-1)^n}{n} = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ tend vers 1 car $\frac{(-1)^n}{n}$ tend vers 0 par encadrement.
- $\sqrt{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}$ car $\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ tend vers 1.
- $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$

On va montrer que $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$. Or $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} = \sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{n} = \sqrt{n} (\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1)$

Donc $\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}{2}$ tend vers 1. Donc $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

Donc $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}.$

Séries numériques : une nouvelle façon de définir une suite

Dans ce paragraphe, nous allons découvrir une nouvelle façon de définir une suite.

1. Une balle de ping-pong rebondit mais ses rebonds s'amortissent. Il s'est écoulé une seconde entre le premier et le deuxième rebond, puis l'intervalle de temps entre deux rebonds successifs est, à chaque rebond, divisé par deux. La balle va-t-elle rebondir jusqu'à la fin des temps ou y aura-t-il un moment où elle ne rebondira plus ?
On pourra noter u_n l'intervalle de temps écoulé entre le n -ième et le $(n+1)$ -ième rebond.
2. Une île, peuplée d'un million d'habitants et isolée du reste du monde, reçoit la visite d'un bateau de ravitaillement chaque année. Cette année, à bord du bateau se trouvait une personne atteinte d'une maladie très contagieuse qui, avant de reprendre la mer, a contaminé 12 habitants de l'île. Les effets de la maladie sont très rapides : une personne contaminée est aussitôt contagieuse et ne reste contagieuse qu'un seul jour. L'évolution de la contagion est mesurée par le facteur de reproduction R qui indique le nombre moyen de personnes qu'une personne contaminée va contaminer pendant la journée où elle est contagieuse. Grâce aux mesures sanitaires immédiatement prises par les autorités, R baisse selon la loi suivante : $R_n = 12/n$, où R_n est sa valeur au n -ième jour.

Questions : l'épidémie va-t-elle s'arrêter un jour ? Si oui, toute la population aura-t-elle été touchée ? On notera u_n le nombre estimé de personnes tombant malades le n -ième jour et S_n le nombre estimé de personnes tombées malades entre le premier et le n -ième jour. On considèrera que l'épidémie est arrêtée le jour où $u_n < 1$.

Définition 3: Série numérique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique.

— La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

s'appelle la *série de terme général* u_n .

— Pour chaque entier n , le réel S_n s'appelle la somme partielle d'ordre n de la série.

Notation : la série de terme général u_n est aussi notée la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

3. Calculer les sommes suivantes :

$$S_N = \sum_{n=0}^N 5^n;$$

$$R_N = \sum_{n=0}^N 1;$$

$$Q_N = \sum_{n=0}^N (-1)^n;$$

$$T_N = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} \right);$$

$$U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k};$$

$$V_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}.$$

Indication pour V_N : se rappeler l'égalité remarquable (à compléter) : $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\dots}$.

Les six séries ainsi définies sont-elles convergentes ? Pouvez-vous calculer la limite de celles qui le sont ?

Solution.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N = \frac{1 - 5^{N+1}}{1 - 5} = \frac{5^{N+1} - 1}{4}$. Donc S_N tend vers $+\infty$ donc la série associée diverge.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $R_N = N + 1$ ce qui tend vers $+\infty$ donc la série associée diverge.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $Q_N = \frac{1 - (-1)^{N+1}}{1 - (-1)} = \frac{1 - (-1)^{N+1}}{2}$. Ceci n'a pas de limite car l'expression vaut alternativement 0 puis 1. Donc la série associée diverge.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $T_N = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \sum_{p=2}^{N+1} \frac{1}{p^2} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{1}{(N+1)^2} - 1$. (Changement d'indice $p = n + 1$ pour la première somme). Ceci tend vers -1 quand N tend vers $+\infty$. Donc la série converge et on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) = -1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{1 - (\frac{1}{3})^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = 3 \frac{(1 - (\frac{1}{3})^{n+1})}{2}$. Donc U_n tend vers $\frac{1}{2}$ puisque $(\frac{1}{3})^{n+1}$ est de limite nulle quand n tend vers l'infini. Donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} V_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+1 - n} \\ &= \sum_{n=1}^N \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ &= \sum_{p=2}^{N+1} \sqrt{p} - \sum_{n=1}^N \sqrt{n} \quad \text{par changement d'indice : } p = n + 1 \\ &= \sqrt{N+1} - 1 \end{aligned}$$

Donc V_N tend vers l'infini quand N tend vers l'infini. Donc la série associée diverge.

Définition 4: Série convergente, somme d'une série convergente

On dit que la série de terme général u_n est *convergente* si la suite (S_n) de ses sommes partielles l'est. Si c'est le cas, la limite de la suite (S_n) s'appelle la *somme de la série* et on la note : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Ainsi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

Quand la suite (S_n) n'est pas convergente, on dit que la série *diverge*.

Quand la suite (S_n) n'est pas convergente mais tend vers l'infini, on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty.$$

Attention : Ne pas confondre les deux notations :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

La première notation désigne la série de terme général u_n , c'est-à-dire la suite (S_n) de ses sommes partielles. La seconde notation désigne la *limite* de cette suite.

4. — Quel est la nature de l'objet mathématique $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$?
- Quel est la nature de l'objet mathématique $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$?

Solution .

$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est une suite de réels, chaque membre de la suite est un réel qui est obtenu en faisant la somme des termes jusqu'à un certain rang.

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est quant à lui un réel, c'est la limite de la série. La série est une suite qui a ou non une limite

et si cette limite existe c'est $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

5. *Retour sur l'exercice 3.*

- (a) Dans l'exercice 3, quel est le point commun entre les séries définies par les suites (S_n) , (Q_n) et (U_n) ? Pouvez-vous en imaginer une généralisation ?

Solution .

Ces trois séries ont des sommes partielles de la forme $S_N = \sum_{n=0}^N q^n$. Ces sommes valent pour

$N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$ si $q \neq 1$. La convergence en N dépend de la convergence du terme q^{N+1} . C'est la suite géométrique qui converge vers 0 si $-1 < q < 1$ et vers 1 si $q = 1$. Pour tout autre q elle diverge.

Ainsi la généralisation naturelle est $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n$ converge si et seulement si $-1 < q < 1$. Si c'est le cas

$$\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1}{1 - q}.$$

- (b) Dans l'exercice 3, quel est le point commun entre les séries définies par les suites (T_n) et (V_n) ? Pouvez-vous en imaginer une généralisation ?

Solution .

Ces deux séries ont des sommes partielles qui s'écrivent sous la forme $\sum_{n=0}^N v_{n+1} - v_n$ où v_n est une

suite donnée. Des calculs similaires à ceux effectués à la question 3 donnent que $\sum_{n=0}^N v_{n+1} - v_n = v_{N+1} - v_0$. Comme à la question 3, cette quantité converge quand N tend vers l'infini si et seulement si v_N converge.

Une généralisation est donc : $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_{n+1} - v_n$ si et seulement si v_N converge.

- (c) Il s'agit du théorème 6.

6. *Divergence grossière.* Dans cet exercice, on cherche à étudier les liens entre la convergence d'une suite (u_n) et celle de la série de terme général u_n .

- (a) Revenir sur les six exemples de l'exercice 3 : dans le tableau suivant, indiquez pour chacun des exemples la nature de la série et la nature de son terme général.

	Terme général u_n	Limite de la suite (u_n)	Nature de la série $\sum u_n$ (CV ou DV)	
Solution	S_N	5^n	$+\infty$	DV
	R_N	1	1	DV
	Q_N	$(-1)^n$	pas de limite	DV
	T_N	$\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}$	0	CV
	U_N	$\frac{1}{3^n}$	0	CV
	V_N	$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$	0	DV

- (b) Pour les exemples précédents, que peut-on dire de la suite (u_n) quand la série correspondante est convergente ?

Solution

Il semble que lorsque la série converge, u_n tende vers 0.

- (c) *Cas général.*

- i. *Petite question préliminaire.* Soit (x_n) une suite de nombre réels qui converge vers un réel l . Que peut-on dire de la suite $(x_{n+1} - x_n)$?

Solution

Si x_n tend vers un réel l , c'est le cas aussi pour x_{n+1} qui est la même suite mais décalée d'un indice. La différence tend donc vers 0.

- ii. Soit $\sum u_n$ une série numérique. On note, pour chaque entier n :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

On suppose que cette série est convergente. En appliquant la question préliminaire à la suite (S_n) , que peut-on dire de la suite (u_n) ?

Solution

On sait que la série est convergente donc la suite (S_n) converge vers un réel l . Or pour tout n , $u_n = S_n - S_{n-1}$. Donc la question précédente assure que u_n est de limite nulle.

- iii. On suppose que la suite (u_n) tend vers 0. Peut-on en conclure que la série $\sum u_n$ est convergente ?

Solution

Non comme le montre l'exemple de V_N dans le tableau ci-dessus.

- iv. Etablir un schéma logique qui relie les deux affirmations :

- La série $\sum u_n$ est convergente ;
- La suite (u_n) tend vers 0.

Solution

Si la série $\sum u_n$ est convergente alors la suite (u_n) tend vers 0 mais la réciproque est fausse.

- v. Il s'agit de la proposition 5.

Définition 5: Série grossièrement divergente

Une série numérique $\sum u_n$ est dite **grossièrement divergente** si son terme général u_n ne

tend pas vers 0.

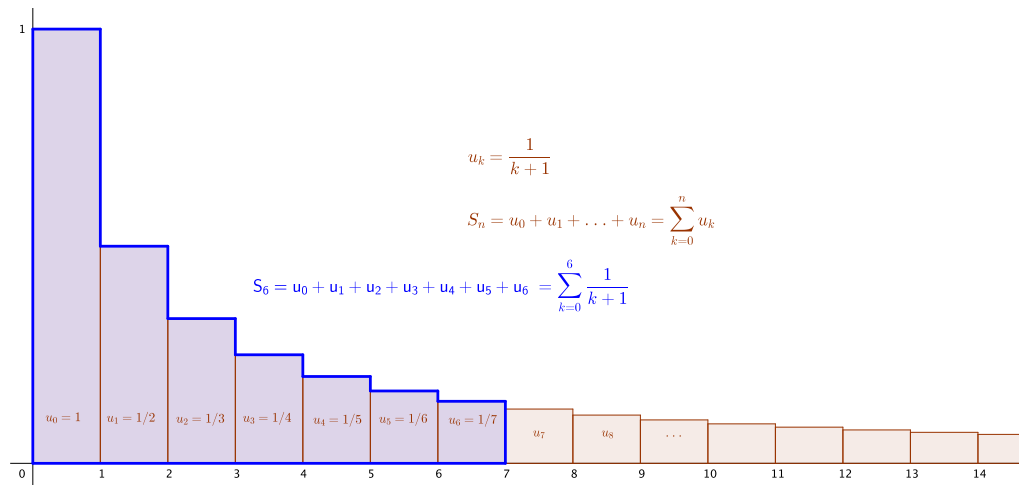
7. **La série harmonique** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{n+1}.$$

L'objet de l'exercice est d'étudier la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

(a) Quelle(s) propriété(s) pouvez-vous conjecturer/démontrer sur la suite (S_n) ?



Solution

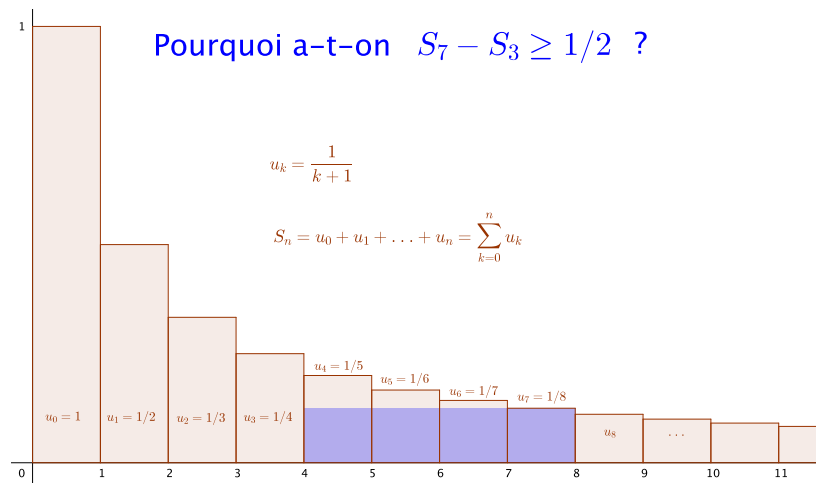
S_n étant l'aire bleue, elle semble croissante. Pour la convergence, c'est délicat, on pourrait se dire qu'on ajoute des aires de plus en plus petite et donc que ça convergera mais on a aussi l'exemple du logarithme qui nous montre qu'on peut tendre vers l'infini de moins en moins vite. Pour se faire une idée plus précise, l'outil informatique est utile : tracez les 10000 puis 100000 premiers termes et conjecturez.

Pensez-vous que la suite (S_n) est majorée? Précisez.

Solution

Observer les 10000 puis 100000 premiers termes donne le sentiment que la suite va être majorée car elle croît très lentement. Seulement en vérité ce n'est pas le cas.

(b) Démontrer que, pour tout entier n , $S_{2n+1} - S_n \geq 1/2$.



Solution

$$\text{Soit } n \text{ un entier, } S_{2n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k+1}.$$

Or pour tout k entre $n+1$ et $2n+1$, $0 < k+1 \leq 2n+2$, donc $\frac{1}{k+1} \geq \frac{1}{2n+2}$.

$$\text{Donc } \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k+1} \geq \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{2n+2}.$$

$$\text{Or } \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2n+2} \sum_{k=n+1}^{2n+1} 1 = \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2} \text{ car } \frac{1}{2n+2} \text{ ne dépend pas de } k.$$

$$\text{Donc } S_{2n+1} - S_n \geq \frac{1}{2}.$$

(c) Pensez-vous que la série $\sum u_n$ est convergente ? Justifiez.

Solution

Si la série converge alors S_n tend vers une limite finie réelle l . Alors S_{2n+1} tend aussi vers l (c'est la suite des termes impairs de S_n).

Donc $S_{2n+1} - S_n$ tend vers 0.

Or on a vu que cette quantité reste pour tout n supérieur ou égal à $1/2$ donc c'est absurde car sinon nous aurions $0 \geq \frac{1}{2}$.

Donc (S_n) diverge et la série diverge.

(d) Il s'agit du théorème 5 sur la série harmonique.

8. Que se passe-t-il quand on modifie quelques termes d'une série ?

(a) On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^{-n}.$$

Étudier la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ puis, si elle est convergente, calculer sa somme.

Solution

$\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique qui converge car sa raison est $\frac{1}{2}$ qui est de valeur absolue strictement inférieure à 1. Sa limite est $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$.

(b) On considère maintenant la suite (v_n) définie par :

$$v_n = 1 \text{ si } n \leq 10 \text{ et } v_n = 2^{-n} \text{ si } n > 10.$$

Étudier la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ puis, si elle est convergente, calculer sa somme.

Solution

On veut savoir si (S_N) définie pour N entier par $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$ converge quand N tend vers $+\infty$.

Pour $N > 10$,

$$S_N = \sum_{n=0}^{10} 1 + \sum_{n=11}^N 2^{-n}$$

En vous inspirant de la démonstration du calcul d'une somme géométrique, démontrez que

$$\sum_{n=11}^N 2^{-n} = \frac{2^{-11} - 2^{-(N+1)}}{1 - 2^{-1}} \text{ ce qui tend vers } \frac{2^{-11}}{1 - 2^{-1}} = 2^{-10}.$$

Donc S_N tend vers $11 + 2^{-10}$.

- (c) Pouvez-vous imaginer une propriété générale qui présente ce qui se passe quand on modifie les premiers termes d'une série? démontrer cette propriété?

Solution

On constate que changer les termes de départ ne changent pas la nature de la série mais uniquement la valeur de la limite. La démonstration est en effet la même : la différence est que la somme partielle dont on calcule la limite commence à un indice plus élevé. Les premiers termes n'influent pas sur la convergence : les 11 premiers termes dans la question précédente constituent une somme finie donc ont une valeur finie.

- (d) Il s'agit de la proposition 6 disant que les premiers termes d'une série ne jouent pas sur sa nature.

9. **Rédaction de la première fiche de cours sur les séries** Sur la première fiche de cours consacrée aux séries, reprendre les définitions déjà vues, rajouter les propriétés générales qui vous semblent importantes.

Nous avons vu dans les exercices de ce paragraphe trois *séries de référence* :

- La série harmonique ;
- Les séries géométriques (à vous de préciser de quoi il s'agit) ;
- Les séries télescopiques (à vous de préciser de quoi il s'agit).

Résumer de manière synthétique ce que l'on sait sur ces objets.

Séries à termes positifs

Dans le paragraphe précédent, nous avons calculé la somme de séries géométriques ou de séries télescopiques convergentes. Nous avons pu le faire car nous étions capables d'exprimer simplement en fonction de n les sommes partielles S_n de ces séries.

Malheureusement, en général, il n'est pas possible d'écrire l'expression de S_n en fonction de n , si bien que l'étude de la nature de la série (convergence ou divergence) n'est pas aussi simple. Et quand la série converge,

le calcul de sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est souvent très difficile.

Dans ce paragraphe et le suivant, nous allons nous contenter d'étudier la nature d'une série (convergence ou divergence) et nous ne chercherons pas à en calculer la somme (quand elle est convergente).

Dans ce paragraphe, nous étudions uniquement les séries à termes positifs, c'est-à-dire les séries numériques $\sum u_n$ pour lesquelles $u_n \geq 0$ pour tout entier n .

La **démarche** sera la suivante :

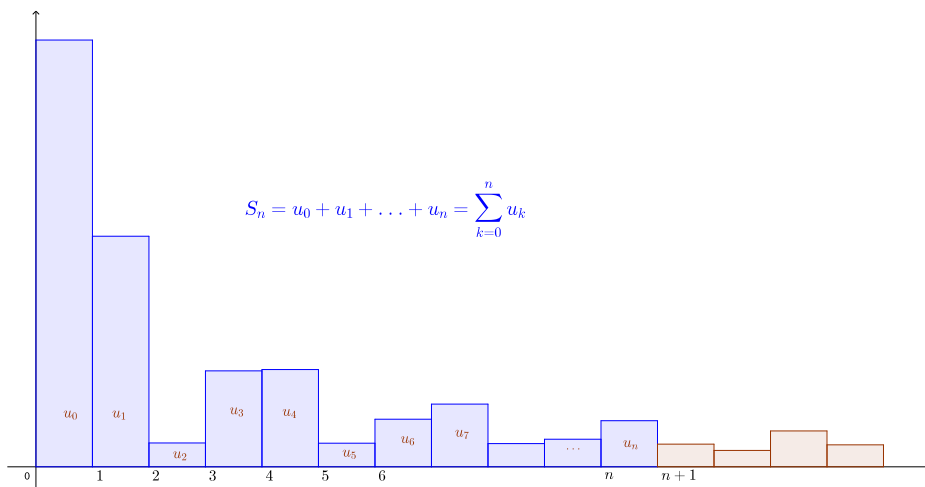
- Disposer d'un certain nombre de séries de référence dont nous connaissons la nature ;
- Établir ensuite des propriétés générales qui permettent de ramener l'étude d'une série à termes positifs à celle d'une série de référence.

Dans la feuille de cours que vous allez construire, il faudra faire apparaître ces deux étapes.

Mais, tout d'abord, **pourquoi étudier les séries à termes positifs** ? C'est le sujet du premier exercice.

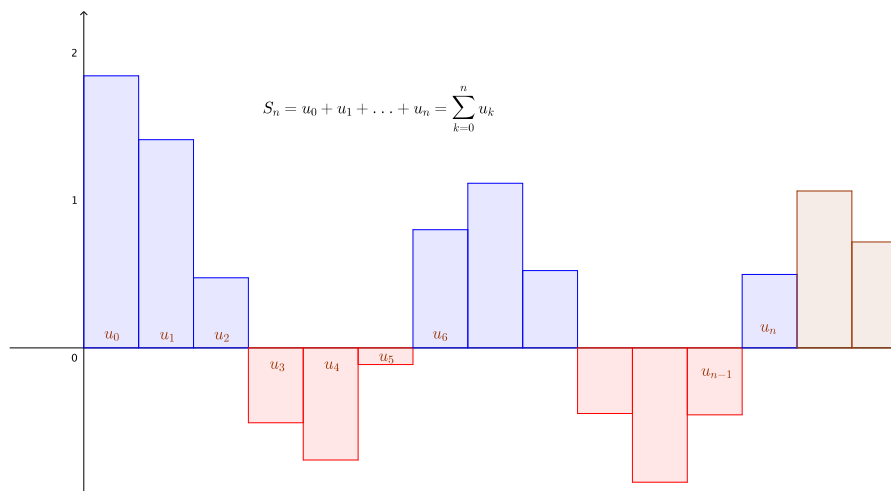
1. Soit (u_n) une suites à termes positifs et soit, pour chaque entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

- (a) En s'inspirant du graphique ci joint, interpréter S_n comme l'aire d'une partie du plan.



Solution. Le nombre S_n est la somme des aires des rectangles de largeur 1 et de hauteur u_k , pour chaque k compris entre 0 et n .

- (b) Et si les u_n n'étaient pas tous positifs, pourrait-on encore interpréter S_n comme une aire ?



Solution. Quand u_k est négatif, l'aire du rectangle correspondant est égale à $-u_k$ (une aire est toujours positive). Donc S_k est égale à la somme des rectangles correspondant aux u_k positifs ou nuls, à laquelle il faut soustraire la somme des aires des rectangles (rouges sur le graphique) correspondant aux u_k négatifs.

2. Mais qu'ont donc de si spécial les séries à termes positifs ?

- (a) Avez-vous le souvenir d'une propriété qui permet de montrer qu'une suite est convergente sans avoir besoin de calculer sa limite ?

Solution. C'est le sujet de la première feuille de TD : on sait qu'une suite croissante et majorée est convergente. Pas la peine de calculer sa limite pour le démontrer : il suffit de démontrer qu'elle est croissante et majorée.

- (b) Soit $\sum u_n$ une série numérique. On note :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

À quelle condition la suite (S_n) est-elle croissante ?

Solution. La suite (S_n) est croissante si et seulement si $S_n - S_{n-1} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$. Or :

$$S_n - S_{n-1} = u_n.$$

Donc la suite (S_n) est croissante si et seulement si la suite (u_n) est à termes positifs ou nuls à partir du rang $n = 1$.

- (c) On suppose maintenant que la suite (u_n) est à termes positifs.

— On suppose que la suite (S_n) est majorée. Que peut-on dire de la série $\sum u_n$?

Solution. Puisque la suite (u_n) est à termes positifs, la suite (S_n) est croissante. Si, de plus, elle est majorée, alors elle est convergente en vertu du théorème 1 du cours.

— On suppose que la suite (S_n) n'est pas majorée. Que peut-on dire de la série $\sum u_n$?

Solution. Toujours en vertu du cours sur les suites monotones : si la suite croissante (S_n) n'est pas majorée, alors elle tend vers l'infini. Donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty.$$

- (d) On suppose à nouveau que la suite (u_n) est à termes positifs. Établir un schéma logique qui relie les deux affirmations :

- La série $\sum u_n$ est convergente ;
- La suite (S_n) est majorée.

Solution. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si la suite (S_n) est majorée.

- (e) *Question subsidiaire.* Revenir sur la série dont les sommes partielles sont notées Q_N dans l'exercice 3 du paragraphe précédent. La suite (Q_n) est-elle majorée ? La série est-elle convergente ? Que pouvez-vous conclure ?

Solution. On a vu dans l'exercice 3 du paragraphe précédent que : $Q_n = 1$ si n est pair et $Q_n = 0$ si n est impair. La suite (Q_n) est donc majorée par 1. Or cette suite ne converge pas, donc la série correspondante ne converge pas. Mais cette série n'est pas à termes positifs, donc cela ne contredit pas ce que l'on a vu dans les questions précédentes. En revanche, cela montre que l'hypothèse "la série est à termes positifs" est indispensable pour avoir l'équivalence obtenue dans la question précédente.

(Penser à compléter le cours avec les résultats obtenus dans cet exercice.)

- (f) Il s'agit de la proposition 7 disant qu'une série positive est convergente si et seulement si elle est majorée.

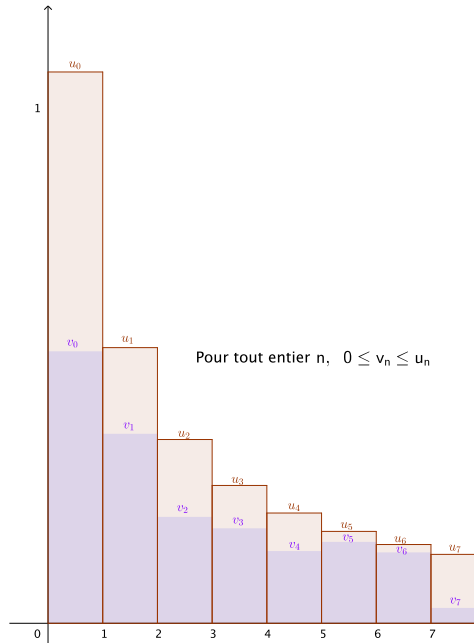
3. *Comparaison par majoration ou minoration de deux séries à termes positifs.* Cet exercice utilise le résultat démontré dans l'exercice 2

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq v_n \leq u_n.$$

- (a) Pouvez-vous conjecturer le ou les liens logiques entre les deux affirmations suivantes ?

- La série $\sum u_n$ est convergente ;
- La série $\sum v_n$ est convergente.



Indication. Si l'on note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^n v_k$, peut-on comparer S_n et T_n ?

Solution. Si $v_n \leq u_n$ pour tout entier n , alors $T_n \leq S_n$ pour tout entier n . On peut donc penser que si la suite (S_n) est majorée, la suite (T_n) le sera aussi. Donc, d'après l'exercice 2, si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la série $\sum v_n$ le sera aussi.

(b) Démontrer vos conjectures.

Solution. Supposons que la série $\sum u_n$ est convergente. Alors, d'après l'exercice 2, la suite (S_n) est majorée par un certain réel M :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n \leq M.$$

Or, puisque $v_n \leq u_n$ pour tout entier n , on a aussi, pour tout entier n :

$$\sum_{k=0}^n v_k \leq \sum_{k=0}^n u_k,$$

c'est-à-dire $T_n \leq S_n$. Mais alors $T_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (T_n) est donc majorée. Puisque la suite (v_n) est à termes positifs, on peut déduire de l'exercice 2 que la série $\sum v_n$ est convergente.

Conclusion : si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la série $\sum v_n$ l'est aussi.

(c) Il s'agit du théorème 8 dit de comparaison à majoration/minoration.

(d) Peut-on déduire de ce qui précède la nature des séries suivantes ?

$$\begin{array}{cc} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n + 1} & \sum_{n \in \mathbb{N}} (5^n + n) \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n - 1} & \sum_{n \in \mathbb{N}} (5^n - 1) \end{array}$$

Indication. Comparer le terme général de ces séries avec celui de séries plus simples déjà vues.

Solution.

— Posons $u_n = \frac{1}{2^n + 1}$. Nous avons déjà étudié la série de terme général $v_n = \frac{1}{2^n}$. Or ces deux séries sont à termes positifs et l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2^n + 1} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Or nous savons que la série $\sum \frac{1}{2^n}$ est convergente car il s'agit d'une série géométrique de raison $1/2$ et que $1/2 < 1$. Nous voyons aussi que les deux suites (u_n) et (v_n) sont à termes positifs. Donc, d'après la question précédente, nous pouvons en déduire que la série $\sum u_n$ est convergente.

— Posons $u_n = 5^n + n$. Une série plus simple à laquelle on pourrait penser est celle de terme général $v_n = 5^n$. Les deux sont à termes positifs et l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 5^n \leq 5^n + n.$$

Mais voilà : la série $\sum 5^n$ est une série géométrique de raison 5 et $5 > 1$. Donc elle est divergente. Que peut-on en déduire ?

Si la série $\sum 5^n + n$ était convergente, alors la série $\sum 5^n$ le serait aussi par comparaison.

Mais ce n'est pas le cas, donc la série $\sum 5^n + n$ est *divergente*.

Prise de recul. De façon générale, si on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq v_n$$

et si la série $\sum u_n$ est divergente, alors la série $\sum v_n$ l'est aussi. En effet, si la série $\sum v_n$ était convergente, alors nous pourrions en déduire que la série $\sum u_n$ le serait aussi, ce qui n'est pas le cas.

- Pour étudier la série de terme général $1/(2^n - 1)$, nous avons envie d'introduire ici aussi la série $\sum \frac{1}{2^n}$. Mais $2^n \geq 2^n - 1$ et donc :

$$(*) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n - 1}.$$

La série $\sum \frac{1}{2^n}$ est convergente mais on ne peut rien en déduire sur la convergence de la série $\sum \frac{1}{2^n - 1}$ car la majoration $(*)$ n'est pas dans le bon sens.

Prise de recul. Attention au sens des majorations : nous avons démontré que si

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq u_n$
- et si la série $\sum u_n$ est convergente,

alors la série $\sum v_n$ est aussi convergente. Mais avec la même majoration $0 \leq v_n \leq u_n$, si nous savons que $\sum v_n$ est convergente, nous ne pouvons rien en déduire sur la série $\sum u_n$. (Cherchez des exemples.)

- Pour étudier la série $\sum 5^n - 1$, nous avons envie d'utiliser à nouveau la série $\sum 5^n$. Nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq 5^n - 1 \leq 5^n.$$

Pour utiliser le résultat obtenu dans les questions précédentes, il faudrait que la série $\sum 5^n$ soit convergente, ce qui n'est pas le cas. On ne peut donc rien en conclure.

Prise de recul. Si on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq v_n$$

et si l'on sait que la série $\sum v_n$ est divergente, on ne peut rien en conclure sur la série $\sum u_n$. (On pourra chercher des exemples où la série $\sum u_n$ converge et d'autres où elle diverge.)

- Utiliser le résultat obtenu à l'exercice 2 pour imaginer des exemples de séries convergentes et divergentes.

Solution. Nous savons que toute série géométrique de raison comprise dans l'intervalle $[0, 1[$ est convergente. Une série dont le terme général u_n peut être majoré par une expression de la forme r^n avec $r \in [0, 1[$ est donc convergente. Par exemple :

$$u_n = \frac{1}{3^n + 1} \quad u_n = \frac{1}{2^n + n + 3} \quad \dots$$

Construction de séries divergentes : l'exercice 2 nous dit que si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout entier n et si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ est aussi divergente. Ainsi, une série dont le terme général u_n majore celui d'une série divergente est divergente. Par exemple :

$$u_n = 2^n + 1,$$

puisque $u_n \geq 2$ et que la série $\sum 2^n$ est divergente. Mais, dans ce cas, il est plus simple de constater que la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente puisque u_n ne tend pas vers 0.

Pour trouver un exemple de série divergente qui n'est pas grossièrement divergente, on peut utiliser par exemple la série harmonique, de terme général $u_n = 1/n$ pour $n \geq 1$. On sait que cette série diverge alors que u_n tend vers 0.

En utilisant l'exercice 2, on peut alors construire des séries divergentes en cherchant des séries dont le terme général v_n majore u_n pour tout $n \geq 1$, c'est-à-dire : $v_n \geq 1/n$. Par exemple :

$$v_n = \frac{1}{n-1} \text{ pour } n \geq 2, \quad v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad v_n = \frac{1}{\ln n} \text{ pour } n \geq 2 \quad \dots$$

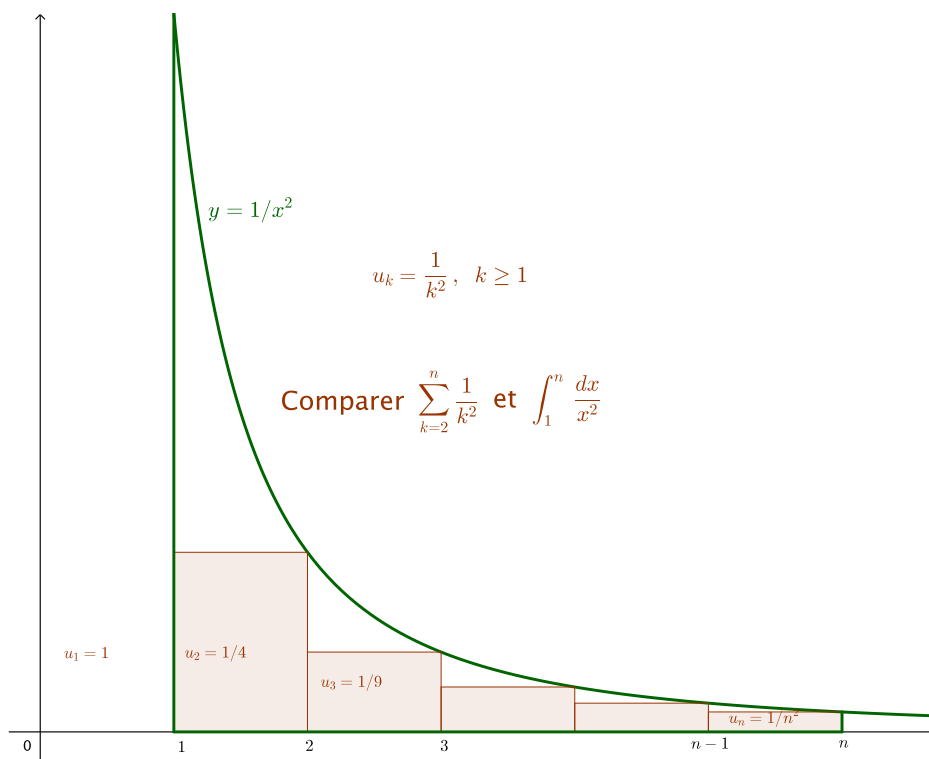
- À la recherche d'autres séries de référence : les séries de Riemann.

- (a) On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2}$. Comme u_0 n'est pas défini, les sommes partielles sont définies ici par :

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

- i. Soit $n \geq 2$. En utilisant le graphique ci-joint pour se donner des idées, comparer les deux quantités :

$$T_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad U_n = \int_1^n \frac{dx}{x^2}.$$



Solution. La quantité T_n représente l'aire hachurée en orange sur la figure : la somme des rectangles de hauteur $u_k = \frac{1}{k^2}$ et de largeur 1, quand k varie de 2 à n . Et l'intégrale U_n représente l'aire comprise entre la courbe $y = 1/x^2$, l'axe horizontal et les deux verticales d'abscisses $x = 1$ et $x = n$. On "voit sur le dessin" que :

$$T_n \leq U_n.$$

Pour le démontrer, on peut découper l'intégrale U_n en plusieurs morceaux :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k-1}^k \frac{dx}{x^2}$$

(c'est la relation de Chasles) puis dire que, pour chaque $k \geq 2$, le morceau $\int_{k-1}^k \frac{dx}{x^2}$ est plus grand que $u_k = \frac{1}{k^2}$. Et ceci est vrai car :

$$\forall x \in [k-1, k] \quad x^2 \leq k^2 \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{k^2};$$

si on intègre cette dernière inégalité entre $k-1$ et k , on trouve :

$$\int_{k-1}^k \frac{dx}{x^2} \geq \int_{k-1}^k \frac{dx}{k^2} = \frac{1}{k^2}.$$

- ii. Étudier les propriétés de la suite (U_n) : est-elle monotone ? convergente ? bornée ?

Solution. On peut calculer simplement l'intégrale U_n , cela permet de répondre facilement aux trois questions :

$$U_n = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^n = -\frac{1}{n} + 1.$$

On voit alors que la suite U_n est croissante (puisque $(1/n)$ est décroissante), qu'elle converge vers 1 et qu'elle est majorée par 1 puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad -\frac{1}{n} \leq 1.$$

- iii. En déduire que la série $\sum 1/n^2$ est convergente.

Solution. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad T_n \leq U_n \leq 1.$$

La suite des sommes partielles (T_n) est donc bornée. Donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} 1/n^2$, qui est à termes positifs, est convergente en vertu de l'exercice 2.

- (b) Soit α un nombre réel positif ou nul. La **série de Riemann** de paramètre α est la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Comme à la question précédente, on constate que u_0 n'est pas défini, aussi les sommes partielles de la série sont définies par :

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}.$$

Refaire tout le raisonnement de la question précédente en remplaçant 2 par α . Pour quelles valeurs de α est-il encore valable ?

Solution. Si l'on refait tout comme dans la question précédente en remplaçant 2 par α , la majoration $T_n \leq U_n$ est encore vraie mais le calcul de U_n dépend de α :

— Si $\alpha \neq 1$:

$$U_n = \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^n x^{-\alpha} dx = \frac{1}{-\alpha+1} [x^{-\alpha+1}]_1^n = \frac{1}{-\alpha+1} (n^{-\alpha+1} - 1).$$

Pour que (U_n) soit convergente et majorée, il faut que $-\alpha+1 < 0$. Dans ce cas, U_n tend vers 1 comme dans le cas $\alpha = 2$ et l'on peut continuer le raisonnement sans changement.

Si, en revanche, $-\alpha+1 > 0$, alors U_n tend vers l'infini et le raisonnement de la question précédente ne fonctionne plus.

— Si $\alpha = 1$:

$$U_n = \int_1^n \frac{dx}{x} = \int_1^n \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^n = \ln n.$$

Dans ce cas, U_n tend vers l'infini, cette suite n'est donc pas majorée et l'on ne peut pas continuer le raisonnement comme dans la question précédente.

Conclusion : le raisonnement de la question précédente est valable si et seulement si $\alpha > 1$.

- (c) Que peut-on dire dans le cas $\alpha = 1$? (Utiliser sa mémoire ...)

Solution. Dans le cas $\alpha = 1$, la série $\sum 1/n$ est la série harmonique, nous savons qu'elle est divergente.

- (d) On suppose que $0 \leq \alpha < 1$. Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, comparer $1/n$ et $1/n^\alpha$ puis utiliser le résultat de l'exercice 2 pour étudier la nature de la série $\sum 1/n^\alpha$.

Solution.

Si $\alpha < 1$, alors on a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: $n^\alpha \leq n$ et donc :

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

Comme la série harmonique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} 1/n$ est divergente, on déduit de l'exercice 2 que la série

$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} 1/n^\alpha$ est aussi divergente.

(e) Il s'agit du théorème 8 donnant le critère de convergence des séries de Riemann.

6. En utilisant l'exercice 2 et les séries de référence déjà vues, peut-on étudier la nature des séries suivantes ?

$$(A) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{n^3 + 1} \quad (B) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2 - 1}{n^4} \quad (C) \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n + 1}{n^4} \quad (D) \sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n} - 1} \quad (E) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n} + 1}$$

Solution. Il faut tout d'abord remarquer que **ces séries sont toutes à termes positifs**, ce qui permet d'utiliser l'exercice 2. L'idée est de chercher à majorer le terme général de la série étudiée par celui d'une série de référence convergente ou bien de le minorer par celui d'une série de référence divergente.

— (A) : comme $n^3 + 1 \geq n^3$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{n}{n^3 + 1} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Le terme général de la série étudiée est donc majoré par celui de la série de Riemann $\sum 1/n^\alpha$ avec $\alpha = 2$. Comme $\alpha > 1$, la série de Riemann est convergente et l'on peut déduire, par comparaison de séries à termes positifs, que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{n^3 + 1}$ l'est aussi.

— (B) : comme $n^2 - 1 \leq n^2$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{n^2 - 1}{n^4} \leq \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}.$$

Le terme général de la série étudiée est donc majoré par celui de la série de Riemann $\sum 1/n^\alpha$ avec $\alpha = 2$. Comme ci-dessus, on en déduit que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2 - 1}{n^4}$ est convergente.

— (C). Ici, on ne peut pas raisonner par majoration. En revanche, on peut décomposer les sommes partielles de la série en une somme de sommes partielles de deux séries connues :

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{n+1}{n^4} = \sum_{n=1}^N \frac{n}{n^4} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^3} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^4}.$$

Or les sommes partielles $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^3}$ et $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^4}$ correspondent à des séries de Riemann convergentes puisque $3 > 1$ et $4 > 1$. La somme de deux suites convergentes étant convergente, on en déduit que la suite (S_N) est convergente est donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n+1}{n^4}$ est convergente.

— (D). Nous avons : $\sqrt{n} - 1 \leq \sqrt{n}$. Donc :

$$\forall n \geq 2 \quad \frac{1}{\sqrt{n} - 1} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}.$$

Or la série $\sum 1/n^{1/2}$ est une série de Riemann divergente puisque $1/2 \leq 1$. Donc, par comparaison par minoration avec une série à termes positifs divergente, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n} - 1}$ est divergente.

- (E). En procédant comme dans les exemples précédents, on a envie d'écrire : $\sqrt{n} + 1 \geq \sqrt{n}$ et donc :

$$\frac{1}{\sqrt{n} + 1} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Mais voilà : la série de Riemann $\sum 1/n^{1/2}$ est divergente. Nous avons donc **majoré** le terme général de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n} + 1}$ par celui d'une série **divergente**. De cette situation, nous ne pouvons rien conclure.

Il faut alors ruser davantage et constater que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sqrt{n} + 1 \leq \sqrt{n} + \sqrt{n} = 2\sqrt{n}.$$

Et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{\sqrt{n} + 1} \geq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \frac{1}{n^{1/2}}.$$

La série de Riemann $\sum 1/n^{1/2}$ est divergente car $1/2 \leq 1$, donc la série $\sum 1/2n^{1/2}$ l'est aussi (pourquoi ?). Par comparaison par minoration avec une série de Riemann divergente, on en déduit que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n} + 1}$ est divergente.

7. En utilisant l'exercice 2 et les séries de référence déjà vues, étudier la nature des séries suivantes :

$$\begin{array}{ll} (a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{5n^4 + n}; & (b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \sin^2 n}; \\ (c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{4 + \cos n}; & (d) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}; \\ (e) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}}; & (f) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}; \\ (g) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^3}; & (h) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n + \frac{1}{n})^n}; \end{array}$$

Solution. La méthode est toujours la même : d'abord, vérifier que la série est bien à termes positifs, puis :

- majorer le terme général par celui d'une série de référence convergente, et conclure alors que la série est convergente.
- ou bien minorer le terme général par celui d'une série de référence divergente, et conclure alors que la série est divergente.
- (a) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{n^2}{5n^4 + n} \leq \frac{1}{5n^2}.$$

Par comparaison par majoration avec la série de Riemann $\sum 1/n^2$ qui converge puisque $2 > 1$, la série est convergente.

- (b) Puisque $\sin^2 n \leq 1$, on a : (a)

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n \sin^2 n} \geq \frac{1}{n}.$$

Par comparaison par minoration avec la série harmonique $\sum 1/n$ qui diverge, la série est divergente.

- (c) La **suite** de terme général $\sqrt{n}/(4 + \cos n)$ ne tend pas vers 0. La **série** correspondante est donc grossièrement divergente, donc divergente.
- (d) On a : $\sqrt{n^2 - 1} \leq \sqrt{n^2} = n$. Donc :

$$\forall n \geq 2 \quad \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \geq \frac{1}{n}.$$

Par comparaison par minoration avec la série harmonique qui diverge, la série étudiée est divergente.

- (e) On a : $\sqrt{n^3 + 1} \geq \sqrt{n^3} = n^{3/2}$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Par comparaison par majoration avec la série de Riemann $\sum 1/n^{3/2}$ qui converge puisque $3/2 > 1$, la série étudiée est convergente.

- (f) On a : $\ln n \geq 1$ dès que $n \geq 3$. Donc :

$$\forall n \geq 3 \quad \frac{1}{n^2 \ln n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Par comparaison par majoration avec la série de Riemann $\sum 1/n^2$ qui converge puisque $2 > 1$, la série étudiée est convergente.

Remarque. La majoration utilisée n'est valable que pour n supérieur à 3. Mais nous avons vu dans l'exercice 8c, p. 9, que la convergence ou la divergence de la série ne dépend pas de la valeur de ses premiers termes. Notre raisonnement est donc correct.

- (g) Pour résoudre cet exercice, il faut se rappeler que $\ln n \leq n$ pour tout entier non nul n . On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{\ln n}{n^3} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Par comparaison par majoration avec la série de Riemann $\sum 1/n^2$ qui converge puisque $2 > 1$, la série étudiée est convergente.

- (h) Surtout, ne pas se laisser intimider. Si l'on souhaite majorer le terme général de cette série, on peut tenter de minorer le dénominateur. Par exemple, pour $n \geq 1$:

$$n + \frac{1}{n} \geq n.$$

Donc :

$$\frac{n^2}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{n^2}{n^n} = \frac{1}{n^{n-2}}.$$

La série $\sum \frac{1}{n^{n-2}}$ n'est pas une série de Riemann, mais on peut encore majorer : par exemple :

$$\forall n \geq 4 \quad n - 2 \geq 2 \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{n^{n-2}} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Par comparaison par majoration avec la série de Riemann $\sum 1/n^2$ qui converge puisque $2 > 1$, la série étudiée est convergente.

8. Utilisation des croissances comparées.

- (a) Rappelez-vous la limite des suites (u_n) définies par :

i. $u_0 = 0$ et $u_n = \frac{\ln n}{n}$ pour $n \geq 1$;

ii. $u_0 = 0$ et $u_n = \frac{\ln n}{n^\alpha}$ pour $n \geq 1$, où $\alpha > 0$;

- iii. $u_n = \frac{n^4}{e^n}$;
- iv. $u_n = \frac{n^p}{a^n}$, avec $p > 0$ et $a > 1$.

Solution.

- i. $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$ quand n tend vers l'infini ;
 - ii. si $\alpha > 0$, alors $\frac{\ln n}{n^\alpha} \rightarrow 0$ quand n tend vers l'infini ;
 - iii. $\frac{n^4}{e^n} \rightarrow 0$ quand n tend vers l'infini ;
 - iv. si $p > 0$ et $a > 1$, alors $\frac{n^p}{a^n} \rightarrow 0$ quand n tend vers l'infini .
- (b) On se rappelle que si une suite (u_n) tend vers 0, alors on a : $u_n \leq 1$ à partir d'un certain rang. C'est-à-dire qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq 1$ pour tout $n \geq N$. Voyez-vous comment utiliser cela pour démontrer que la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln n}{n^3}$$

est convergente ?

Solution

Puisque $\ln/n$ tend vers 0 à l'infini, il existe un entier N tel que :

$$\forall n \geq N \quad \frac{\ln n}{n} \leq 1.$$

On a donc :

$$\forall n \geq N \quad \frac{\ln n}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Par comparaison par majoration avec la série de Riemann $\sum 1/n^2$ qui converge puisque $2 > 1$, la série étudiée est convergente. Nous avons bien le droit de raisonner ainsi car la série est à termes positifs.

- (c) Étudier de la même manière la nature de la série suivante :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2}{e^n}$$

(Indication : à partir d'un certain rang, on a : $e^n \geq n^4$. Pourquoi ?)

Solution

Puisque n^4/e^n tend vers 0 à l'infini, il existe un entier N tel que :

$$\forall n \geq N \quad \frac{n^4}{e^n} \leq 1.$$

On a donc :

$$\forall n \geq N \quad \frac{n^2}{e^n} = \frac{n^4}{e^n} \cdot \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Par comparaison par majoration avec la série de Riemann $\sum 1/n^2$ qui converge puisque $2 > 1$, la série étudiée est convergente. Nous avons bien le droit de raisonner ainsi car la série est à termes positifs.

- (d) Étudier de la même manière la nature de la série suivante :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$$

(Indication : à partir d'un certain rang, on a : $\ln n \leq n^{1/4}$. Pourquoi ?)

Solution

Puisque $\ln n/n^{1/4}$ tend vers 0 à l'infini, il existe un entier N tel que :

$$\forall n \geq N \quad \frac{\ln n}{n^{1/4}} \leq 1.$$

On a donc :

$$\forall n \geq N \quad \frac{1}{\sqrt{n} \ln n} \geq \frac{1}{\sqrt{n} n^{1/4}} = \frac{1}{n^{3/4}}.$$

Par comparaison par minoration avec la série de Riemann $\sum 1/n^{3/4}$ qui diverge puisque $3/4 < 1$, la série étudiée est divergente. Nous avons bien le droit de raisonner ainsi car la série est à termes positifs.

9. Dans les exemples suivants, quelles sont les séries pour lesquelles il est utile d'appliquer les propriétés de croissance comparées pour étudier leur convergence ? Pour quelles séries est-ce inutile ?

$$(A) \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln n}{n} \quad (B) \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^4 \ln n} \quad (C) \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln n}{2^n} \quad (D) \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{ne^n} \quad (E) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(\ln n)^2}{e^n}$$

Étudier la convergence de ces séries.

Solutions.

(A) On sait que la série harmonique $\sum 1/n$ est divergente et que $\ln n \geq 1$ pour tout $n \geq 3$ et donc :

$$\forall n \geq 3 \quad \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}.$$

Par comparaison par minoration avec la série harmonique $\sum 1/n$ qui diverge, la série étudiée est divergente. Nous avons bien le droit de raisonner ainsi car la série est à termes positifs.

Les croissances comparées ne sont donc pas utiles ici ;

(B) Comme pour (A), on utilise que, pour tout $n \geq 3$, $\ln n \geq 1$ et donc :

$$\frac{1}{n^4 \ln n} \leq \frac{1}{n^4}.$$

Par comparaison par majoration avec la série de Riemann $\sum 1/n^4$ qui converge puisque $4 > 1$, la série étudiée est convergente. Nous avons bien le droit de raisonner ainsi car la série est à termes positifs.

(C) Ici, on doit utiliser les croissances comparées. Le quotient $\ln n/2^n$ ne figure pas dans les croissances comparées, mais on peut écrire :

$$\frac{\ln n}{2^n} = \frac{\ln n}{n} \cdot \frac{n}{2^n}.$$

D'une part, on utilise le fait que $\ln n/n$ tend vers 0 à l'infini pour pouvoir affirmer que, pour n assez grand :

$$\frac{\ln n}{n} \leq 1$$

et donc :

$$\frac{\ln n}{2^n} \leq \frac{n}{2^n}.$$

On se ramène ainsi à étudier la convergence de la série $\sum n/2^n$. Nous pouvons à nouveau utiliser les croissances comparées pour écrire que, pour n assez grand :

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^3}$$

(argument semblable aux précédents : $n^3/2^n$ tend vers 0, donc pour n assez grand, $n^3/2^n \leq 1$) et donc :

$$\frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Par comparaison par majoration avec la série de Riemann $\sum 1/n^2$ qui converge puisque $2 > 1$, la série $\sum n/2^n$ est convergente. Puis, par comparaison par majoration, la série $\sum \frac{\ln n}{2^n}$ est convergente. Nous avons bien le droit de raisonner ainsi car les séries considérées sont à termes positifs.

(D) Il suffit ici d'écrire que $1/n \leq 1$ pour tout entier non nul, et donc :

$$\frac{1}{ne^n} \leq \frac{1}{e^n}.$$

La série géométrique $\sum e^{-n}$ est convergente car $e^{-1} < 1$. Donc, par comparaison par majoration, la série considérée (qui est bien à termes positifs) est convergente. Les croissances comparées sont donc inutiles ici.

(E) Utilisons à nouveau la majoration $\ln n \leq n$. Elle conduit à :

$$\frac{(\ln n)^2}{e^n} \leq \frac{n^2}{e^n}.$$

Puis nous pouvons utiliser le fait que, pour n assez grand :

$$\frac{1}{e^n} \leq \frac{1}{n^4}$$

(par le même argument que d'habitude : n^4/e^n tend vers 0 donc $n^4 \leq e^n$ pour n assez grand). Et donc, pour n assez grand :

$$\frac{n^2}{e^n} \leq \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}.$$

Par comparaison par majoration avec la série de Riemann $\sum 1/n^2$ qui converge puisque $2 > 1$, la série $\sum n^2/e^n$ (qui est à termes positifs) est convergente. Puis, à nouveau par comparaison par majoration, la série $\sum (\ln n)^2/e^n$ est convergente.

10. En utilisant des croissances comparées, étudier la nature des séries suivantes :

$$\begin{array}{ll} (a) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^{\sqrt{n}}}{e^n}; & (b) \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}; \\ (c) \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^2}; & (d) \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2}{(\ln n)^{\ln n}}. \\ \text{(comparer avec } 1/n) & \text{(comparer avec } 1/n^2). \end{array}$$

Solution.

(a) *Pas facile.* Il faut utiliser la relation : $x^y = e^{y \ln x}$. Ainsi :

$$\frac{n^{\sqrt{n}}}{e^n} = \frac{e^{\sqrt{n} \ln n}}{e^n} = e^{\sqrt{n} \ln(n) - n}.$$

On utilise les croissances comparées pour voir quel est le terme dominant dans l'exposant :

$$\sqrt{n} \ln n - n = n \left(-1 + \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \right).$$

Comme $\ln n/\sqrt{n}$ tend vers 0 à l'infini, on a :

$$\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}$$

pour n assez grand et donc :

$$\sqrt{n} \ln n - n \leq n \left(-1 + \frac{1}{2} \right) = -\frac{n}{2}.$$

Ainsi, pour n assez grand :

$$\frac{n\sqrt{n}}{e^n} \leq e^{-n/2}.$$

La série géométrique de raison $e^{-1/2}$ est convergente car $e^{-1/2} < 1$ et donc, par comparaison par majoration, la série à termes positifs $\sum \frac{n\sqrt{n}}{e^n}$ est convergente.

(b) Dans les deux exemples qui suivent, on aura à majorer $\ln n$ par une puissance de n , par exemple n^α , mais on ne sait pas toujours deviner la valeur de α qui nous sera utile. C'est pourquoi on peut raisonner comme cela :

On sait que $\ln n/n^\alpha$ tend vers 0 si $\alpha > 0$, donc, pour n assez grand :

$$\frac{\ln n}{n^\alpha} \leq 1, \quad \text{c'est-à-dire } \ln n \leq n^\alpha.$$

Donc :

$$\frac{\ln n}{n\sqrt{n}} \leq \frac{n^\alpha}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{3/2-\alpha}}.$$

Puisque ceci est vrai pour toute valeur de $\alpha > 0$, c'est vrai en particulier pour $\alpha = 1/4$. On a donc :

$$\frac{\ln n}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^{3/2-1/4}} = \frac{1}{n^{5/4}}.$$

Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{5/4}}$ est convergente car $5/4 > 1$. Donc, par comparaison par majoration, la série à termes positifs étudiée est convergente.

On remarque que l'on a choisi $\alpha = 1/4$ pour avoir $3/2 - \alpha > 1$.

(c) les croissances comparées permettent d'obtenir une majoration du logarithme, pas une minoration. Essayons donc de voir où cela conduit. Comme pour (b), nous écrivons, pour n assez grand :

$$\ln n \leq n^\alpha$$

avec une valeur de $\alpha > 0$ que nous choisirons ensuite. On en déduit :

$$\frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^2} \geq \frac{1}{\sqrt{n}(n^\alpha)^2} = \frac{1}{n^{1/2+2\alpha}}.$$

Si nous choisissons $\alpha = 1/4$, nous obtenons :

$$\frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^2} \geq \frac{1}{n}.$$

Or la série harmonique $\sum 1/n$ est divergente. Donc, par comparaison par minoration, la série à termes positifs $\sum \frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^2}$ est divergente.

(d) *Pas facile.* On ne va pas utiliser ici les croissances comparées. Il faut utiliser deux fois la relation : $x^y = e^{y \ln x}$, de la manière suivante :

$$(\ln n)^{\ln n} = e^{\ln n \ln(\ln n)} = n^{\ln(\ln n)}.$$

Or nous savons que $\ln n$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, et donc $\ln(\ln n)$ tend aussi vers l'infini à l'infini. Donc, pour n assez grand, on aura :

$$\ln(\ln n) \geq 2 \quad \text{et donc } n^{\ln(\ln n)} \geq n^2$$

et donc :

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente car $2 > 1$. Donc, par comparaison par majoration, la série à termes positifs étudiée est convergente.

11. Imaginer deux exemples de séries dont la convergence s'étudie avec les propriétés des croissances comparées; puis deux exemples de séries dont le terme général contient $\ln n$ ou 2^n et n^2 et pour lesquelles il n'est pas utile d'utiliser les propriétés des croissances comparées.
12. *Utilisation de la comparaison par équivalents.* On rappelle que si une suite (ϵ_n) tend vers 0, alors on a :

$$-\frac{1}{2} \leq \epsilon_n \leq \frac{1}{2}$$

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs. On suppose que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n.$$

- (a) Vérifier que, pour tout n assez grand, on a :

$$\frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n.$$

Solution. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors on peut écrire :

$$u_n = v_n(1 + \epsilon_n)$$

avec $\epsilon_n \rightarrow 0$. Or, pour tout n assez grand : $-1/2 \leq \epsilon_n \leq 1/2$ et donc :

$$1 - \frac{1}{2} \leq 1 + \epsilon_n \leq 1 + \frac{1}{2},$$

soit, en multipliant par v_n qui est positif :

$$\frac{1}{2}v_n \leq u_n = v_n(1 + \epsilon_n) \leq \frac{3}{2}v_n.$$

- (b) Démontrer que si la série $\sum v_n$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ l'est aussi.

Solution. Nous venons de voir que, pour tout n assez grand, $u_n \leq (3/2)v_n$. Si la série $\sum v_n$, alors la série $\sum (3/2)v_n$ l'est aussi (pourquoi?) et donc, par comparaison par majoration, la série à termes positifs $\sum u_n$ l'est aussi.

- (c) Démontrer que les deux séries sont de même nature.

Nous venons de voir que la convergence de la série $\sum v_n$ entraîne celle de la série $\sum u_n$. Vérifions maintenant la réciproque, c'est-à-dire que la convergence de la série $\sum u_n$ entraîne celle de la série $\sum v_n$.

Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors, puisque $(1/2)v_n \leq u_n$ pour tout n assez grand, la série $\sum (1/2)v_n$ est convergente par comparaison par majoration de séries à termes positifs. Et donc la série $\sum v_n$ est convergente (pourquoi?).

- (d) Dans les questions précédentes, où a-t-on utilisé le fait que les deux suites (u_n) et (v_n) sont à termes positifs?

Solution. À deux endroits : d'une part, pour obtenir la majoration de la première question, nous avons multiplié les termes d'une inégalité par v_n . Ceci était possible car v_n est positif ou nul. D'autre part, nous avons utilisé le critère de comparaison par majoration, valable uniquement pour les séries à termes positifs.

- (e) Il s'agit du théorème 9 dit de comparaison à équivalents.

13. En utilisant des comparaisons par équivalents, étudier la nature des séries suivantes.

$$(a) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2 + n + 1}{3n^4 - 2n + 3};$$

$$(b) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n - 1}{3n^2 + 2};$$

$$(c) \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2 - \sin n};$$

$$(d) \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2}{\sqrt{n-1} + \ln(n+1)}.$$

Solution.

(a) Pour calculer un équivalent simple, on factorise le numérateur par le terme dominant quand n tend vers l'infini (c'est-à-dire n^2) et l'on fait de même pour le dénominateur (terme dominant : $3n^4$). On écrit donc :

$$\frac{n^2 + n + 1}{3n^4 - 2n + 3} = \frac{n^2(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})}{3n^4(1 - \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4})}.$$

Or :

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, \quad \frac{2}{n^3} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^4} \rightarrow 0.$$

Donc :

$$\frac{n^2 + n + 1}{3n^4 - 2n + 3} \sim \frac{n^2}{3n^4} = \frac{1}{3n^2}.$$

Or la série de Riemann $\sum 1/n^2$ est convergente car $2 > 1$, donc la série $\sum 1/3n^2$ l'est aussi et, par comparaison par équivalents, la série de l'énoncé, qui est à termes positifs, est convergente.

(b) Méthode identique au (a) :

$$\frac{n-1}{3n^2+2} = \frac{n(1-\frac{1}{n})}{3n^2(1+\frac{2}{3n^2})} \sim \frac{n}{3n^2} = \frac{1}{3n}.$$

La série harmonique $\sum 1/n$ est divergente, donc la série $\sum 1/3n$ l'est aussi. Par comparaison par équivalents, la série de l'énoncé, qui est à termes positifs, est divergente.

(c) La méthode est encore la même, il faut juste ici penser à tout bien justifier :

$$\frac{1}{n^2 - \sin n} = \frac{1}{n^2(1 - \frac{\sin n}{n^2})} \sim \frac{1}{n^2}.$$

On a utilisé le fait que $\sin n/n^2$ tend vers 0 à l'infini, il faut donc le vérifier. On écrit :

$$-1 \leq \sin n \leq 1,$$

puis on divise par n^2 , ce qui ne change pas le sens des inégalités puisque $n^2 > 0$:

$$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\sin n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Or $-1/n^2$ et $1/n^2$ tendent vers 0 à l'infini. Par le théorème d'encadrement (ou des gendarmes), $\sin n/n^2$ tend aussi vers 0.

Nous avons donc démontré que $\frac{1}{n^2 - \sin n}$ est équivalent à $1/n^2$. Or la série de Riemann $\sum 1/n^2$ est convergente car $2 > 1$, donc, par comparaison par équivalents, la série de l'énoncé, qui est à termes positifs, est convergente.

(d) Le logarithme est négligeable devant la racine carrée, on factorise donc le dénominateur par $\sqrt{n}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{n-1} + \ln(n+1) &= \sqrt{n} \left(\sqrt{\frac{n-1}{n}} + \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \sqrt{n} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}} \right). \end{aligned}$$

Croissances comparées : $\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 à l'infini. Donc :

$$\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}} \right) \rightarrow \sqrt{1} + 0 = 1.$$

Donc, finalement : $\sqrt{n-1} + \ln(n+1) \sim \sqrt{n}$ et :

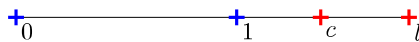
$$\frac{2}{\sqrt{n-1} + \ln(n+1)} \sim \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Or la série de Riemann $\sum 1/n^{1/2}$ est divergente car $1/2 < 1$. Il en est donc de même pour la série $\sum 2/\sqrt{n}$ donc, par comparaison par équivalents, la série de l'énoncé, qui est à termes positifs, est divergente.

14. *Critère de d'Alembert.* On considère une suite à termes strictement positifs (u_n) et l'on suppose que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

(a) Dans cette première question, on suppose que $l > 1$.



On choisit un réel c tel que $1 < c < l$. Puisque u_{n+1}/u_n tend vers l , alors pour tout n assez grand, on a : $u_{n+1}/u_n \geq c$. En déduire que la suite (u_n) tend vers l'infini. Que peut-on en déduire sur la nature de la série $\sum u_n$?

Solution. À partir d'un certain rang N , on a :

$$\forall n \geq N \quad u_{n+1} \geq cu_n.$$

Donc

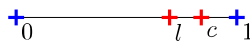
$$u_{N+2} \geq Cu_{N+1} \geq C \cdot Cu_N = C^2 u_N$$

et ainsi de suite :

$$u_{N+k} \geq C^k u_N.$$

Comme $C > 1$, on a $C^k \rightarrow +\infty$ quand k tend vers $+\infty$ et donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_{N+k} = +\infty$, ce qui revient à dire que la suite (u_n) tend vers l'infini. Donc la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

(b) Dans cette deuxième question, on suppose que $l < 1$.



On choisit alors un réel c tel que $l < c < 1$. Puisque la suite u_{n+1}/u_n tend vers l , alors à partir d'un certain rang N , on a : $u_{n+1}/u_n \leq c$.

i. Vérifier que, pour tout $n \geq N$, on a : $u_n \leq c^{n-N} u_N$.

Solution. Démontrons ceci par récurrence.

— **Initialisation :** la propriété est vraie pour $n = N$ puisque $u_N = c^0 u_N$.

— **Hérédité :** Soit n un entier supérieur ou égal à N . Supposons que $u_n \leq c^{n-N} u_N$ et démontrons que :

$$u_{n+1} \leq c^{n+1-N} u_N.$$

Nous savons que $u_{n+1}/u_n \leq c$, donc :

$$u_{n+1} \leq cu_n.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, nous pouvons écrire :

$$u_{n+1} \leq cu_n \leq c \cdot c^{n-N} u_N = c^{n+1-N} u_N,$$

ce que nous voulions démontrer.

ii. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} c^n c^{-N} u_N$?

Solution. L'entier N est fixé, donc la quantité $c^{-N} u_N$ est une constante et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} c^n c^{-N} u_N$

est une série géométrique de raison c . Comme $c \in [0, 1[$, cette série géométrique est convergente.

iii. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$?

À partir du rang N , u_n est majoré par le terme général d'une série géométrique convergente, donc, par comparaison par majoration, la série $\sum u_n$, qui est à termes positifs, est convergente.

(c) On suppose que $u_n = 1/n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la valeur de l ? La série est-elle convergente?

Solution.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 1,$$

donc $l = 1$. Nous savons que la série $\sum 1/n$ est divergente.

(d) On suppose que $u_n = 1/n^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la valeur de l ? La série est-elle convergente?

Solution.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^2} \rightarrow 1,$$

donc $l = 1$. Nous savons que la série $\sum 1/n^2$ est une série de Riemann convergente puisque $2 > 1$.

(e) Il s'agit du théorème 10 dit critère de d'Alembert et des remarques importantes qui le suivent.

15. Utiliser le critère de d'Alembert pour étudier la nature des séries suivantes :

$$(a) \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \quad (b) \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2^n n!}{n^n};$$

$$(c) \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n \quad \text{avec } x > 0;$$

(a) On se rappelle que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Posons : $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. On a :

$$u_{n+1} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} = \frac{((n!)(n+1))^2}{(2n+2)!} = \frac{(n!)^2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1) \cdot (2n)!}$$

et donc :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \rightarrow \frac{1}{4}.$$

La série est convergente car $1/4 < 1$.

(b) *Pas facile.* Posons : $u_n = \frac{2^n n!}{n^n}$. On a :

$$u_{n+1} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{2^{n+1}(n+1)n!}{(n+1)^n(n+1)},$$

donc :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \dots = 2 \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{(1 + \frac{1}{n})^n}.$$

Reste à calculer la limite de $(1 + \frac{1}{n})^n$ en l'infini. Attention : 1^∞ est une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination, il faut utiliser la relation $x^y = e^{y \ln x}$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})}.$$

Il faut maintenant se rappeler que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1^1$$

et donc, en remplaçant x par $1/n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^1 = e.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{e} < 1.$$

Donc la série converge.

(c) Posons : $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$. On a (calculs semblables au (a)) :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \rightarrow \frac{x}{4}.$$

La série est convergente si $x > 4$ et divergente si $x < 4$. Si $x = 4$, le critère de D'Alembert ne permet pas de conclure et on reste bloqué pour l'instant.

1. Pour ceux qui l'auraient oublié, voici d'où sort ce résultat : la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable en 0 et sa dérivée vaut $f'(0) = 1/(1+0) = 1$. Or la dérivée d'une fonction est la limite de son rapport d'accroissement :

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Et donc, ici :

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Séries à termes quelconques

Dans le chapitre précédent, nous avons vu plusieurs outils permettant d'étudier la nature d'une série à termes positifs en se ramenant à des séries de référence déjà connues. Tous ces outils étaient basés sur le fait que la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est croissante, et qu'une suite croissante est convergente dès qu'elle est majorée.

Pour étudier une série à termes de signes quelconque, on ne peut plus utiliser ces outils. Une première méthode consiste à essayer de se ramener à l'étude d'une série à termes positifs, c'est le sujet des deux premiers exercices.

Objectifs disciplinaires :

- Comprendre quelle est l'utilité du théorème de convergence absolue.
- Comprendre graphiquement pourquoi une série peut converger sans converger absolument (série alternée).
- Savoir étudier la convergence de certaines séries de signes non constant en utilisant le théorème sur la convergence absolue et celui des séries alternées.

1. Convergence absolue

- (a) Si x est un nombre réel, on note x^+ sa partie positive et x^- sa partie négative, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \text{si } x \geq 0 \quad \text{on pose : } & \begin{cases} x^+ = x \\ x^- = 0 \end{cases} \\ \text{si } x < 0 \quad \text{on pose : } & \begin{cases} x^+ = 0 \\ x^- = -x \end{cases} \end{aligned}$$

- i. Déterminer x^+ et x^- quand $x = 4$ et $x = -3$.

Solution : Quand $x = 4$, $x^+ = 4$ et $x^- = 0$. Quand $x = -3$, $x^+ = 0$ et $x^- = 3$.

- ii. Démontrer que, pour tout réel x , on a :

$$x = x^+ - x^- \quad \text{et} \quad |x| = x^+ + x^-$$

et que :

$$0 \leq x^- \leq |x| \quad \text{et} \quad 0 \leq x^+ \leq |x|.$$

Solution : Si $x \geq 0$, $x^+ = x$ et $x^- = 0$ donc $x = x^+ - x^-$. Par ailleurs $|x| = x = x^+ + x^-$. Si $x < 0$, $x^+ = 0$ et $x^- = -x$ donc $x = x^+ - x^-$. Par ailleurs $|x| = -x = x^+ + x^-$.

Les deux encadrements viennent du fait que x^+ et x^- sont par définition positifs et que du coup $|x| = x^+ + x^- \geq x^+$ et de même $|x| \geq x^-$.

- (b) Soit (u_n) une suite de nombres réels. On suppose que la série $\sum |u_n|$ est convergente.

- i. Démontrer que les deux séries $\sum (u_n)^+$ et $\sum (u_n)^-$ sont convergentes.

Solution : Si $\sum |u_n|$ converge alors par théorème de comparaison $\sum (u_n)^+$ et $\sum (u_n)^-$ sont convergentes (d'après les encadrements obtenus à la question précédente).

- ii. En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente.

Solution : $\sum u_n$ converge alors comme somme de deux séries convergentes puisque pour tout n entier naturel, $u_n = u_n^+ - u_n^-$.

Définition 6:

On dit qu'une série $\sum u_n$ converge absolument si la série $\sum |u_n|$ converge.

- (c) Il s'agit du théorème 11 dit de convergence absolue et de la remarque 2.
2. Étudier la convergence absolue des séries suivantes. En déduire la nature de ces séries lorsque c'est possible. Dans les questions (d) et (e), x est un réel quelconque, la convergence de la série dépend peut-être de la valeur de x .

$$\begin{array}{ll}
 (a) & \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n^3 + 2)}{n^4 + n}; & (b) & \sum_{n \geq 1} \frac{n^2 \sin n - 1}{2^n - 2 \ln n}; \\
 (c) & \sum_{n \geq 1} \frac{\cos n}{n^4 + \sin n}; & (d) & \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!}; \\
 (e) & \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n+1}{2n} \right) x^n; & (f) & \sum_{n \geq 0} \frac{\sin(nx)}{n^2 + 1}. \\
 (g) & \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n^2 - 5n + 3}; & (h) & \sum_{n \geq 0} \frac{\cos(e^{nx})}{n^2 + \ln n}.
 \end{array}$$

Voici des éléments de corrigé et pas des rédactions propres (à vous de rédiger tout ça proprement en vous basant sur les corrections précédentes :

- (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, n^4 + n \geq n^4$ et $|\cos(n^3 + 2)| \leq 1$. Donc $0 \leq \left| \frac{\cos(n^3 + 2)}{n^4 + n} \right| \leq \frac{1}{n^4 + n} \leq \frac{1}{n^4}$. Or $\sum \frac{1}{n^4}$ converge (série de Riemann avec $4 > 1$ donc par comparaison à majoration la série étudiée converge absolument donc converge.

- (b) Posons pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = \frac{n^2 \sin n - 1}{2^n - 2 \ln n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = \frac{|n^2 \sin n - 1|}{|2^n - 2 \ln n|} \leq \frac{|n^2 \sin n| + 1}{|2^n - 2 \ln n|} \leq \frac{n^2 + 1}{|2^n - 2 \ln n|}$ par inégalité triangulaire puis majoration du sinus.

Pour n grand $2^n - 2 \ln n \geq 0$ (par croissances comparées) donc $|2^n - 2 \ln n| = 2^n - 2 \ln n$

Donc pour n grand, $|u_n| \leq \frac{n^2 + 1}{2^n - 2 \ln n}$.

Reste à montrer que le terme qui majore converge. Un équivalent de ce terme est $\frac{n^2}{2^n}$ (à vous de rédiger). Or $\frac{n^2}{2^n}$ est le terme général d'une série convergente par le critère de d'Alembert (à vous de rédiger). Donc par comparaison à équivalents (à vous de rédiger), $\sum \frac{n^2 + 1}{2^n - 2 \ln n}$ converge donc par comparaison à majoration $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

- (c) On majore en valeur absolue par $\frac{1}{n^4 - 1}$. On applique le théorème de comparaison à équivalents pour montrer la convergence de $\sum \frac{1}{n^4 - 1}$. On en déduit alors la convergence absolue et donc la convergence de la série étudiée.

- (d) Attention ici x peut être négatif : on applique donc le critère de d'Alembert à $|u_n| = \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{|x|^n}{n!}$ qui est strictement positif pour $x \neq 0$. $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|x|}{n+1}$ qui tend vers $0 < 1$. Donc la série converge absolument donc converge pour tout $x \neq 0$. Par ailleurs pour $x = 0$, c'est la série nulle donc elle converge aussi. Donc la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout x réel.

- (e) Pour $x = 0$, c'est la série nulle qui converge. Sinon, on l'étudie en valeur absolue puisque x peut être négatif. On applique le critère de d'Alembert et on obtient la convergence absolue pour $|x| < 1$. Pour $|x| \geq 1$, le terme général ne tend pas vers 0 donc la série diverge.

- (f) On majore en valeur absolue par $\frac{1}{n^2}$ qui est le terme d'une série convergente.
- (g) En valeur absolue pour n grand, $|u_n| = \frac{1}{n^2 - 5n + 3}$, ce terme positif est équivalent à $\frac{1}{n^2}$ terme d'une série convergente.
- (h) On majore en valeur absolue par $\frac{1}{n^2}$ qui est le terme d'une série convergente.

3. **Un premier exemple de série convergente qui ne converge pas absolument** Considérons la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

- (a) Représenter graphiquement les termes successifs de la suite des sommes partielles (S_N) définie pour tout N entier non nul par $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n}$. Que pouvez-vous conjecturer sur le comportement de la suite (monotonie, convergence, divergence) ?

Solution : La suite semble converger, elle n'est pas monotone.

- (b) Dessinez sur le même graphe, la suite (S_{2N}) . Que pouvez-vous conjecturer sur le comportement de la suite (monotonie, convergence, divergence) ?

Solution : La suite semble décroître et converger vers la même limite que (S_N) .

- (c) Même question pour (S_{2N+1}) . Quels liens pouvez-vous faire entre ces deux suites ?

Solution : La suite semble croître et converger vers la même limite que (S_N) .

- (d) Démontrer que les suites (S_{2N}) et (S_{2N+1}) sont adjacentes.

Solution : Soit N entier naturel, $S_{2N} - S_{2N+1} = \frac{(-1)^{2N+1}}{2N+1} = -\frac{1}{2N+1}$ ce qui tend vers 0.

$$S_{2(N+1)} - S_{2N} = S_{2N+2} - S_{2N} = \frac{1}{2N+2} - \frac{1}{2N+1} \leq 0 \text{ donc } (S_{2N}) \text{ est décroissante.}$$

$$S_{2(N+1)+1} - S_{2N+1} = S_{2N+3} - S_{2N+1} = -\frac{1}{2N+3} + \frac{1}{2N+2} \geq 0 \text{ donc } (S_{2N}) \text{ est croissante.}$$

Donc ces deux suites sont bien adjacentes.

- (e) On admet que si pour une suite (u_n) , les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite alors (u_n) converge vers cette même limite. Démontrez que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

Solution : (S_{2N}) et (S_{2N+1}) sont adjacentes donc convergent vers une même limite. Donc le résultat admis permet de conclure que (S_N) converge c'est-à-dire que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

4. **Généralisation : les séries alternées** On considère maintenant une suite de la forme $\sum (-1)^n u_n$.

- (a) Quelles propriétés la suite (u_n) doit-elle avoir pour que la démonstration faite dans l'exemple ci-dessus reste vraie et que la série $\sum (-1)^n u_n$ converge ?

Solution : La clé réside dans le fait de garantir que les suites (S_{2N}) et (S_{2N+1}) soient adjacentes. Reprenons la démo,

Soit N entier naturel, $S_{2N} - S_{2N+1} = -u_{2N+1}$. Ceci doit tendre vers 0 pour que les suites soient adjacentes.

$$S_{2(N+1)} - S_{2N} = S_{2N+2} - S_{2N} = u_{2N+2} - u_{2N+1} \leq 0 \text{ donc } (S_{2N}) \text{ est décroissante dès lors que } (u_n) \text{ l'est.}$$

$$S_{2(N+1)+1} - S_{2N+1} = S_{2N+3} - S_{2N+1} = -u_{2N+3} + u_{2N+2} \geq 0 \text{ donc } (S_{2N}) \text{ est croissante dès lors que } (u_n) \text{ est décroissante.}$$

Donc il est nécessaire que (u_n) soit une suite décroissante qui tende vers 0 pour que cette série converge.

- (b) Ecrire le résultat obtenu dans votre résumé de cours.

- (c) Est-ce que toute série de la forme $\sum (-1)^n u_n$ converge ?

- (d) Il s'agit du théorème 12 dit critère des séries alternées et de la remarque 2 donnant un exemple de série convergente mais qui ne converge pas absolument.

5. Nature de séries à termes quelconques :

- (a) Au regard de tous vos résumés de cours sur les séries, proposez un schéma ordonné résumant la démarche de l'étude de la nature d'une série.
- (b) Etudier la nature des séries suivantes en deux étapes :

D'abord deviner sans rien rédiger si ces séries vont converger absolument, converger ou diverger et quel outil vous allez utiliser : théorème de comparaison à majoration, à équivalents, d'Alembert, critère des séries alternées ? Ensuite rédigez proprement la résolution.

i. $\sum 1.$	vi. $\sum \frac{n^2}{\ln(n)}.$	xi. $\sum \frac{-1 - \sin n}{n^2}.$	$0 \leq a < 1.$
ii. $\sum \frac{2^n}{n!}.$	vii. $\sum \frac{1}{3^n \ln(n)}.$	xii. $\sum \frac{1}{n \cos(n)^2}.$	xvi. $\sum \frac{n^5 + (-1)^n \cos(n)}{n^7 - 12n^3 + 5}.$
iii. $\sum \frac{(-1)^n}{n2^n}.$	viii. $\sum \frac{n^2}{n^4 + 10n}.$	xiii. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$	xvii. $\sum \frac{1}{n^3 \ln(n)}.$
iv. $\sum (-1)^n \frac{\sin(n)}{n^4}.$	ix. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$	xiv. $\sum \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n}.$	xviii. $\sum \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)}.$
v. $\sum \frac{n^2 - (-1)^n n}{2^n + n^3}.$	x. $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}.$	xv. $\sum \frac{a^n}{3 - \cos(n)},$	xix. $\sum \frac{\ln(n)}{n^{1/4}}.$

Solution Vous avez de nombreuses rédactions dans le poly et ci-dessus, je vous donne ici la nature et la méthode utilisée, à vous de reconstituer la rédaction en prenant exemple sur les corrigés donnés.

- | | |
|---|--|
| i. DV : terme général ne tend pas vers 0. | x. CV : série télescopique de limite -1 . |
| ii. CV : d'Alembert, limite de $u_{n+1}/u_n : 0$. | xi. CVA : majoration en valeur absolue par $2/n^2$. |
| iii. CVA : d'Alembert en valeur absolue, limite de $u_{n+1}/u_n : 1/2$. | xii. DV : minoration par $1/n$. |
| iv. CVA : majoration en valeur absolue par $1/n^4$. | xiii. DV : somme de CV(CSA) et DV (référence). |
| v. CV : équivalent à $n^2/2^n$ puis d'Alembert, limite de $u_{n+1}/u_n : 1/2$. | xiv. CV : majoration par $1/2^n$. |
| vi. DV : terme général ne tend pas vers 0. | xv. CV : majoration par $a^n/2$. |
| vii. CV : d'Alembert, limite de $u_{n+1}/u_n : 1/3$. | xvi. CV : équivalent à $1/n^2$. |
| viii. CV : équivalent ou majoration, $1/n^2$. | xvii. CV : majoration par $1/n^3$. |
| ix. CV : critère des séries alternées. | xviii. DV : minoration par $1/n$. |
| | xix. DV : minoration par $1/n^{1/4}$. |

6. D'autres exercices : Dans les exercices suivants, ne perdez pas de vue les compétences essentielles : savoir tester sur des exemples, savoir conjecturer un résultat et enfin le démontrer.

(a) Soit x un réel, la série $\sum nx^n$ est-elle convergente ?

(b) Même question pour $\sum \sin(n)x^n$.

7. (a) $\sum_{k=0}^n \sin(k) = \sum_{k=0}^n \Im(e^{ik}) = \Im\left(\sum_{k=0}^n e^{ik}\right).$

Or $\sum_{k=0}^n e^{ik} = \sum_{k=0}^n (e^i)^k = \frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^i} = \frac{e^{i(n+1)/2} e^{-i(n+1)/2} - e^{i(n+1)/2}}{e^{i/2} e^{-i/2} - e^{i/2}} = e^{in/2} \frac{\sin((n+1)/2)}{\sin(1/2)}.$

Donc $\sum_{k=0}^n \sin(k) = \sin(n/2) \frac{\sin((n+1)/2)}{\sin(1/2)}$. Cette suite est bien bornée en n puisque $\sin$ est comprise entre -1 et 1 .

(b)

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \quad \sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^n A_{k-1} b_k$$

On effectue un changement d'indice sur la seconde somme : $l = k - 1$.

$$\sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{l=0}^{n-1} A_l b_{l+1}$$

Comme la variable l est muette, on la renomme k et on isole les termes non communs aux deux sommes :

$$\sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{l=0}^{n-1} A_l b_{l+1} = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} = A_n b_n - A_0 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1}$$

En réunissant les deux sommes, on obtient le résultat attendu.

(c) Comme (A_n) est bornée et que $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors $A_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Par ailleurs,

$$\exists C > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |A_k(b_k - b_{k+1})| \leq M|b_k - b_{k+1}|$$

Or comme (b_k) est décroissante alors $|b_k - b_{k+1}| = b_k - b_{k+1}$.

Donc

$$\exists C > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |A_k(b_k - b_{k+1})| \leq M(b_k - b_{k+1})$$

Or $\sum M(b_k - b_{k+1})$ converge car c'est une série télescopique avec (b_k) qui converge. Donc par comparaison, $\sum a_k b_k$ converge.

(d) La série $\sum \frac{\sin(k)}{k^\alpha}$ est de la forme $\sum a_k b_k$ avec $a_k = \sin(k)$ et $b_k = \frac{1}{k^\alpha}$. Alors (A_n) est bien bornée d'après la première question, (b_n) est bien positive, décroissante (si $\alpha > 0$) et de limite nulle (si $\alpha > 0$).

Donc d'après la question 2, $\forall \alpha > 0$, $\sum \frac{\sin(k)}{k^\alpha}$ converge.

(e) • La convergence de la série $\frac{\sin(k)}{k^\alpha}$ n'est vraiment utile que pour $\alpha \leq 1$. Pour $\alpha > 1$, on peut conclure par comparaison en valeur absolue. Pour $\alpha \leq 1$, le critère de convergence absolue ne marche plus tout simplement car la série ne converge pas absolument (c'est un exo à part entière). Cet exercice permet alors de démontrer que la série converge (bien qu'elle ne converge pas absolument). C'est une série du même type que les séries alternées : les séries semi convergentes (qui convergent sans converger absolument).

• Le calcul de la question 2 s'appelle la transformation d'Abel, c'est l'équivalent pour les séries de la formule d'intégration par parties.

Intégrales généralisées : définitions, calculs

1. **Rappels : primitives usuelles à connaître.** Déterminer les primitives des fonctions f définies par les relations suivantes :

- | | |
|-----------------------------------|---|
| (a) $f(t) = \frac{1}{t}$; | (i) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$; |
| (b) $f(x) = \cos x$; | (j) $f(x) = x^y$, $y \in \mathbb{R}$; |
| (c) $f(y) = \sin y$; | (k) $f(y) = x^y$, $x > 0$; |
| (d) $f(s) = \cos^3 s \sin s$; | (l) $f(x) = \frac{1}{x+4}$; |
| (e) $f(x) = \cos^2 x$; | (m) $f(t) = \frac{1}{(t+4)(t-3)}$; |
| (f) $f(x) = \ln x$; | (n) $f(y) = \frac{1}{1+y^2}$. |
| (g) $f(y) = e^y$; | |
| (h) $f(a) = \frac{1}{\sqrt{a}}$; | |

Réponses.

- | | |
|--|---|
| (a) $F(t) = \ln t + C$, $C \in \mathbb{R}$; | (i) Si $n \neq -1$: $F(x) = x^{n+1}/(n+1) + C$, $C \in \mathbb{R}$;
Si $n = -1$: $F(x) = \ln x + C$, $C \in \mathbb{R}$; |
| (b) $F(x) = \sin x + C$, $C \in \mathbb{R}$; | (j) Remplacer n par y dans ce qui précède. |
| (c) $F(y) = -\cos y + C$, $C \in \mathbb{R}$; | (k) Noter que $x^y = e^{y \ln x}$. |
| (d) $F(s) = -\frac{\cos^4 s}{4} + C$, $C \in \mathbb{R}$; | Si $x \neq 1$: $F(y) = \frac{x^y}{\ln x} + C$, $C \in \mathbb{R}$;
Si $x = 1$: $F(y) = y + C$, $C \in \mathbb{R}$; |
| (e) $F(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$, $C \in \mathbb{R}$;
Utiliser que $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ et donc :
$\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$. | (l) $F(x) = \ln(x+4) + C$, $C \in \mathbb{R}$; |
| (f) $F(x) = x \ln x - x + C$, $C \in \mathbb{R}$; | (m) $\frac{1}{(t+4)(t-3)} = \frac{1}{7(t-3)} - \frac{1}{7(t+4)}$. |
| (g) $F(y) = e^y + C$, $C \in \mathbb{R}$; | $F(t) = \frac{1}{7} \ln \left \frac{t-3}{t+4} \right + C$, $C \in \mathbb{R}$; |
| (h) $F(a) = 2\sqrt{a} + C$, $C \in \mathbb{R}$; | (n) $F(y) = \arctan y + C$, $C \in \mathbb{R}$. |

2. **Rappel : calcul d'intégrales.** Calculer les intégrales suivantes.

- | | |
|--|--|
| (a) $I = \int_0^3 (x^2 + 2) dx$; | (g) $I = \int_0^\pi e^x \cos x dx$; |
| (b) $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin t dt$; | (h) $I(t) = \int_0^\pi 2x e^{xt} dx$; |
| (c) $I = \int_0^{3/2} \cos(\pi t) dt$; | (i) $I = \int_e^{e^2} \frac{dt}{t(\ln t)^2}$; |
| (d) $I = \int_{-\pi}^\pi x \cos x dx$; | (j) $I = \int_1^2 \frac{dy}{y(1+2y)}$; |
| (e) $I(a) = \int_0^a \frac{t}{t^2+1} dt$; | (k) $I = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{1+2e^x}$; |
| (f) $I(a) = \int_0^a \frac{t^2}{(t^2+1)^2} dt$ (IPP) ; | (l) $I = \int_0^3 \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$. |

- (a) $I = 15$;
 (b) $I_n = 2(-1)^n$;
 (c) $I = -1/\pi$;
 (d) $I = 0$;
 (e) $I(a) = \frac{1}{2} \ln(a^2 + 1)$;
 (f) $\frac{t^2}{(t^2 + 1)^2} = t \frac{t}{(t^2 + 1)^2}$; IPP :

$$I(a) = -\frac{a}{2(a^2 + 1)} + \frac{\arctan a}{2}$$
- (g) Deux ipp successives conduisent à : $I = -e^\pi - 1 - (\pi + 1)/2$;
 (h) $I(t) = \frac{2}{t^2} (1 + (\pi t - 1)e^{\pi t})$;
 (i) $I = 1/2$;
 (j) $\frac{1}{y(1 + 2y)} = \frac{1}{y} - \frac{2}{1 + 2y}$; $I = \ln(6/5)$;
 (k) Le changement de variable $y = e^x$ ramène à l'intégration par parties;
 (l) Changement de variable $y = \sqrt{x + 1}$ puis décomposition en fractions simples :

$$\frac{y}{1 + y} = \frac{1 + y}{1 + y} - \frac{1}{1 + y} = 1 - \frac{1}{1 + y}.$$

 Finalement : $I = 2 - \ln 3$.

3. Intégrales généralisées : intégrale sur $[a, +\infty[$ d'une fonction continue sur $[a, +\infty[$. Dans chacun des trois cas suivants :

- déterminer l'intervalle (ou les intervalles) où la fonction à intégrer est définie et continue;
- calculer $I(c)$;
- si la limite existe, calculer $\lim_{c \rightarrow +\infty} I(c)$.

- (a) $I(c) = \int_1^c \frac{dt}{t^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$.
 (b) $I(c) = \int_1^c e^{-\alpha x} dx$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
 (c) $I(c) = \int_2^c \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Solutions.

- (a) La fonction est définie et continue sur $]0, +\infty[$;

- Si $\alpha \neq 1$: $I(c) = \frac{1}{1 - \alpha} (c^{1 - \alpha} - 1)$. Donc :
 - Si $\alpha > 1$: $c^{1 - \alpha}$ tend vers 0 quand c tend vers l'infini donc : $\lim_{c \rightarrow +\infty} I(c) = \frac{1}{\alpha - 1}$.
 - Si $\alpha < 1$: $c^{1 - \alpha}$ tend vers $+\infty$ quand c tend vers l'infini donc : $\lim_{c \rightarrow +\infty} I(c) = +\infty$.
- Si $\alpha = 1$, $I(c) = \ln c$ donc $\lim_{c \rightarrow +\infty} I(c) = +\infty$.

La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Si $\alpha = 0$: $I(c) = c - 1$ donc $\lim_{c \rightarrow +\infty} I(c) = +\infty$.

- (b) — Si $\alpha \neq 0$: $I(c) = (1 - e^{-\alpha c})/\alpha$. Donc :

- Si $\alpha > 0$: $\lim_{c \rightarrow +\infty} I(c) = 1/\alpha$.
- Si $\alpha < 0$: $\lim_{c \rightarrow +\infty} I(c) = +\infty$.

- (c) La fonction est définie et continue sur $]1, +\infty[$; Le changement de variable $y = \ln x$ mène à :

$I(c) = \int_{\ln 2}^{\ln c} \frac{dy}{y^\alpha}$. Comme à la première question, on trouve :

- Si $\alpha = 1$: $I(c) = \ln(\ln c) - \ln(\ln 2)$ et $\lim_{c \rightarrow +\infty} I(c) = +\infty$;
- Si $\alpha > 1$: $I(c) = \frac{1}{1 - \alpha} (\ln c)^{1 - \alpha} - (\ln 2)^{1 - \alpha}$ et $\lim_{c \rightarrow +\infty} I(c) = \frac{(\ln 2)^{1 - \alpha}}{\alpha - 1}$;
- Si $\alpha < 1$: $I(c) = \frac{1}{1 - \alpha} (\ln c)^{1 - \alpha} - (\ln 2)^{1 - \alpha}$ et $\lim_{c \rightarrow +\infty} I(c) = +\infty$.

Définition 7: Intégrale généralisée sur un intervalle $[a, +\infty[$

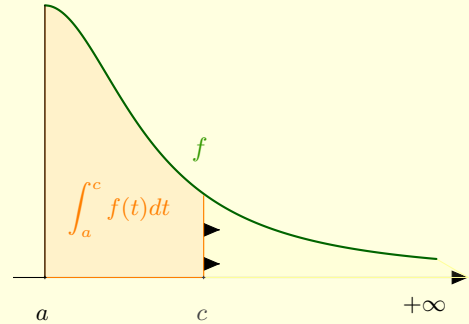
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, +\infty[$ et soit $I(c) = \int_a^c f(t) dt$, pour $c \geq a$.

Si $I(c)$ admet une limite quand c tend vers $+\infty$, on

la note : $\int_a^{+\infty} f(t)dt$. Ainsi :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(t)dt.$$

Attention : cette limite n'existe pas toujours.



Quand cette limite **existe et est finie**, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est **convergente**. Dans le cas contraire, l'intégrale est dite **divergente**.

4. Exemples

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1 \quad \int_{\pi}^{+\infty} \cos t \, dt \text{ n'est pas définie} \quad \int_2^{+\infty} e^{-3x} dx = \frac{1}{3e^6}.$$

5. Intégrales généralisées : intégrale sur un intervalle $]a, b]$ d'une fonction continue sur $]a, b]$.

Dans chacun des trois cas suivants :

- déterminer l'intervalle (ou les intervalles) où la fonction à intégrer est définie et continue ;
- calculer $I(c)$;
- si la limite existe, calculer $\lim_{c \rightarrow 0} I(c)$.

$$(a) \quad I(c) = \int_c^1 \frac{dt}{t^\alpha}, \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}^+$$

$$(b) \quad I(c) = \int_c^1 \ln x \, dx.$$

Solutions.

(a) La fonction est définie et continue sur $]0, 1[$;

— Si $\alpha \neq 1$: $I(c) = \frac{1}{1-\alpha}(1 - c^{1-\alpha})$. Donc :

— Si $\alpha < 1$: $c^{1-\alpha}$ tend vers 0 quand c tend vers 0 donc : $\lim_{c \rightarrow +0} I(c) = \frac{1}{1-\alpha}$.

— Si $\alpha > 1$: $c^{1-\alpha}$ tend vers $+\infty$ quand c tend vers 0 donc : $\lim_{c \rightarrow 0} I(c) = +\infty$.

— Si $\alpha = 1$, $I(c) = -\ln c$ donc $\lim_{c \rightarrow 0} I(c) = +\infty$.

(b) La fonction est définie et continue sur $]0, 1]$.

$$I(c) = [x \ln x - x]_c^1 = -1 - c \ln c + c.$$

Nous savons que $c \ln c$ tend vers 0 quand c tend vers 0, donc : $\lim_{c \rightarrow 0} I(c) = -1$.

Définition 8: Intégrale généralisée sur un intervalle $]a, b]$

Soit f une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert

$]a, b]$ et soit $I(c) = \int_c^b f(t) dt$, pour $c \in]a, b]$. Si $I(c)$ admet

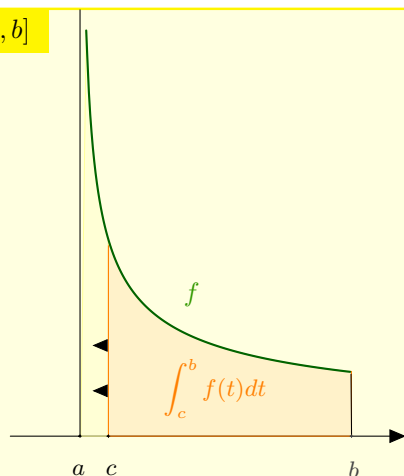
une limite quand c tend vers a , on la note : $\int_a^b f(t) dt$.

Ainsi :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(t) dt.$$

Attention : cette limite n'existe pas toujours.

Quand cette limite **existe et est finie**, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est **convergente**.
Dans le cas contraire, l'intégrale est dite **divergente**.



Attention : une intégrale généralisée est définie comme une **limite**. Si cette limite n'existe pas, l'intégrale généralisée correspondante n'a pas de sens. Par exemple, l'écriture $\int_0^{+\infty} \cos x dx$ n'a aucune signification mathématique.

6. **Premiers exemples** Les intégrales suivantes sont des intégrales généralisées. Pourquoi ? Quelle est la définition précise de chacune d'entre elles ? Calculer ces intégrales quand c'est possible.

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = ? \quad \int_0^1 \ln t dt = ?$$

Réponses. Ces intégrales sont généralisées car les fonctions à intégrer ne sont pas continues sur l'intervalle fermé $[0, 1]$ mais seulement sur l'intervalle $]0, 1]$. On a :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{c \rightarrow 0} \int_c^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$$

et

$$\int_0^1 \ln t dt = \lim_{c \rightarrow 0} \int_c^1 \ln t dt = -1$$

(calculs fait à l'exercice précédent).

7. Mêmes questions que dans l'exercice précédent.

(a) $I = \int_0^1 x^2 \ln x dx$;

(b) $I(s) = \int_0^1 x^s \ln x dx$, $s \in \mathbb{R}$;

(c) $I = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^2 + 1}$;

(d) $I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + 4y^2 x^2}$;

(e) $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$;

(f) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2} dx$;

(g) $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{(1 + x)^2} dx$.

- (h) $I = \int_1^{+\infty} \frac{dy}{y(1+2y)}$;
 (i) $I(p) = \int_0^{+\infty} x e^{-px} dx, p \in \mathbb{R}$;
 (j) $I(p) = \int_0^{+\infty} \sin x e^{-x} dx$
 (k) $I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.
 (l) $I = \int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln t}}$.

Réponses.

- (a) Fonction pas définie en 0.

$$I = \lim_{c \rightarrow 0} \int_c^1 x^2 \ln x dx = -\frac{1}{9}. \text{ Faire une IPP et utiliser le fait que } c^3 \ln c \rightarrow 0 \text{ quand } c \rightarrow 0 \text{ (croissances comparées).}$$

- (b) Fonction pas définie en 0. Se traite comme l'exemple précédent.

$$I(s) = \lim_{c \rightarrow 0} \int_c^1 x^s \ln x dx = -\frac{1}{(1+s)^2};$$

- (c) Intervalle non borné.

$$I = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c \frac{dy}{1+y^2} = \pi/2;$$

- (d) Intervalle non borné. $I(y) = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c \frac{dx}{1+4y^2x^2} = \frac{\pi}{4y}$ (changement de variable $u = 2xy$).

- (e) Intervalle non borné.

$$I = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{\pi}{4} \text{ (changement de variable : } u = e^{-x} \text{).}$$

- (f) Intervalle non borné. L'intégrale I n'est pas définie car la quantité $\int_0^c \frac{\cos x}{(2+\sin x)^2} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2+\sin c}$ n'a pas de limite quand $c \rightarrow +\infty$;

- (g) Fonction pas définie en 0. $I = \lim_{c \rightarrow 0} I_c$ avec $I_c = \int_c^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$. IPP. $I_c = \ln(1+c) - \ln 2 - \left(\frac{c}{1+c}\right) \ln c$. Croissances comparées : $I = -\ln 2$.

- (h) Borne infinie. Il faut décomposer la fraction en éléments simples :

$$\frac{1}{y(1+2y)} = \frac{1}{y} - \frac{2}{1+2y}.$$

$$\begin{aligned} \text{On obtient : } I &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{dy}{y(1+2y)} \\ &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{c}{1+2c} \right) - \ln \left(\frac{1}{3} \right) = \ln 3 - \ln 2. \end{aligned}$$

- (i) Borne infinie. IPP :

$$I(p) = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c x e^{-px} dx = \frac{1}{p^2}.$$

- (j) Borne infinie. Double IPP :

$$I(p) = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c \sin x e^{-x} dx = \frac{1}{2};$$

- (k) Borne infinie.

$$I = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_2^c \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \sqrt{2}.$$

(1) Fonction pas définie en 1.

$$I = \lim_{c \rightarrow 1} \int_c^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln t}} = 2 \text{ (changement de variable : } u = \ln t \text{)};$$

Proposition 1: Intégrales généralisées de référence

- L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
- L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.
- L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.
- L'intégrale $\int_0^1 \ln t dt$ est convergente.

8. **Intégrale faussement généralisée.** On considère la fonction f définie par :

$$\forall x > 0 \quad f(x) = x \ln x.$$

- (a) Quel est le domaine de définition de la fonction f ?
- (b) Quelle est la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 ?
- (c) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La fonction g est-elle continue en 0 ? L'intégrale $\int_0^1 g(x) dx$ est-elle une intégrale généralisée ?

(d) Expliquer pourquoi on a :

$$\forall c \in]0, 1] \quad \int_c^1 f(x) dx = \int_c^1 g(x) dx.$$

(e) Expliquer, sans calcul, pourquoi l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$ est convergente et pourquoi on a :

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx.$$

(f) Donner la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$.

Proposition 2: Intégrale faussement généralisée

Soient a et b deux réels et f une fonction continue sur un intervalle $]a, b]$. Si f admet une limite finie l en a , alors l'intégrale généralisée :

$$\int_a^b f(x) dx$$

est convergente.

(g) En s'inspirant des questions précédentes, rédiger une démonstration de cette proposition.

Solutions

(a) La fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (c'est l'ensemble de définition de $\ln$).

- (b) Par croissances comparées, la limite est 0.
- (c) Oui la fonction est continue en 0 car d'après la question précédente la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0 est $g(0) = 0$. Il ne s'agit donc pas d'une intégrale généralisée car g est continue sur $[0, 1]$.
- (d) Sur $]c, 1]$, $f = g$ par définition de g donc les intégrales sont égales.
- (e) Cette intégrale est convergente si elle admet une limite finie quand c tend vers 0. Or

$$\forall c \in]0, 1] \quad \int_c^1 f(x) \, dx = \int_c^1 g(x) \, dx.$$

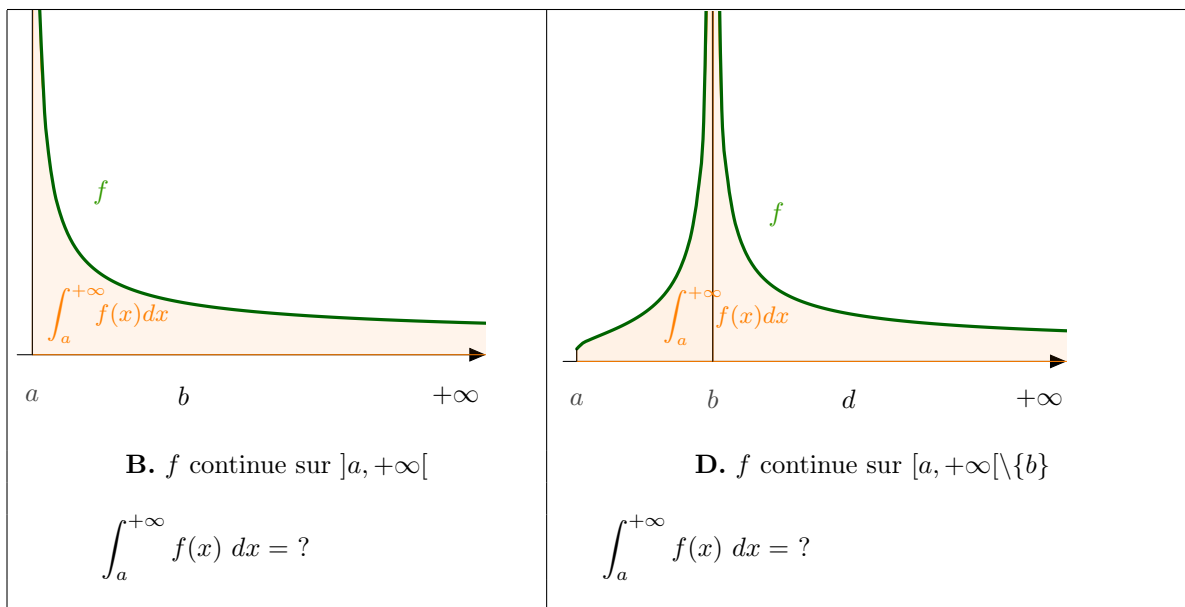
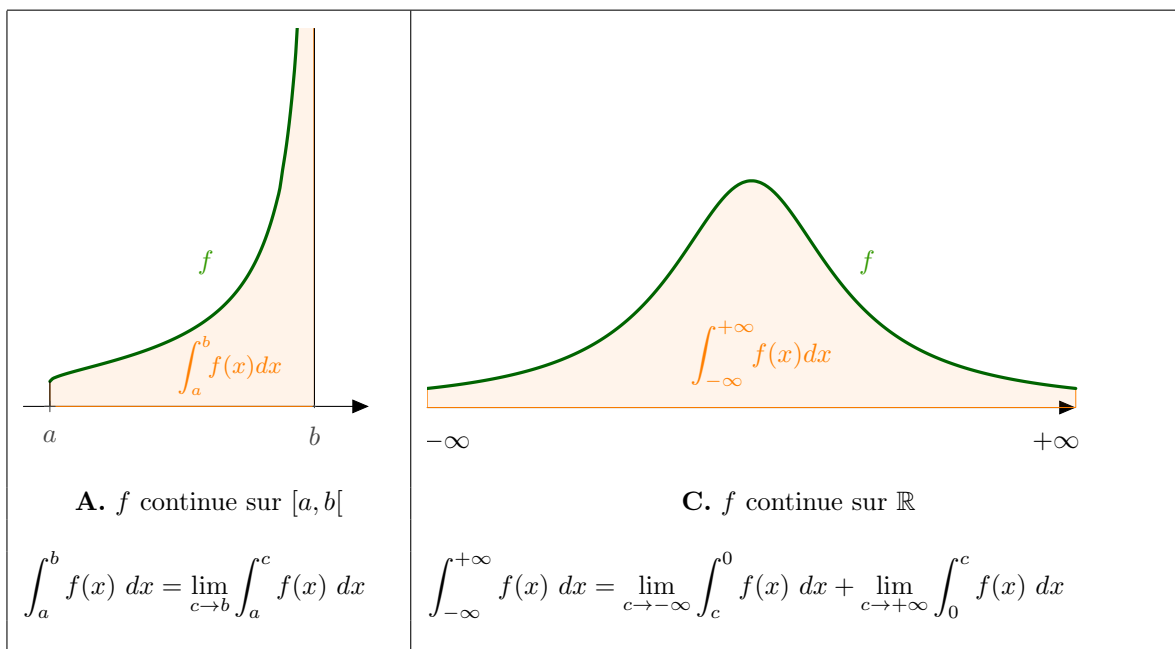
Donc

$$\lim_{c \rightarrow 0} \int_c^1 f(x) \, dx = \lim_{c \rightarrow 0} \int_c^1 g(x) \, dx = \int_0^1 g(x) \, dx$$

Par ailleurs, $\int_0^1 g(x) \, dx$ est un réel fini donc $\int_0^1 f(x) \, dx$ converge et est égale à $\int_0^1 g(x) \, dx$.

(f)

9. (a) La proposition 2 est-elle encore vraie si $b = +\infty$?
 - (b) Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$. On suppose que $f(x)$ tend vers une limite finie l en $+\infty$. Peut-on en déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) \, dx$ est convergente ?
 - (c) Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$. Si l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) \, dt$ est convergente, peut-on en déduire que $f(x)$ tend vers 0 à l'infini ?
10. **Autres cas :** Comment définir l'intégrale généralisée correspondant à chacune des situations suivantes ?



Réponse pour **B** : on choisit un point $b \in]a, +\infty[$ et l'on pose :

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a} \int_c^b f(x) dx + \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_b^c f(x) dx$$

Réponse pour **D** : on choisit un point $d \in]b, +\infty[$ et l'on pose :

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(x) dx + \lim_{c \rightarrow b} \int_c^d f(x) dx + \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_d^c f(x) dx$$

11. **Exemples** Les intégrales suivantes sont-elles des intégrales généralisées ? Où sont situés leurs problèmes de définition ? Comment les calculer ?

(a) $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}};$

(b) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2};$

(c) $I = \int_{1/2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{|x-1|}};$ on pourra avoir à utiliser l'exercice 2f.

(d) $I = \int_0^1 \frac{dt}{t \sqrt{|\ln t|}}.$

Solutions

- (a) Fonction non définie en 1.

$I = \lim_{c \rightarrow 1} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} dx = 2$. Si on ne voit pas de primitive évidente de la fonction à intégrer, on peut faire le changement de variable $y = 1 - x$.

- (b) $I = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c \frac{dx}{1+x^2} = \pi$; On peut aussi remarquer que la fonction est paire et donc que, si l'intégrale sur $[0, +\infty[$ est convergente, alors celle sur $] -\infty, +\infty[$ l'est aussi et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = 2 \int_0^{+\infty}.$$

- (c) Intervalle non borné, fonction non définie en 1. Il faut définir l'intégrale I ainsi :

$$I = \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_{1/2}^c \frac{dx}{x^2 \sqrt{|x-1|}} + \lim_{c \rightarrow 1^+} \int_c^2 \frac{dx}{x^2 \sqrt{|x-1|}} + \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_2^c \frac{dx}{x^2 \sqrt{|x-1|}}.$$

Le choix du point de coupure en 2 est arbitraire. On peut dès lors lever les valeurs absolues puisque, si $x \leq 1$, $|x-1| = 1-x$ et si $x \geq 1$: $|x-1| = x-1$. Donc :

$$I = \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_{1/2}^c \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x}} + \lim_{c \rightarrow 1^+} \int_c^2 \frac{dx}{x^2 \sqrt{x-1}} + \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_2^c \frac{dx}{x^2 \sqrt{x-1}}.$$

Changements de variables : $u = \sqrt{1-x}$ dans la première intégrale et $u = \sqrt{x-1}$ dans les deux suivantes.

$$I = -2 \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{1-c}} \frac{du}{(1-u^2)^2} + 2 \lim_{c \rightarrow 1^+} \int_{\sqrt{c-1}}^1 \frac{du}{(u^2+1)^2} + 2 \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^{\sqrt{c-1}} \frac{du}{(u^2+1)^2}.$$

Pour utiliser ensuite l'exercice 2f, on constate que :

$$\frac{1}{(u^2+1)^2} = \frac{u^2+1}{(u^2+1)^2} - \frac{u^2}{(u^2+1)^2} = \frac{1}{u^2+1} - \frac{u^2}{(u^2+1)^2}$$

et l'on trouve : $I = \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} + (\pi/2)$.

- (d)

- (e) Fonction définie ni en 0 ni en 1. $I = \lim_{c \rightarrow 0} \int_c^{1/2} \frac{dt}{t(-\ln t)^{1/2}} + \lim_{d \rightarrow 1} \int_{1/2}^d \frac{dt}{t(-\ln t)^{1/2}}$; on voit après le changement de variable $x = -\ln t$ que la première limite est infinie car $1/2 \leq 1$ et la seconde prend une valeur finie positive. Donc la somme des deux est infinie : $I = +\infty$.

Equivalents de fonctions

Code pour les questions

- Sans étoile : Niveau exigible pour tout le monde.
- : Niveau exigible pour tout le monde mais moins importante.
- : Niveau pour aller plus loin (exigible pour ceux qui prétendent aux écoles gei)

Le contenu du cours

Définition 9:

On dit que deux fonctions f et g définies sur un intervalle I sont équivalentes en $a \in I$ s'il existe une fonction ϵ tendant vers 0 quand t tend vers a telle que pour tout réel t de I , $f(t) = g(t)(1 + \epsilon(t))$. On note alors $f(t) \underset{t \rightarrow a}{\sim} g(t)$

Nous vous donnons maintenant la définition "officiuse", c'est celle-ci dont vous vous servirez pour les questions qui suivent.

Définition 10: Cas particulier

On dit que deux fonctions f et g non nulles définies sur un intervalle I sont équivalentes en $a \in I$ si $\frac{f(t)}{g(t)} \underset{t \rightarrow a}{\rightarrow} 1$.

1. Equivalents de somme

- Trouvez des fonctions qui sont équivalentes à 1 en $+\infty$ puis en 0.
- Déterminez des équivalents de $t + t^2 + 2t^3$ en $+\infty$. Déterminez-en ensuite l'équivalent le plus simplifié.
- Reprendre la question précédente en remplaçant $+\infty$ par 0.
- Soit $k > l \geq 0$, entre t^k et t^l qui est négligeable devant qui en $+\infty$? en 0? en 1? Donnez alors l'équivalent le plus simple en chacun de ces points.
- Etant donné une fonction f et une autre fonction g négligeable devant f au voisinage de a (la limite de $\frac{g(t)}{f(t)}$ tend vers 0 quand $x \rightarrow a$), peut-on trouver un équivalent de $f + g$?
- Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours la question 1e démontre-t-elle? Apprenez ce(s) résultat(s) et appelez un enseignant pour faire un bilan de cette partie.
- Reprenez les équivalents de la question 1b en utilisant le résultat obtenu aux questions précédentes.

Solutions :

Les solutions ne sont pas détaillées dans ce chapitre : les raisonnements sont similaires aux équivalents portant sur les suites, inspirez-vous en pour la rédaction. La différence est que l'équivalent peut être donné en d'autres points que $+\infty$.

- $1 + \frac{1}{t}$ en $+\infty$ et $1 + t$ en 0. Pour le prouver, faites le quotient par des deux fonctions censées être équivalentes et ce quotient doit tendre vers 1.
- $t^2 + 2t^3$ en est un mais le plus simplifié est $2t^3$.
- En 0, l'équivalent le plus simplifié est t .

- (d) Si $k > l$, t^l est négligeable devant t^k en $+\infty$ car $\frac{t^l}{t^k} = \frac{1}{t^{k-l}}$ tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$. En 0, c'est l'inverse : t^k est négligeable devant t^l en 0 car $\frac{t^k}{t^l} = t^{k-l}$ tend vers 0 quand $t \rightarrow 0$.
- (e) C'est le même résultat que sur les suites : $f + g$ est équivalent à g en a car le quotient tend vers 1.
- (f)
- (g) En $+\infty$, t et t^2 sont négligeables devant $2t^3$ car le quotient de t par $2t^3$ tend vers 0 en $+\infty$ (idem pour t^2). D'après la question précédente, l'équivalent est donc $2t^3$.

2. Opérations sur les équivalents

- (a) On suppose que $f(t) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(t)$ et $h(t) \underset{t \rightarrow a}{\sim} i(t)$. Démontrez que :
- $f(t)h(t) \underset{t \rightarrow a}{\sim} g(t)i(t)$.
 - $\frac{f(t)}{h(t)} \underset{t \rightarrow a}{\sim} \frac{g(t)}{i(t)}$ si h et i ne s'annulent pas au voisinage de a .
- (b) Déterminez l'équivalent le plus simple en $+\infty$ de $\frac{3t^2 + \ln(t)}{t + 4e^t}$ en exploitant la question 2a.
- (c) **Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours la question 2 démontre-t-elle ? Apprenez ce(s) résultat(s) et appelez un enseignant pour faire un bilan de cette partie.**

Solutions sans rédaction

- (a) On revient à la définition en calculant les quotients et en vérifiant que leur limite vaut 1.
- (b) On trouve l'équivalent du numérateur (croissances comparées) et celui du dénominateur (croissances comparées) : on obtient $3t^2/4e^t$.
- (c)
3. **Entraînez-vous !** Déterminez l'équivalent le plus simple des quantités suivantes : Déterminez l'équivalent le plus simple au voisinage de $+\infty$ de

$$t^2 + t, 2t + \ln(t), t - \sin(t), \frac{t + \ln(t)}{\ln(t) + t^2}, \frac{t^2 - t}{-10t^2 + 2\sqrt{t}}$$

Solutions sans rédaction

$$t^2, 2t, t, \frac{1}{t}, -\frac{1}{10}$$

4. **Entraînez-vous !** Déterminez l'équivalent le plus simple au voisinage de 0 de

$$t^2 + t, \frac{t + \ln(t)}{\ln(t) + t^2}, \frac{t^2 - t}{-10t^2 + 2\sqrt{t}}.$$

Solutions sans rédaction

$$t, 1, -\frac{\sqrt{t}}{2}$$

Intégrales généralisées de fonctions positives

Code pour les questions

- Sans étoile : Niveau exigible pour tout le monde.
- : Niveau exigible pour tout le monde mais moins importante.
- : Niveau pour aller plus loin (exigible pour ceux qui prétendent aux écoles gei)

Le contenu du cours

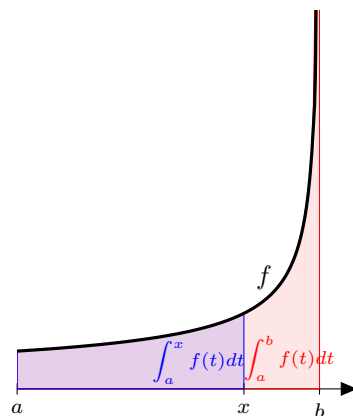
Dans les paragraphes précédents, nous avons étudié la convergence d'intégrales généralisées en les calculant. L'outil primitive permet de calculer beaucoup plus d'intégrales qu'on ne pouvait calculer des séries. Cependant, de nombreuses intégrales doivent se traiter sans calcul. Nous allons voir que l'étude des intégrales généralisées est en beaucoup de points analogue à celle des séries. Dans ce paragraphe, nous étudions uniquement les intégrales généralisées à termes positifs.

La **démarche** sera la suivante :

- Disposer d'un certain nombre d'intégrales de référence (fait précédemment) ;
- Établir ensuite des propriétés générales qui permettent de ramener l'étude d'une intégrale généralisée à termes positifs à celle d'une intégrale généralisée de référence.

Mais, tout d'abord, **pourquoi étudier les séries à termes positifs** ? C'est le sujet du premier exercice.

1. *Spécificités des intégrales généralisées positives.* Soit une fonction f continue sur $[a, b[$, positive. Définissons la fonction $F : x \in [a, b[\mapsto \int_a^x f(t) dt$. Ici la lettre b désigne soit un réel strictement supérieur à a soit $+\infty$.
 - (a) Sur le graphique ci-contre, à quoi correspond $F(x)$ géométriquement.
 - (b) En observant le graphique ci-contre, devinez quelle sera la monotonie de F sur $[a, b[$.
 - (c) Démontrez alors votre conjecture (vous comparerez $F(x)$ et $F(y)$ pour $x < y$).
 - (d) Que dire alors de F si
 - F est majorée sur $[a, b[$.
 - F n'est pas majorée sur $[a, b[$.
 - (e) Établir un schéma logique qui relie les deux affirmations :
 - $\int_a^b f(t) dt$ converge ;
 - F est majorée sur $[a, b[$.
 - (f) **Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours la question 1 démontre-t-elle ? Apprenez ce(s) résultat(s) et appelez un enseignant pour faire un bilan de cette partie.**
 - (g) Écrire un résultat semblable pour l'intégrale sur un intervalle $]a, b]$ d'une fonction continue sur $]a, b]$ où $-\infty \leq a < b$.
2. *Comparaison par majoration ou minoration de deux intégrales généralisées à termes positifs.* Cet exercice utilise le résultat démontré dans l'exercice 1
 - (a) Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$ telles que, pour tout t dans $[a, b[$:



$$0 \leq f(t) \leq g(t).$$

(b) Pouvez-vous conjecturer le ou les liens logiques entre les deux affirmations suivantes ?

- L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente ;
- L'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ est convergente.

Indication. Si l'on note $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_a^x g(t)dt$, peut-on comparer F et G ?

- (c) Démontrer vos conjectures.
- (d) **Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours le début de la question 2 démontre-t-elle ? Apprenez ce(s) résultat(s) et appelez un enseignant pour faire un bilan de cette partie.**
- (e) Ecrire un résultat semblable pour l'intégrale sur un intervalle $]a, b]$ d'une fonction continue sur $]a, b]$ où $-\infty \leq a < b$.
- (f) Peut-on déduire de ce qui précède la nature des intégrales généralisées suivantes ? Commencez par déterminer le(s) problème(s) de définition.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{t - 1} dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx$$

3. Etudiez la nature des intégrales généralisées suivantes :

- | | | |
|---|---|---|
| (a) $\int_0^2 \frac{dt}{t + 5\sqrt{t}}$ | (d) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)^2}{t^4 + 6} dt$ | (g) $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(t^2 + 2)(3 + 5t)} dt$ |
| (b) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2 + 2}}$ | (e) $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$ | (h) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{3 - \cos(x)} dx$ |
| (c) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u - 1} du$ | (f) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^3 + \sqrt{t}} dt$ | |

Solutions :

Nous faisons la première et la sixième question en rédaction complète puis nous donnons les éléments sans rédaction pour les autres, à vous d'essayer d'adapter les autres. N'hésitez pas à venir nous voir pour en discuter.

- (a) Il s'agit d'une intégrale généralisée avec un seul problème de définition en 0. Nous appliquons le théorème de comparaison à majoration :

$$\forall t \in]0, 2], t + 5\sqrt{t} \geq 5\sqrt{t} > 0$$

Donc n'oubliez pas la positivité

$$0 \leq \frac{1}{t + 5\sqrt{t}} \leq \frac{1}{5\sqrt{t}}$$

Or $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t}}$ converge car c'est une intégrale de référence (Riemann) sur $]0, 1]$ avec $1/2 < 1$. Donc $\int_0^2 \frac{dt}{t + 5\sqrt{t}}$ converge.

- (b) CV : Pb en $+\infty$: majoration par $1/t^2$ (en utilisant que $t^2 + 2 \geq t^2$) dont l'intégrale sur $[1, +\infty[$ converge.
- (c) DV : Pb en $+\infty$: minoration par $1/u$ sur $[3, +\infty[$.
- (d) CV : Pb en $+\infty$: majoration par $1/t^4$.
- (e) CV faussement généralisée : la limite du terme général en 0 est 1.

(f) Cette intégrale généralisée possède deux problèmes de définition en 0 et $+\infty$. On étudie donc la nature de $\int_0^1 \frac{\sin^2 t}{t^3 + \sqrt{t}} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^3 + \sqrt{t}} dt$ séparément.

• On a $\forall t \in]0, 1], t^3 + \sqrt{t} \geq \sqrt{t}$ et $\sin^2(t) \leq 1$ donc $0 \leq \frac{\sin^2 t}{t^3 + \sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ Or $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ converge (intégrale de Riemann sur $]0, 1]$ avec $1/2 < 1$) donc par comparaison à majoration $\int_0^1 \frac{\sin^2 t}{t^3 + \sqrt{t}} dt$ converge.

• Par ailleurs $\forall t \in [1, +\infty[, t^3 + \sqrt{t} \geq t^3$ et $\sin^2(t) \leq 1$ donc $0 \leq \frac{\sin^2 t}{t^3 + \sqrt{t}} \leq \frac{1}{t^3}$ Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$ converge (intégrale de Riemann sur $[1, +\infty[$ avec $3 > 1$) donc par comparaison à majoration $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^3 + \sqrt{t}} dt$ converge.

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^3 + \sqrt{t}} dt$ converge.

(g) CV : Pb en 0 : majoration de $-\frac{\ln(t)}{(t^2 + 2)(3 + 5t)}$ par $-\ln(t)/6$.

(h) CV : Pb en $+\infty$: majoration par $e^{-2x}/2$.

4. *Croissances comparées* : En utilisant des arguments de croissances comparées (inspirez-vous de ce que vous aviez fait pour les séries), déterminez la nature des intégrales suivantes.

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx \quad (c) \int_0^{+\infty} \ln(x) e^{-x} dx \quad (e) \int_1^{+\infty} \frac{u^3}{(u+1)(e^u-1)} du$$

$$(b) \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t} \ln(t)} dx \quad (d) \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

(a) CV : pb en $+\infty$: majoration par $\sqrt{x}/x^2 = 1/x^{3/2}$.

(b) DV : pb en $+\infty$: minoration par $\frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{t}} = \frac{1}{t}$.

(c) CV : pb en $+\infty$ et en 0. Etude de $-\ln(x)e^{-x}$ qui est positive. En 0, majoration par $-\ln(x)$ sur $]0, 1]$. En $+\infty$, majoration par $e^{-x/2}$ car $\ln(x)e^{-x}/e^{-x/2} = \ln(x)e^{-x/2}$ tend vers 0 par CC.

(d) CV : pb en $+\infty$. Sur $[1, +\infty[, t^2 \geq t$ (valable uniquement si $t \geq 1$ donc $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ et sur $[0, 1]$, l'intégrale n'a pas de pb de définition.

(e) CV : pb en $+\infty$. Equivalent en $+\infty$ à $u^2 e^{-u}$. Ce terme est plus petit pour t grand que $e^{-u/2}$ car $u^2 e^{-u}/e^{-u/2} = u^2 e^{-u/2}$ tend vers 0 par CC.

5. *Utilisation de la comparaison par équivalents*. On rappelle que si une fonction (ϵ) tend vers 0 quand x tend vers b , alors on a pour x suffisamment proche de b :

$$-\frac{1}{2} \leq \epsilon(x) \leq \frac{1}{2}$$

Soient f et g deux fonctions à termes positifs continues sur $[a, b]$. On suppose que

$$f(x) \underset{b}{\sim} g(x).$$

(a) Vérifier que, pour tout x suffisamment proche de b , on a :

$$\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x).$$

(b) Démontrer que si l'intégrale $\int_a^b g(t) dt$ est convergente, alors la série $\int_a^b f(t) dt$ l'est aussi.

(c) Démontrer que les deux intégrales sont de même nature.

(d) **Quel(s) résultat(s) de la synthèse de cours la question 5 démontre-t-elle? Apprenez ce(s) résultat(s) et appelez un enseignant pour faire un bilan de cette partie.**

6. Etudiez la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{t + \sin(t)}{t + e^{-t}} dt$$

$$(b) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[6]{t} + 10}{\sqrt[3]{t} + \sqrt[4]{t^2}} dt;$$

7. Reprendre la question 3 en utilisant cette fois le théorème de comparaison par équivalents et en identifiant au préalable celles qui peuvent se traiter via cet outil.

8. *Et si le pb de définition est ailleurs qu'en 0 et $+\infty$?*

$$(a) \int_0^1 \frac{\sqrt{t} + 1}{\sqrt{t} - t} dt$$

$$(b) \int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t^3 - t^5}} dt$$