

Annale Mathématiques

Tout document interdit. Calculatrices non programmables autorisées.

► **Exercice 1.**

1. Rappeler le développement limité à l'ordre 3 en 0 de

a) e^x

c) $\sqrt{1+x}$

e) $\ln(1+x)$

b) $\sin(x)$

d) $\frac{1}{1-x}$

2. Donner le développement limité en 0 de

a) $\frac{1}{2 + \sqrt{1+x}}$, à l'ordre 4

► **Exercice 2.** Calculer les limites en 0 de ces fonctions (pensez à utiliser des équivalents pour les produits et les quotients)

a) $\frac{xe^{x^2} - \sin(x)}{\cos(3x^2) - 1}$

b) $\frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\cos(3x) - 1)}{\ln(1-x^2)^2}$

► **Exercice 3.** Soit $f(x) = \sqrt{1 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{32}x^2}$.

1. Calculer un DL de f à l'ordre 3.

2. Soit D la droite d'équation $y = 1 - 3/4x$. Quelle est l'interprétation graphique du résultat ci-dessus ?

3. Lorsque x est proche de 0, comment se situe le graphe de f par rapport à D ?

► **Exercice 4.**

1. Donner un DL à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \sqrt{1 + \exp(3x)}$.

rappel

Résumé sur la composition de DL

Méthode pour faire une composition de DL

Exemple : Soit $f(x)$ une fonction usuelle pour les DL et $g(x) = 2 - 2x + 3x^2 + 4x^3 + x^3\varepsilon(x)$.

On veut calculer le DL de $f(g(x))$.

1. Si $f(x) = e^x$

(a) Alors on écrit (en utilisant $e^{a+b} = e^a e^b$)

$$e^{2-2x+3x^2+4x^3} = e^2 e^{\underbrace{-2x+3x^2+4x^3}_{h(x)}}$$

(b) puis on calcule le DL de $e^{h(x)}$

2. Si $f(x) = \cos(x)$ ou $f(x) = \sin(x)$

- (a) Alors on écrit (en utilisant les formules d'addition $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$)

$$\cos(2 - 2x + 3x^2 + 4x^3) = \cos(2) \underbrace{\cos(-2x + 3x^2 + 4x^3)}_{h(x)} - \sin(2) \underbrace{\sin(-2x + 3x^2 + 4x^3)}_{h(x)}$$

$$\sin(2 - 2x + 3x^2 + 4x^3) = \sin(2) \underbrace{\cos(-2x + 3x^2 + 4x^3)}_{h(x)} + \sin(2) \underbrace{\sin(-2x + 3x^2 + 4x^3)}_{h(x)}$$

- (b) Puis on calcule le DL de $\cos(h(x))$ et $\sin(h(x))$

3. Si $f(x) = \frac{1}{x}$ ou $f(x) = \sqrt{x}$ ou $f(x) = \ln(x)$

- (a) Alors on écrit (en factorisant par 2) :

$$\frac{1}{2 - 2x + 3x^2 + 4x^3} = \frac{1}{2 \left(1 - \frac{2}{2}x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{2}x^3 \right)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \underbrace{-\frac{2}{2}x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{2}x^3}_{h(x)}}$$

$$\ln(2 - 2x + 3x^2 + 4x^3) = \ln \left(2 \left(1 - \frac{2}{2}x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{2}x^3 \right) \right) = \ln(2) + \ln \left(1 + \underbrace{-\frac{2}{2}x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{2}x^3}_{h(x)} \right)$$

$$\sqrt{2 - 2x + 3x^2 + 4x^3} = \sqrt{2 \left(1 - \frac{2}{2}x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{2}x^3 \right)} = \sqrt{2} \sqrt{1 + \underbrace{-\frac{2}{2}x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{2}x^3}_{h(x)}}$$

- (b) Puis on calcule le DL de $\frac{1}{1+h(x)}$ ou $\ln(1+h(x))$ ou $\sqrt{1+h(x)}$

Exercice 1

1. Rappel des développements limités à l'ordre 3 :

a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x),$

b) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x),$

c) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\epsilon(x),$

d) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\epsilon(x),$

e) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x).$

2. Développement limité de $\frac{1}{2+\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3 :

Développement limité de $\sqrt{1+x}$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\epsilon(x).$$

Substitution dans $2 + \sqrt{1+x}$:

$$2 + \sqrt{1+x} = 3 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\epsilon(x).$$

étape 2 : l'astuce

$$\frac{1}{3 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}} = \frac{1}{3} (1 - h(x) + h(x)^2 - h(x)^3 + \epsilon(x)x^3)$$

etape 3 : calcul de $h(x)$, $h(x)^2$, and $h(x)^3$:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x}{6} - \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{48} \\ h(x)^2 &= \frac{x^2}{36} - \frac{x^3}{72} \\ h(x)^3 &= \quad \quad + \frac{x^3}{216} \end{aligned}$$

etape 4 : on met ensemble

$$\frac{1}{2 + \sqrt{1+x}} = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{x}{6} + \left(\frac{x^2}{24} + \frac{x^2}{36} \right) + \left(-\frac{x^3}{48} - \frac{x^3}{72} - \frac{x^3}{216} \right) + \epsilon(x)x^3 \right]$$

on simplifie

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x}{6} + \frac{5x^2}{72} - \frac{17x^3}{432} + \epsilon(x)x^3 \right)$$

puis on distribue $\frac{1}{3}$:

$$= \frac{1}{3} - \frac{x}{18} + \frac{5x^2}{216} - \frac{17x^3}{1296} + \epsilon(x)x^3$$

Exercice 2

Calculer les limites en 0 de ces fonctions (pensez à utiliser des équivalents pour les produits et les quotients)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{x^2} - \sin(x)}{\cos(3x^2) - 1}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\cos(3x) - 1)}{\ln(1-x^2)^2}$

Solution

1. Calcul de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{x^2} - \sin(x)}{\cos(3x^2) - 1}$:

1. Développement limité de xe^{x^2} à l'ordre 3

$$xe^{x^2} = x + x^3 + x^3\epsilon(x)$$

2. Développement limité de $\sin(x)$ à l'ordre 3 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

3. Développement limité de $\cos(3x^2)$ à l'ordre 4 :

$$\cos(3x^2) - 1 = -\frac{9x^4}{2} + x^4\epsilon(x)$$

4. Calcul du numérateur :

$$xe^{x^2} - \sin(x) = \frac{7x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

5. Calcul du dénominateur :

$$\cos(3x^2) - 1 = -\frac{9x^4}{2} + x^4\epsilon(x)$$

6. Calcul de la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{7x^3}{6}}{-\frac{9x^4}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{7}{27} \frac{1}{x}$$

qui n'existe pas

2. Calcul de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\cos(3x)-1)}{\ln(1-x^2)^2}$:

1. Développement limité de $\sqrt{1+x^2}-1$ à l'ordre 2 :

$$\sqrt{1+x^2}-1 = \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$$

2. Développement limité de $\cos(3x)-1$ à l'ordre 2 :

$$\cos(3x)-1 = -\frac{9x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$$

3. Calcul du numérateur :

$$(\sqrt{1+x^2}-1)(\cos(3x)-1) = -\frac{9x^4}{4} + x^4\epsilon(x)$$

4. Développement limité de $\ln(1-x^2)^2$ à l'ordre 4 :

$$\ln(1-x^2) = -x^2 - \frac{x^4}{2} + x^4\epsilon(x) \Rightarrow \ln(1-x^2)^2 = x^4 + x^4\epsilon(x)$$

5. Calcul de la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{9x^4}{4}}{x^4} = -\frac{9}{4}$$

Exercice 3

1. Développement limité de $f(x)$ à l'ordre 3 :

$$f(x) \approx 1 - \frac{3}{4}x - \frac{27}{128}x^3 + x^3\epsilon(x)$$

2. Premier terme non nul après le terme en x :

$$-\frac{27}{128}x^3$$

3. La tangente T_0 au graphe de f en $x = 0$:

$$T_0(x) = 1 - \frac{3}{4}x$$

4. Position relative de la tangente par rapport au graphe de f :

Pour x proche de 0, $f(x)$ est en dessous de $T_0(x)$ lorsque $x > 0$ et au-dessus de $T_0(x)$ lorsque $x < 0$.

Exercice 4

calcul de $f(x) = \sqrt{1 + \exp(3x)}$. **Étape 1 : Développement limité de l'intérieur** $1 + e^{3x}$
Le développement limité de e^{3x} à l'ordre 3 est :

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + \frac{27x^3}{6} + \varepsilon(x)x^3 = 1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + \frac{9x^3}{2} + \varepsilon(x)x^3$$

Ainsi,

$$1 + e^{3x} = 2 + 3x + \frac{9x^2}{2} + \frac{9x^3}{2} + \varepsilon(x)x^3$$

Étape 2 : Factorisation par 2

On factorise par 2 :

$$1 + e^{3x} = 2 \left(1 + \frac{3x}{2} + \frac{9x^2}{4} + \frac{9x^3}{4} + \varepsilon(x)x^3 \right)$$

Posons $h(x) = \frac{3x}{2} + \frac{9x^2}{4} + \frac{9x^3}{4} + \varepsilon(x)x^3$. Alors,

$$\sqrt{1 + e^{3x}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + h(x)}$$

Étape 3 : Développement limité de $\sqrt{1 + h(x)}$

Le développement limité de $\sqrt{1 + h}$ est :

$$\sqrt{1 + h} = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{16} + \varepsilon(x)x^3$$

Étape 4 : Calcul des développements limités de $h(x)$, $h(x)^2$, $h(x)^3$

$$\begin{array}{llll} h(x) = \frac{3}{2}x & + \frac{9}{4}x^2 & + \frac{9}{4}x^3 & + \varepsilon(x)x^3 \\ h(x)^2 = 0 & + \frac{9}{4}x^2 & + \frac{27}{4}x^3 & + \varepsilon(x)x^3 \\ h(x)^3 = 0 & + 0 & + \frac{27}{8}x^3 & + \varepsilon(x)x^3 \end{array}$$

Étape 5 : Conclusion du développement limité de $\sqrt{1 + h(x)}$ et multiplication par $\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + h(x)} &= 1 + \frac{3x}{4} + \left(\frac{9}{8} - \frac{9}{32} \right) x^2 + \left(\frac{9}{8} - \frac{27}{32} + \frac{27}{128} \right) x^3 + \varepsilon(x)x^3 \\ &= 1 + \frac{3x}{4} + \frac{27x^2}{32} + \frac{81x^3}{128} + \varepsilon(x)x^3 \end{aligned}$$

Enfin, on multiplie par $\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + e^{3x}} &= \sqrt{2} \left(1 + \frac{3x}{4} + \frac{27x^2}{32} + \frac{81x^3}{128} + \varepsilon(x)x^3 \right) \\ &= \sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4}x + \frac{27\sqrt{2}}{32}x^2 + \frac{81\sqrt{2}}{128}x^3 + \varepsilon(x)x^3 \end{aligned}$$