

Pour tous les tests choisir un **risque égal à 5 %**

Le cortisol est une hormone stéroïde qui participe à la régulation des lipides, des protéines, de la glycémie et du cycle circadien, et dont la teneur est mesurée à l'aide d'un dosage salivaire (unité arbitraire). Un premier dosage (variable aléatoire X_8) a été réalisé à 8h, au réveil, chez **30 personnes** âgées de 30 à 35 ans en bonne santé (groupe A), et chez 30 autres personnes d'âge comparable présentant un symptôme d'épuisement majeur (groupe B). Un second dosage (variable X_{16}) a été effectué à 16h le même jour chez les mêmes personnes. L'écart entre les deux mesures a également été noté pour chaque personne. Les résultats sont résumés (moyennes et écart-types) dans le tableau suivant (données issues du concours Pass 2017, Paris 11) :

	n	X_8		X_{16}		$X_8 - X_{16}$	
		\bar{x}	s_x	\bar{x}	s_x	\bar{x}	s_x
A	30	0,55	0,20	0,25	0,10	0,30	0,17
B	30	0,35	0,15	0,22	0,10	0,13	0,15

Question 1

Le dosage obtenu au réveil est-il différent de celui obtenu à 16h le même jour chez les personnes en bonne santé ? Chez celles présentant un symptôme d'épuisement majeur ?

Correction : Comparaison de 2 moyennes expérimentales en séries appariées (14 pts)

Préalable (2 pts)

Les dosages étant effectués sur les mêmes individus, on travaillera en séries appariées en prenant comme nouvelle variable aléatoire l'écart entre les 2 mesures $D = X_8 - X_{16}$

Hypothèses (2 pts)

H_0 : **Pas de différence**, $\bar{D} = 0$

H_1 : Il existe une différence, $\bar{D} \neq 0$ (**Test bilatéral**)

Test et conditions (2 pts)

Test de **Student** à 29 ddl (en supposant la **différence des mesures distribuée normalement**)

Calculs : $t_{\text{exp}} = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}$ (4 pts)

Groupe A : $t_{\text{exp}} = \frac{0,30}{0,17/\sqrt{30}} = 9,67$

Groupe B : $t_{\text{exp}} = 4,75$

A comparer à $t(\text{Student}, 29 \text{ ddl}, \text{bilatéral}, 5\%) = 2,045$

Conclusions (4 pts)

$t_{\text{exp}} > t_{\text{table}}$ (**pour le groupe A et B**), donc **Rejet de H_0** au risque 5% : Le dosage en cortisol est **différent** au réveil qu'à 16 heures, chez les personnes en bonne santé ou celles présentant un symptôme d'épuisement majeur.

Le dosage obtenu au réveil diffère-t-il en moyenne selon que la personne est en bonne santé ou qu'elle présente un symptôme d'épuisement majeur ?

Même question pour le dosage obtenu à 16h le même jour.

Correction : Comparaison de 2 moyennes expérimentales en séries indépendantes (14 pts)

Hypothèses (2 pts)

H0 : Pas de différence, $\mu_A = \mu_B$

H1 : Il existe une différence, $\mu_A \neq \mu_B$ (Test bilatéral)

Test et conditions (4 pts)

Test de Student (à condition que les mesures soient distribuées normalement et égalité des variances)

Test de Fisher d'égalité des variances :

H0 : Les variances sont égales, $\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} = 1$

H1 : Les variances sont différentes (Test bilatéral)

Calculs : $F_{\text{exp}}(8h) = 0,20^2/0,15^2 = 1,78$; $F_{\text{exp}}(16h) = 0,10^2/0,10^2 = 1$

A comparer avec F(Fisher ; 29 ddl ; 5% ; bilatéral) compris entre 2,092 et 2,154 (sur la table fournie avec $\alpha = 0,025$)

Quelle que soit l'heure du dosage, $F_{\text{exp}} < F_{\text{table}}$ donc non rejet de H0, les variances sont considérées comme égales.

Les conditions du test de Student sont donc bien remplies.

Calculs : $t_{\text{exp}} = \frac{m_A - m_B}{\sqrt{s_c^2 \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B} \right)}}$ (4 pts)

Les variances étant égales, on peut calculer une variance commune s_c^2

À 8h : $s_c^2 = 0,03125$; à 16h : $s_c^2 = 0,01$

À 8h : $t_{\text{exp}} = 4,38$

À 16h : $t_{\text{exp}} = 1,16$

A comparer à t(Student, 58 ddl, bilatéral, 5%) $\approx 1,96$

Conclusions (4 pts)

À 8h, $t_{\text{exp}} > t_{\text{table}}$, donc Rejet de H0 au risque 5% : Le dosage en cortisol est différent au réveil chez les personnes en bonne santé et celles présentant un symptôme d'épuisement majeur.

À 16h, $t_{\text{exp}} < t_{\text{table}}$, donc non Rejet de H0 au risque 5% : Le dosage en cortisol redevient comparable chez les personnes en bonne santé et celles présentant un symptôme d'épuisement majeur.

Deux méthodes sont proposées pour doser un antibiotique dans un liquide biologique ; une méthode radio-immunologique (R) et une méthode immuno-enzymatique (I). On veut déterminer si ces deux méthodes sont corrélées. On fait donc un essai sur 14 prélèvements, chacun d'eux étant séparé en deux aliquots sur lesquels l'antibiotique est dosé par l'une ou l'autre des méthodes. Les résultats obtenus en mg sont :

Méthode R	1,8	3,4	3,0	0,6	3,8	2,2	2,4	1,3	2,2	0,8	1,5	1,2	3,2	1,4
Méthode I	2,0	3,4	3,0	0,6	3,7	2,2	2,4	1,3	2,2	0,8	1,5	1,2	3,3	1,4

Question 3

Existe-t-il une corrélation linéaire significative entre les 2 méthodes ?

Correction : Test de Corrélation de Pearson (12 pts)

Hypothèses (2 pts)

On peut remarquer que les 2 méthodes donnent des résultats souvent égaux (si on veut être précis, on peut noter que les écarts-type (cad les erreurs) de chaque méthode sont de l'ordre de 1 alors que les différences entre chaque méthode sont 10 fois moindres : elles mesurent la même chose).

H0 : Pas de corrélation, $\rho = 0$

H1 : Il existe une corrélation, $\rho \neq 0$ (Test bilatéral)

Test et conditions (2 pts)

Test de Student (à condition que les mesures soient (bi)-normales)

Calculs : $t_{\text{exp}} = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$ (5 pts)

$$r = 0,9978$$

$$t_{\text{exp}} = 52,27$$

A comparer à $t(\text{Student}, 12 \text{ ddl}, \text{bilatéral}, 5\%) = 2,179$

Conclusions (3 pts)

$t_{\text{exp}} \gg t_{\text{table}}$, donc fort Rejet de H0 au risque 5% : Les 2 méthodes sont fortement corrélées – comme attendu.