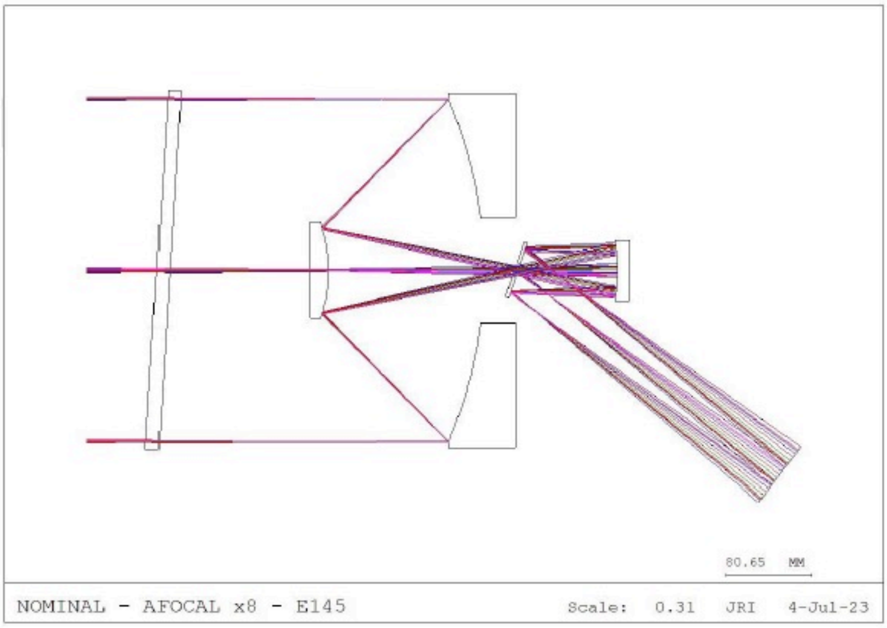
| **Examen Surfaces Optiques**<br>3A - IASO | **27 octobre 2023 - durée 1h30**<br>calculatrice et 1 feuille A4 de cours autorisés<br>1 remise copie |
|---|---|

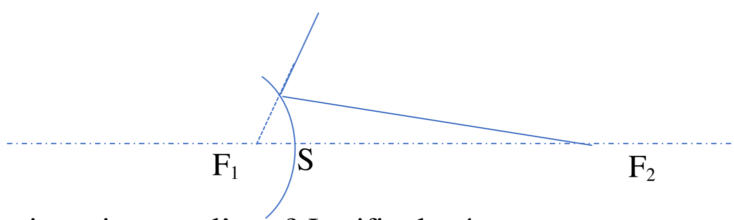
*Ce sujet comprend 3 pages*
*Les questions sont très largement indépendantes*

On considère le système optique afocal schématisé ci-dessous. Il est composé d'un hublot, que l'on considérera comme parfait et sans impact optique, d'un miroir M1 parabolique, d'un miroir M2 hyperbolique, d'un miroir M3 parabolique et d'un miroir M4 plan. La longueur d'onde de travail est $\lambda = 500$ nm.




| | R (mm) | k | TZ (axe) (mm) | TX (mm) | TY (mm) | RX (°) | RY (°) | Useful Diameter (mm) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **M1** | -380.577 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 320 |
| **M2** | -121.888 | -2.86077 | -145 | 0 | 0 | 0 | 0 | 84 |
| **M3** | -185.166 | -1 | 123.880 | 0 | 0 | 0 | 0 | 54 |
| **M4** | - | - | 31.297 | 0 | 0 | 0 | -18.95 | 46/49 |
| **EXP** | - | - | 62.150 | 0 | -24.019 | 0 | -37.9 | - |

Le miroir M2 est défini par ses deux distances focales, SF1=45,2885 mm et SF2=176,297 mm.




1. La formule est-elle stigmatique sur l'axe ? Justifier la réponse.

2. Donner pour chaque miroir le défaut de forme acceptable pour respecter le critère de Maréchal. On supposera la même amplitude de défauts pour chaque miroir.
3. A partir de la formule de conjugaison des miroirs $\frac{1}{f\prime} = \frac{1}{x\prime} + \frac{1}{x}$, retrouver la formule du grandissement axial $g_{dx}$ en fonction du grandissement latéral $g_y$. En déduire le déplacement de l'image formée par le M2 lorsque celui-ci se déplace de 1 $\mu$m selon Z.
4. Calculer l'amplitude de l'aberration de focus observée à la sortie du télescope pour un déplacement du M2 de 1 $\mu$m. Même question pour un déplacement du M3 de 1 $\mu$m. On prendra en compte un ratio PTV/rms de 3.46 pour le focus. Ces aberrations sont-elles acceptables vis-à-vis du critère de Maréchal ?
5. Qu'en déduit-on sur la sensibilité du système à un désalignement ? Sera-t-il facile à réaliser ?

De manière à minimiser l'influence thermique et vibratoire, l'ensemble du télescope, structure et miroirs inclus, est réalisé en carbure de silicium, dont les principales propriétés sont rappelées ci-dessous :

Module d'Young : E=420 GPa

Densité : $\rho$=3150 kg/m$^3$

CTE : 2.2 10$^{-6}$ K$^{-1}$

Conductibilité thermique : 130 W/m.K

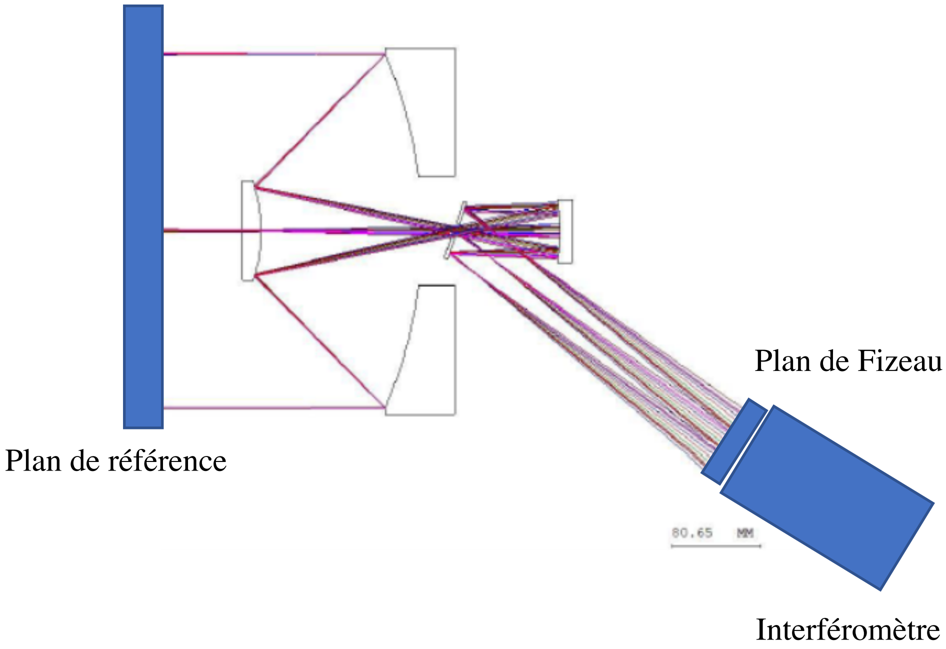
1. Lister les avantages d'un tel design. Quel sera l'impact sur les performances optiques d'une variation homogène de température ?
2. Du fait de gradients thermiques axiaux, la température du M1 passe à 21°C, alors que le reste du télescope reste à 20°C. Calculer la variation de courbure du M1, en supposant que celui-ci est un ménisque d'épaisseur 30 mm.
3. En déduire l'aberration de focus rms induite. Est-elle acceptable ?

Le calcul des modes du télescope fait apparaitre un mode de décentrement du M2 à la fréquence de 1021 Hz. On suppose que le système peut être assimilé à un système masse ressort à un degré de liberté décrit par l'équation fondamentale de la dynamique :

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = f$$

1. A partir de cette équation, retrouver l'équation du module de la fonction de transfert force-déplacement en fonction de la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et du facteur d'amortissement $\alpha = \frac{\lambda}{2m\omega_0}$.
2. En prenant en compte une masse totale du télescope m=7 kg et une fréquence propre de 1021 Hz et un facteur d'amortissement $\alpha$=0,6 % calculer l'amplitude du déplacement du M2 pour une force sinusoïdale de 1 N à la fréquence propre.

Le télescope est contrôlé au moyen d'un interféromètre de Fizeau selon le montage suivant :




Le plan de référence et le plan de Fizeau sont des étalons connus à mieux que 10 nm rms.

1. Quelle face du plan de Fizeau doit-on choisir comme face de référence pour minimiser les erreurs du montage ? Justifier la réponse.
2. Quelle erreur apporte la méconnaissance des plans de référence et de Fizeau au défaut de front d'onde généré par le télescope ?
3. Un rayon moyen parcourt approximativement 1 m entre le plan de Fizeau et le plan de référence. Quel doit être l'ordre de grandeur de la longueur de cohérence de la source pour avoir des franges contrastées ? Quel type de source permet d'obtenir cette longueur de cohérence ?

On suppose qu'aucun miroir n'est traité (télescope, plan de Fizeau, plan de référence) et que leur coefficient de réflexion est de 4%. Quel contraste des franges obtient-on ? Traiter le plan de référence avec une réflectivité de 1 permet-il de retrouver un contraste acceptable ?

4. On suppose maintenant que la transmission du télescope vaut 1 et que le plan de Fizeau et le plan de référence ont une réflectivité de 4%. Le spectre de la source comprend quant à lui deux fréquences que l'on modélise par $I(\sigma) = \delta(\sigma - \sigma_1) + \delta(\sigma - \sigma_2)$, avec δ fonction dirac. Pour quel écart de fréquence $\sigma_2 - \sigma_1$ annule-t-on complétement le contraste des franges ? Calculer l'écart en longueur d'onde correspondant.

L'interféromètre fonctionne en phase-shift temporel obtenu en déplaçant le plan de Fizeau d'une quantité connue. Le système est posé sur une table qui n'est pas isolée des vibrations.

1. Proposer un algorithme de phase-shift à 5 images permettant de minimiser l'impact des vibrations. Donner la fonction de transfert H(ω) associé à cet algorithme.
2. On suppose que les vibrations sont finalement acceptables et que l'on peut utiliser un algo de type LS-PSA à N images. Le bilan de flux donne 1000 photons arrivant sur le détecteur. Les coefficients de réflexion des miroirs correspondent au cas de la question 5 ci-dessus. Combien faut-il d'images pour obtenir un bruit de phase inférieur à 1 nm rms ?

Corrigé :

Partie I.1 :

Pour que le télescope soit stigmatique, il faut que le foyer de la première parabole coïncide avec le premier foyer du M2 et que le second foyer du M2 coïncide avec le foyer de M3, ce qui impose des conditions sur les entre-verres. On doit donc avoir :

$$f_1 = \frac{R_1}{2} = SF1 + e_1$$

Avec f1, focale du M1 et e1, entre-verre M1-M2. On a :

f1=190,2885 et SF1+e1=145+45,2885 => ça fonctionne.

On doit par ailleurs avoir :

$$SF_2 + f_3 = e_2$$

Avec f3, focale du M3 et e2, entre-verre M2-M3. On a :

f3=92,583 =>$SF_2 + f_3 = 92{,}583 + 176{,}297 = 268{,}88$, et $e_2 = 145 + 123{,}880 = 268{,}88$.

Le télescope est bien stigmatique.

I.2 :

On veut que l'erreur de front d'onde totale vérifie Δ=λ/14=35.7 nm rms. Le miroir comporte 4 miroirs et l'on suppose que leurs défauts se somment en quadratique. L'erreur de front d'onde maximale par miroir vaut donc Δ/2=17,85 nm rms. En négligeant les effets d'incidence, cela implique une défaut mécanique max par miroir de 8.9 nm rms.

I.3 :

En différenciant la formule, on trouve :

$$\frac{dx'}{x'^2} + \frac{dx}{x^2} = 0 => g_{dx} = \frac{dx'}{dx} = -\left(\frac{x'}{x}\right)^2 = -\left(\frac{y'}{y}\right)^2 = -g_y^2$$

Le miroir M2, conjugue F1 avec F2. Son grandissement vaut donc $g_y = -\frac{SF_2}{SF_1} = 3{,}89 =>$ $g_{dx} = 15{,}1$

Un déplacement de +1 $\mu$m du miroir entraîne donc un déplacement de -1 $\mu$m de l'objet et de +15 $\mu$m de l'image. Comme le miroir s'est déplacé de 1 $\mu$m, le déplacement de l'image dans un repère fixe vaut 16 $\mu$m.

I.4 :

Pour le M3, l'objet s'est avancé de dx'=16 $\mu$m. La formule de conjugaison des miroirs donne :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x'} + \frac{1}{f' - dx'} => x' = \frac{1}{\frac{1}{f'} - \frac{1}{f' - dx'}} \approx -\frac{f'^2}{dx'} = -5{,}3\ 10^5 mm$$

Avec f'=185,166/2=92,6 mm.

Les rayons convergent en x'. L'amplitude de l'aberration de focus vaut $\Delta = \frac{h^2}{2x\prime} = 0{,}68\ \mu m$ ptv (avec h=27 mm demi diamètre de la pupille au niveau du M3). L'amplitude rms vaut donc 197 nm rms, ce qui est inacceptable du point de vue du critère de Maréchal.

A noter que l'on peut calculer l'aberration plus simplement en différenciant l'erreur de flèche $\frac{h^2}{2f\prime}$ par rapport à f'. On trouve directement l'expression $\Delta = -\frac{h^2}{2f'^2}df' = \frac{h^2}{2x\prime}$

Pour un déplacement de 1 $\mu$m du M3, le déplacement de l'objet dx' vaut 1 $\mu$m. On obtient une amplitude de 12 nm rms, inférieure au 17,9 nm rms spécifié.

I.5 : le système est extrêmement sensible à un désalignement du M2 et sera très difficile à aligner et à stabiliser durant toute sa durée de vie.

Partie I.2 :

1. Un système mono-matériaux est insensible à une variation de température homogène, qui ne modifie que marginalement ses propriétés optiques. Par ailleurs, le SiC présente un très faible ratio densité / module d'Young, ce qui permet de fabriquer des télescopes très rigides et légers. Le SiC a enfin un faible coefficient de dilation et une grande conductibilité thermique, ce qui minimise l'effet de gradients thermiques dans le télescope.
2. La question était un peu ambigüe car l'on ne sait pas si la variation de température est homogène ou si la face arrière du miroir reste à 20°C. Dans le cas d'une variation homogène, le rayon de courbure du miroir varie de $\frac{dR}{R} = CTE.dT = 2.2\ 10^{-6} => dR = 0{,}837\ \mu m$. Dans le cas d'un gradient de 1°C dans le miroir, $dC = \frac{\alpha dT}{e} = 710^{-8}\ mm^{-1}$. $dR = -R^2.dC = 10{,}6\ \mu m$
3. On peut calculer cela de deux manières. Côté objet, la distance focale se réduit de $df = \frac{dR}{2} = 0{,}42\ \mu m$. L'amplitude de l'aberration vaut donc en valeur absolue $\Delta = \frac{h^2}{2f'^2}df' = 148\ nm\ ptv$ ; soit 43 nm rms. On peut aussi noter que l'objet s'est déplacé de 0.42 $\mu$m par rapport au M2, et donc de 6,3 $\mu$m par rapport au M3. En effectuant une règle de trois par rapport au calcul du I.4, on trouve une erreur ptv de 269 nm ptv. Les deux résultats diffèrent car ils sont basés sur une approximation de Gauss valables pour de faibles ouvertures, ce qui n'est pas le cas du M1. En utilisant cette approximation, le diamètre utile du M3 ne serait que de 40 mm (calculé à partir du rapport des focales), ce qui donne dans ce cas la même aberration que pour le premier calcul. Ces approximations donnent des ordres de grandeur mais le calcul réel pour de si fortes ouvertures doit être fait avec un logiciel de calcul optique. En tous les cas, cette aberration n'est pas acceptable vis-à-vis du critère de Maréchal.

Partie I.3 :

1. Soient $\hat{x}$ et $\hat{f}$, les TF de x et f. On peut écrire l'équation dans l'espace de Fourier :

$$(-m\omega^2 + i\lambda\omega + k)\hat{x} = \hat{f}$$

La fonction de transfert force-déplacement vaut donc :

$$H(\omega) = \frac{\hat{f}}{\hat{x}} = \frac{1}{(-m\omega^2 + i\lambda\omega + k)}$$

Son module vaut :

$$|H|^2 = \frac{1}{((k - m\omega^2)^2 + (\lambda\omega)^2)}$$

$$|H|^2 = \frac{1}{k^2\left(\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\alpha\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

$$|H| = \frac{1}{k\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\alpha\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

2. A la fréquence propre, $|H| = \frac{1}{2k\alpha}$. La raideur vaut $k = m\omega_0^2 = m(2\pi f_0)^2 = 2{,}9\ 10^8 N/m$. L'amplitude du déplacement vaut alors A=0.29 $\mu$m.

Partie II.1 :

- Il faut choisir la face la plus proche du télescope, de manière à ce que la matière du plan de Fizeau ne soit pas dans la cavité et que les défauts de la première face et de la matière n'impactent pas la mesure.
- La lumière fait un aller-retour dans la cavité. Elle voit deux fois l'erreur de front d'onde du télescope, deux fois le défaut de surface du plan de référence $e_{ref}$ et 2*(n-1)=1 le défaut de surface du plan de Fizeau $e_{fiz}$. L'erreur due aux plan de Fizeau et au plan de référence est donc $e_{ref}$+$e_{Fiz}$/2, soit 11 nm rms si on somme chaque défaut en quadratique.
- Lors d'un aller-retour le front d'onde traverse 2 m de cavité. La longueur de cohérence doit être supérieure à cette valeur pour avoir du contraste, idéalement au moins deux fois cette longueur, ce que l'on peut obtenir avec un He-Ne stabilisé (300 m de longueur de cohérence).
- Le contraste des franges est de la forme $\frac{2r_1.r_2}{r_1^2+r_2^2}$, avec r1, coefficient de réflexion en amplitude du plan de Fizeau et r2 coefficient en amplitude de la lumière revenant de l'ensemble téléscope-plan de référence. Si r=0,16 (racine de 0,04), r1=r et $r_2 = (1 - r) * r^9 = 2{,}5\ 10^{-13}$. Le contraste vaut alors 1,6 $10^{-12}$, et est donc quasi nul. Traiter le plan de référence seul ne suffit pas car la transmission du télescope est trop faible.
- On peut raisonner simplement en considérant que le spectre de la source est composé de deux longueurs d'onde discrètes de fréquence σ1 et σ2. Les longueurs d'onde n'interférant pas entre elles, les intensités vont se sommer. Le profil d'intensité I sera donc la somme des deux intérférogrammes obtenus pour chaque longueur d'onde. Il sera donc proportionnel à $I \sim 1 + \cos(2\pi\sigma_1\delta) + 1 + \cos(2\pi\sigma_2\delta) = 2(1 + \cos\left(2\pi\frac{(\sigma_1-\sigma_2)}{2}\delta\right).\cos\left(2\pi\frac{(\sigma_1+\sigma_2)}{2}\delta\right))$. Cela revient à obtenir un interférogramme à la fréquence $\frac{(\sigma_1+\sigma_2)}{2}$, modulé par un terme d'amplitude $\cos\left(2\pi\frac{(\sigma_1-\sigma_2)}{2}\delta\right)$. La différence de marche est égale à deux fois la longueur de la cavité, soit approximativement 2 m. Le contraste s'annule pour $(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2\delta} = 0{,}25\ m^{-1}$. L'écart en longueur d'onde vaut $\Delta\lambda = -\lambda^2\Delta\sigma = -\frac{\lambda^2}{2\delta}$=1 pm pour une longueur d'onde de 500 nm.

Partie II.2 :

1. Il faut un algorithme présentant plusieurs 0 en –ω0. Par exemple, avec deux zeros : $\boldsymbol{H(\omega)} = \boldsymbol{A(e^{-i\omega} - e^{i\omega_0})}^2.\,(\boldsymbol{e^{-i\omega}} - 1).\,(\boldsymbol{e^{-i\omega} - e^{-i2\omega_0}})(\boldsymbol{e^{-i\omega} - e^{-i3\omega_0}})$. Cet algorithme permet de filtrer les harmoniques à 2ω0 et 3ω0, tout en minimisant l'impact des vibrations.
2. Dans le cas de la question 5, les coefficients de réflexion permettent d'avoir un contraste m=1 pour une source monochromatique. Le bruit de photon vaut $\boldsymbol{\sigma_\varphi} = \sqrt{\frac{2}{N}}.\frac{1}{mI_0}\sqrt{I_0} = \sqrt{\frac{2}{1000N}} = \frac{1}{\sqrt{500N}}$, ce qui correspond à un bruit sur la différence de marche de $\delta = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{500N}}$. On veut δ< 1 nm rms => $N > \left(\frac{\lambda}{2\pi\delta}\right)^2\frac{1}{500}$=12,6. Il faut un algorithme à 13 images pour descendre sous 1 nm rms de bruit.