

LDD1 MPSI



Systèmes oscillants

Patrice Hello

version du 25/03/2024

Table des matières

1	Oscillateur harmonique idéal	1
1.1	Oscillateur harmonique en mécanique	1
1.1.1	Petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable	1
1.1.2	Exemples d'oscillateurs harmoniques mécaniques	3
1.2	Circuit LC : circuit résonnant en électricité	5
1.2.1	Capacités et inductances	5
1.2.2	Circuit LC libre	6
1.2.3	Circuit LC alimenté en continu	6
1.2.4	Considérations énergétiques. Intégrale première.	7
1.3	Résolution générale	8
1.3.1	Rappels	8
1.3.2	Résolution	8
1.3.3	Portrait de phase (mécanique uniquement)	9
1.3.4	Aspect énergétique	11
2	Oscillations libres d'un oscillateur amorti	12
2.1	Mise en équation	12
2.1.1	En mécanique	12
2.1.2	En électrocinétique	12
2.1.3	Equation homogène générale	13
2.2	Les différents régimes transitoires	13
2.2.1	Généralités	13
2.2.2	Régime pseudo-périodique	13
2.2.3	Régime aperiodique	15
2.2.4	Régime critique	15
2.3	Facteur de qualité	16
3	Oscillations entretenues	18
3.1	Généralités	18
3.1.1	Position du problème	18
3.1.2	Passage en complexe	19
3.2	Résonance d'amplitude ou de tension	19
3.2.1	Fonction de transfert	19
3.2.2	Amplitude d'oscillations. Condition de résonance	20
3.2.3	Bande passante	21
3.2.4	Phase	22
3.3	Résonance de vitesse ou d'intensité	23
3.3.1	Fonction de transfert	23
3.3.2	Résonance de vitesse/d'intensité	24
3.3.3	Bande passante	24
3.3.4	Phase	25
3.4	Bilan	28

4	Oscillateurs couplés	29
4.1	Etude d'un exemple simple	29
4.1.1	Position du problème	29
4.1.2	Résolution : notion de modes propres, de pulsations propres	30
4.1.3	Détermination des pulsations propres : autre méthode	32
4.1.4	Couplage faible : phénomène de battements	32
4.1.5	Oscillateurs amortis couplés	34
4.2	Oscillateurs couplés forcés	35
4.2.1	Deux oscillateurs idéaux couplés, résonances d'amplitude	35
4.2.2	Effet de la dissipation	37
5	Autres types d'oscillations	41
5.1	Oscillations pendulaires : au delà de l'approximation des petites oscillations	41
5.1.1	Pendule simple, rappels	41
5.1.2	Intégrale première du mouvement et séparation des variables	41
5.1.3	Formule de Borda	42
5.2	Anharmonicités	43
5.2.1	Premier terme au delà de l'ordre harmonique	43
5.2.2	Traitement en perturbation	43
5.2.3	Génération d'harmoniques	44
5.2.4	Ordre suivant	44
5.2.5	Généralisation	45
5.3	Oscillations de relaxation	45
5.3.1	Définition	45
5.3.2	Oscillateur de Van Der Pol	45
5.3.3	Montage avec une lampe au néon	46
	Annexes	48
A	Equivalence mécanique / électricité.	48

1 Oscillateur harmonique idéal

Dans cette partie d'introduction on va traiter le cas de l'oscillateur harmonique (OH) idéal, c'est-à-dire sans frottement, et libre, tel qu'il apparaît dans des problèmes élémentaires de mécanique ou d'électrocinétique.

1.1 Oscillateur harmonique en mécanique

Les oscillateurs harmoniques sont fréquents en mécanique. On les rencontre dès que la force à l'origine du mouvement est une "force de rappel", comme pour les ressort ou les oscillations des pendules par exemple. De façon très générale on les rencontre dès qu'on s'intéresse aux petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable. Dans tout la suite on ne considèrera que des problèmes à un degré de liberté (mais sans vraiment perte de généralité).

1.1.1 Petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable

On considère une masse ponctuelle m astreinte à se déplacer sur l'axe Ox . Sa position est repérée par l'abscisse $x(t)$. Le référentiel du laboratoire est supposé galiléen (ce sera le cas dans tout la suite et on ne le mentionnera plus). On suppose que la force (ou la résultante des forces) qui s'exerce sur notre système est conservative, elle dérive d'une certaine énergie potentielle $E_p(x)$. On suppose de plus que cette énergie potentielle présente un minimum en une certaine position x_0 (voir la figure 1). On rappelle que ce minimum correspond alors à une position d'équilibre stable.

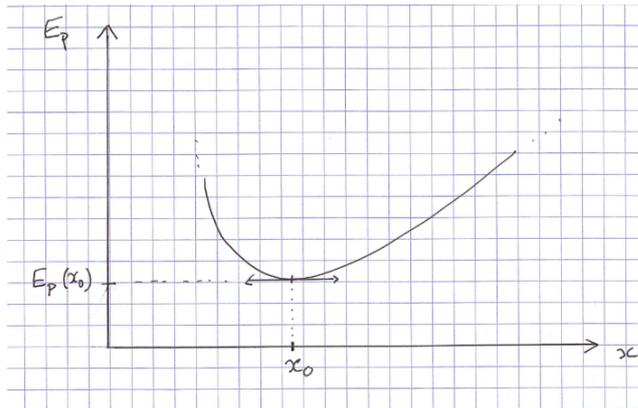


FIGURE 1 – Energie potentielle en fonction de x . Le minimum en x_0 indique une position d'équilibre stable.

On peut alors écrire le développement de Taylor au second ordre de $E_p(x)$ au voisinage de x_0 :

$$E_p(x) \simeq E_p(x_0) + E_p'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}E_p''(x_0)(x - x_0)^2, \quad (1)$$

avec $E_p'(x_0) = 0$ (condition d'extremum) et $E_p''(x_0) > 0$ (l'extremum est un minimum). On peut donc approximer l'énergie potentielle au voisinage du minimum par un profil parabolique (voir figure 2) :

$$E_p(x) \simeq E_p(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2, \quad (2)$$

où on a posé la raideur du ressort équivalent $k = E_p''(x_0)$. Notons qu'on peut en toute généralité changer l'origine de l'axe Ox en x_0 et changer l'origine des énergies en $E_p(x_0)$ de façon à obtenir plus simplement :

$$E_p(x) \simeq \frac{1}{2}kx^2, \quad (3)$$

où l'on reconnaît l'énergie potentielle "standard" d'un OH.

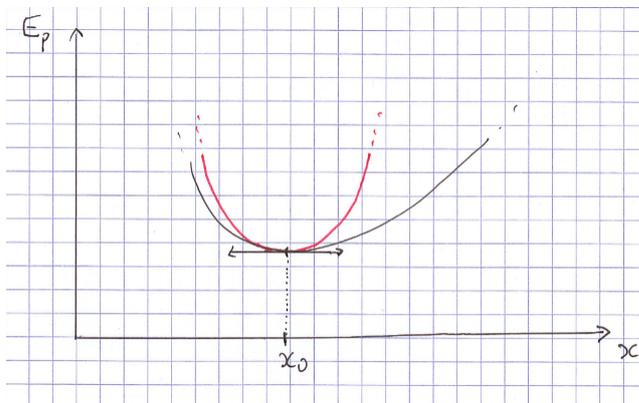


FIGURE 2 – Approximation parabolique (en rouge) de l'énergie potentielle au voisinage de son minimum.

Une fois posée l'approximation de l'énergie potentielle au voisinage de son minimum, on peut obtenir l'équation du mouvement (les fameux petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable) de deux façons équivalentes. La première méthode consiste à écrire le PFD avec la force qui dérive de l'approximation de l'énergie potentielle (équation2) :

$$f(x) = -\frac{dE_p}{dx} \simeq -k(x - x_0). \quad (4)$$

On note que l'approximation de la force redonne, comme attendu, la loi de Hooke établissant la force de rappel pour un ressort. Le PFD en projection sur l'axe Ox donne alors :

$$m\ddot{x} = f(x) \simeq -k(x - x_0). \quad (5)$$

Encore une fois, on peut faire un changement d'origine de l'axe Ox (ou un changement de variable dans l'équation différentielle) de. On peut donc toujours se ramener à :

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (6)$$

soit encore, en posant $\omega_0^2 = k/m$:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (7)$$

C'est l'équation fondamentale d'un OH idéal. La quantité ω_0 est homogène à une pulsation et on l'appellera pulsation propre ou pulsation naturelle de l'OH.

On peut aussi déduire l'équation de l'OH de la conservation de l'énergie totale E qui à tout instant est somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle (intégrale première du mouvement). On écrit donc

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2. \quad (8)$$

On dérive terme à terme par rapport au temps et on obtient :

$$0 = m\dot{x}\ddot{x} + k(x - x_0)\dot{x}, \quad (9)$$

et on retrouve l'équation 5.

1.1.2 Exemples d'oscillateurs harmoniques mécaniques

Exemple 1 : masse reliée à un ressort sur un axe horizontal.

On considère une masse se déplaçant sans frottement sur l'axe Ox (axe horizontal) et accroché à un ressort lui aussi horizontal. Un certain système (tige horizontale ou autre) permet à la masse de ne se déplacer que sur Ox (voir figure 3). La masse est soumise à trois forces, le poids \vec{P} , la réaction

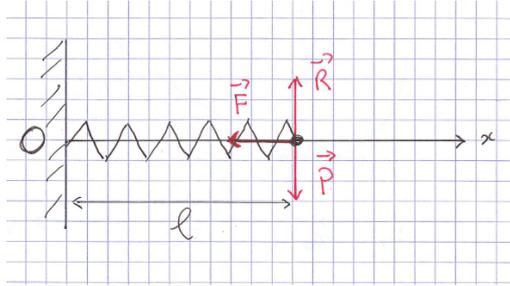


FIGURE 3 – Masse accrochée à un ressort vertical.

du support \vec{R} qui permet à la masse de rester sur l'axe Ox et la force de rappel du ressort (loi de Hooke), $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_x$ où k est le coefficient de raideur du ressort, l_0 sa longueur à vide et \vec{u}_x le vecteur unitaire orientant l'axe Ox. Comme on suppose qu'il n'y a pas de frottement, la réaction \vec{R} est vertical comme le poids. Le PFD en projection sur la vertical nous donne $R = P$ et en projection sur Ox :

$$m\ddot{x} = -k(l - l_0), \quad (10)$$

et, moyennant un changement de variable immédiat, on arrive à l'équation d'un OH,

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (11)$$

Exemple 2 : masse suspendue à un ressort.

On considère une masse suspendue à un ressort. L'axe vertical Ox est orienté vers le bas (voir figure 4). On suppose encore qu'il n'y a pas de frottement. La masse est soumise à deux forces, le poids \vec{P} et la force de rappel du ressort (loi de Hooke), $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_x$ où k est le coefficient de raideur du ressort, l_0 sa longueur à vide et \vec{u}_x . A l'équilibre, nous avons $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$, ce qui se traduit par

$$mg - k(l_e - l_0) = 0, \quad (12)$$

où g est l'accélération de la pesanteur et l_e la longueur du ressort à l'équilibre. On écarte ensuite la masse de sa position d'équilibre et note x l'écart à la position d'équilibre, $x = l - l_e$ (ce qui revient à prendre cette position d'équilibre comme nouvelle origine de l'axe Ox). Le PFD en projection sur l'axe Ox donne alors :

$$m\ddot{x} = mg - k(l - l_0) = mg - k(l_e + x - l_0), \quad (13)$$

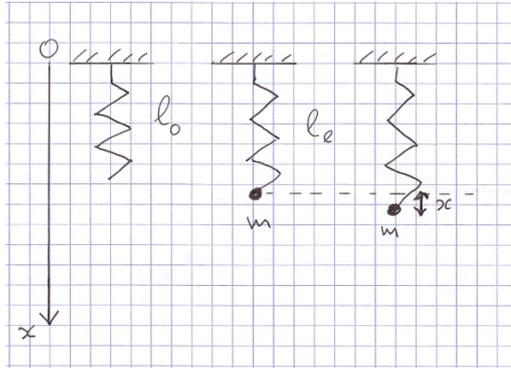


FIGURE 4 – Masse accrochée à un ressort vertical. L'axe Ox est choisi orienté vers le bas.

et en utilisation la condition d'équilibre (équation 12) pour simplifier l'équation précédente on obtient

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (14)$$

Notons que l'on ne peut obtenir l'équation d'OH sans passer par l'étape préliminaire (et donc obligatoire) de la condition d'équilibre.

Exemple 3 : le pendule simple.

On considère une masse ponctuelle m suspendue à un fil de masse négligeable et de longueur L . Le mouvement est repéré par l'angle θ que fait le fil avec la verticale comme indiqué sur la figure 5. Le mouvement de la masse suspendue est circulaire (cercle centre O et rayon L). En coordonnées

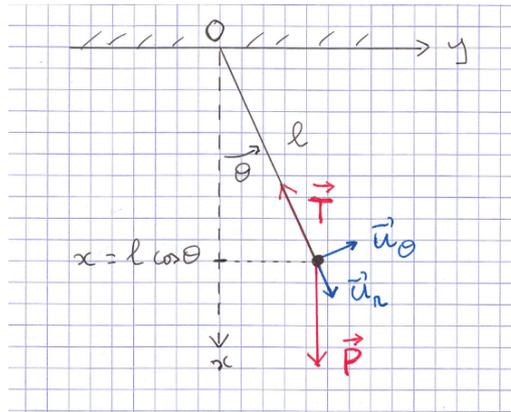


FIGURE 5 – Pendule simple.

polaires, sa vitesse est orthoradiale, $\vec{v} = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta$. Les deux forces en jeu sont le poids \vec{P} et la tension du fil \vec{T} . Cette dernière ne travaille pas, étant toujours orthogonale à la trajectoire donc à \vec{v} et le poids lui dérive de l'énergie potentielle $E_p = -mgx$ (à une constante près qui ne joue aucun rôle). On peut ainsi déduire l'équation du mouvement du théorème de l'énergie cinétique (ou de l'énergie totale E qui est conservée) en écrivant l'intégrale première du mouvement :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mgx, \quad (15)$$

soit, avec l'expression de la vitesse et $x = L \cos \theta$:

$$E = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL \cos \theta, \quad (16)$$

et en dérivant terme à terme par rapport au temps il vient :

$$0 = mL^2\ddot{\theta} + mgL \sin \theta, \quad (17)$$

soit

$$L\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0 \quad (18)$$

ou encore

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0, \quad (19)$$

où la pulsation naturelle de l'oscillateur s'écrit ici $\omega_0 = \sqrt{g/L}$. On note que la masse m a disparu (le principe d'équivalence est à l'oeuvre!). L'équation 19 n'est cependant pas une équation d'OH. Il faut procéder à une approximation supplémentaire, approximation des petites oscillations, c'est-à-dire supposer que $\theta \ll 1$ de façon à ce que $\sin \theta \simeq \theta$. L'équation 19 devient alors

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad (20)$$

qui du coup est bien une équation de type OH.

Une autre façon d'obtenir l'équation d'OH est de passer par le théorème du moment cinétique. Le moment de \vec{T} par rapport à O est nul (force centrale) et le théorème donne simplement :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{P}. \quad (21)$$

On a, en polaires, $\vec{OM} = L\vec{u}_r$ et $\vec{P} = mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta$. Le moment cinétique par rapport à O est $\vec{L}_0 = m\vec{OM} \wedge \vec{v} = mL^2\dot{\theta}\vec{u}_z$. On obtient ainsi

$$mL^2\ddot{\theta}\vec{u}_z = -mgL \sin \theta \vec{u}_z, \quad (22)$$

qui redonne l'équation 19 après projection sur l'axe OZ.

1.2 Circuit LC : circuit résonnant en électricité

1.2.1 Capacités et inductances

Rappelons d'abord quelles sont les tensions aux bornes d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L . Avec les notations et les conventions de la figure 6 nous avons :

$$u_C = \frac{q}{C} \text{ avec } i = \frac{dq}{dt} \quad (23)$$

et

$$u_L = L \frac{di}{dt}. \quad (24)$$

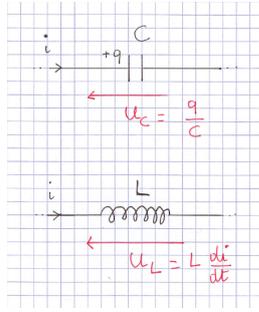


FIGURE 6 – Capacités et inductances. Notations et conventions.

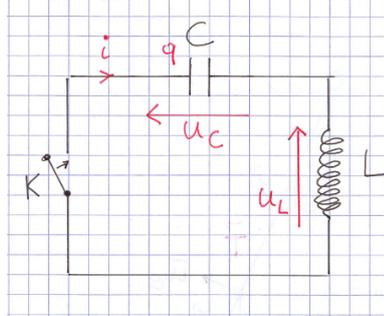


FIGURE 7 – Maille LC.

1.2.2 Circuit LC libre

Considérons maintenant la maille LC telle que représentée sur la figure 7. La capacité est initialement chargée et à $t = 0$ on ferme l'interrupteur K .

La loi des mailles se traduit ici par $u_L + u_C = 0$, c'est à dire :

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (25)$$

Comme $i = dq/dt$, on aboutit à l'équation différentielle pour la charge q :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0, \quad (26)$$

et, en divisant par L et en posant $\omega_0^2 = 1/LC$, on obtient finalement une équation de type OH :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \quad (27)$$

De façon similaire à l'OH mécanique, ω_0 sera appelée pulsation propre ou pulsation naturelle du circuit.

1.2.3 Circuit LC alimenté en continu

Considérons maintenant une maille LC alimentée en continu (voir la figure 8). La loi des mailles conduit à :

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = U_0. \quad (28)$$

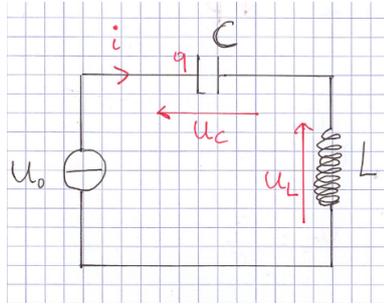


FIGURE 8 – Maille LC.

Il y a désormais un second membre (constant). On résout cette équation différentielle en cherchant la solution générale de l'équation homogène, qui elle est une équation d'OH idéal, et en lui ajoutant une solution particulière de l'équation complète (avec second membre). On peut aussi directement obtenir une équation d'OH en dérivant l'équation 28 pour l'intensité du courant cette fois ci :

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0. \quad (29)$$

La pulsation naturelle qui apparaît alors est la même que précédemment, $\omega_0 = 1/LC$.

1.2.4 Considérations énergétiques. Intégrale première.

On rappelle que les énergies stockées par un condensateur de capacité C et portant la charge q sur une de ses armatures et par une bobine d'inductance L et traversée par le courant i sont respectivement

$$E_C = \frac{q^2}{2C} \text{ et } E_L = \frac{1}{2} L i^2. \quad (30)$$

équivalents des énergies potentielles et cinétiques pour un oscillateur mécanique. Pour un circuit LC sans source d'amortissement (sans résistance), l'énergie totale

$$E = E_C + E_L \quad (31)$$

est conservée comme l'énergie totale pour un système sans frottement en mécanique. Encore une fois comme en mécanique (l'analogie est totale),

$$E = \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2} L i^2 \quad (32)$$

fournir une intégrale première que l'on peut dériver par rapport au temps pour retrouver l'équation caractéristique d'un OH. En effet, dérivant l'équation 32 terme à terme, on obtient :

$$0 = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + L i \frac{di}{dt} \quad (33)$$

et avec $i = dq/dt$, on retrouve bien l'équation attendue, à savoir

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0. \quad (34)$$

1.3 Résolution générale

1.3.1 Rappels

Nous avons rencontré plusieurs exemples d'OH, que ce soit en mécanique ou en électrocinétique. La structure de l'équation différentielle est toujours la même et peut se mettre sous la forme générique

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (35)$$

avec x la variable pertinente (position, charge électrique, angle...) et ω_0 la pulsation naturelle du problème considéré, dépendant des paramètres en jeu. C'est donc cette équation dont il faut connaître (par coeur) la solution générale.

1.3.2 Résolution

La solution de l'équation 35 peut s'écrire sous différentes formes, toutes équivalentes bien entendu. La forme la plus compacte est par exemple :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (36)$$

avec A amplitude et φ phase de $x(t)$. On peut aussi écrire la solution comme

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) \quad (37)$$

avec a et b deux constantes réelles. On passe de l'une à l'autre de ces deux formes par les formules de trigonométrie, comme $\cos(p+q) = \cos(p)\cos(q) - \sin(p)\sin(q)$. On peut aussi écrire la solution sous forme complexe :

$$x(t) = \alpha \exp(j\omega_0 t) + \beta \exp(-j\omega_0 t) \quad (38)$$

où α et β sont deux constantes a priori complexes (de façon à ce que $x(t)$ soit bien réel au final) et on note j tel que $j^2 = -1$, ce qu'on fera dans tout la suite¹. Ce qui caractérise un OH idéal est que la solution $x(t)$ est sinusoidale et donc périodique, avec une période $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

Quelque soit la forme choisie pour écrire la solution $x(t)$, cette forme fait appel à deux constantes arbitraires (A et φ ou a et b ou α et β) ce qui est attendu pour la solution d'une équation différentielle du second ordre. On déterminera ces constantes arbitraires à l'aide des conditions initiales qui doivent donc être elles aussi au nombre de deux (position et vitesses initiales ou charge et intensité initiales selon le problème).

Par exemple, pour un problème de mécanique, on suppose la position initiale $x(t=0) = x_0$ et la vitesse initiale nulle (on écarte le système de sa position d'équilibre et on le lâche sans vitesse initiale). On prend par exemple la deuxième expression pour la solution. La vitesse s'exprime donc comme $v(t) = \dot{x}(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t) + b\omega_0 \cos(\omega_0 t)$. Les deux conditions initiales conduisent à $a = x_0$ et $b = 0$ et la solution finale est ainsi

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t), \quad (39)$$

et la vitesse est de même

$$v(t) = -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t). \quad (40)$$

On remarque, et c'est totalement général, que position et vitesse sont en quadrature.

1. On utilise ici j plutôt que i , ce qui est une notation usuelle en physique et plus particulièrement en électrocinétique, ne serait-ce que pour ne pas introduire de confusion avec l'intensité i .

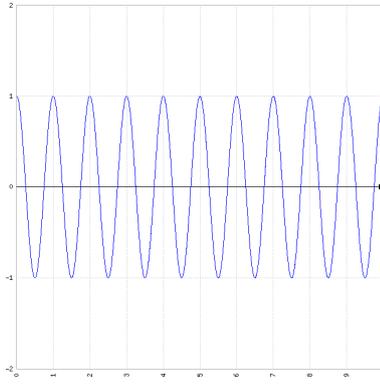


FIGURE 9 – Solution sinusoidale pour un OH idéal. Ici la période est 1 seconde.

1.3.3 Portrait de phase (mécanique uniquement)

On obtient le portrait de phase en suivant le mouvement de la particule fictive de coordonnées $(x(t), v(t))$ au cours du temps. On obtient ainsi une certaine trajectoire dans le plan (x, v) . Pour un OH idéal on obtient ce portrait de phase via la conservation de l'énergie (avec $k = m\omega_0^2$) :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2, \quad (41)$$

ce qui correspond pour les variables x et v à une ellipse, comme on peut le voir sur la figure 10. Le fait d'obtenir une trajectoire fermée est caractéristique de la conservation de l'énergie du système.

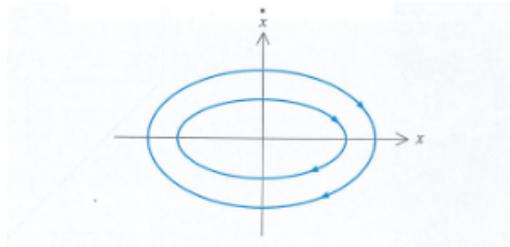


FIGURE 10 – Portraits de phase d'un OH idéal pour deux énergies différentes. L'ellipse la plus grande correspond à l'énergie la plus élevée.

On peut tout aussi bien utiliser les variables réduites x et v/ω_0 qui du coup on mêmes dimensions. On peut alors écrire

$$\frac{E}{\omega_0^2} = \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{2}mx^2, \quad (42)$$

soit encore

$$\frac{2E}{m\omega_0^2} = \left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2 + x^2, \quad (43)$$

ce qui est l'équation d'un cercle (voir la figure 11).

Si l'oscillateur n'est pas idéal (présence de frottements), le portrait de phase n'est plus une courbe fermée, l'énergie n'est plus conservée. Un exemple de portrait de phase obtenu pour un oscillateur (pas trop) amorti est donné figure 12.

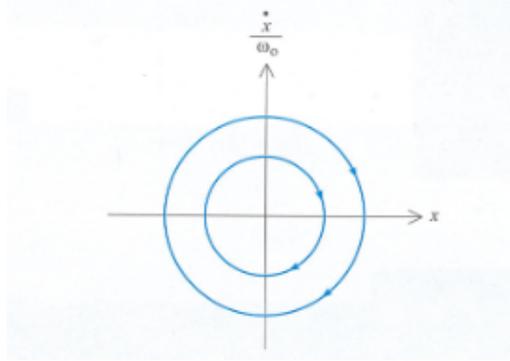


FIGURE 11 – Portraits de phase d'un OH idéal pour deux énergies différentes avec les variables réduites x et v/ω_0 .

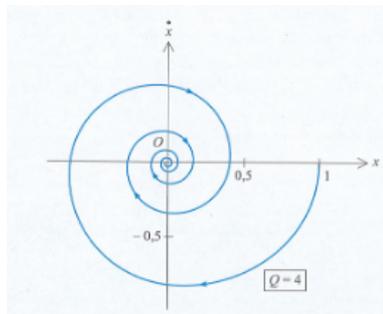


FIGURE 12 – Portrait de phase d'un oscillateur amorti. Le mouvement correspond à des oscillations amorties c'est à dire au cas régime pseudo-périodique avec ici un facteur de qualité $Q = 4$ (voir le chapitre suivant).

NB : Il y a en fait une définition plus précise (et quasi universelle) de l'espace des phases. Pour une particule astreinte à un mouvement sur l'axe des x (cas 1D), l'espace des phases est un plan défini par :

- axe des abscisses = position x
- axe des ordonnées = quantité de mouvement $p = mv$.

Pour une particule se déplaçant dans l'espace sans restriction (cas 3D), l'espace des phases est alors de dimension 6 (3 coordonnées x , y et z et 3 composantes de quantité de mouvement p_x , p_y et p_z). Par suite, pour N particules dans l'espace 3D, l'espace des phases est de dimension $6N$.

1.3.4 Aspect énergétique

Prenons l'exemple d'un OH mécanique idéal pour lequel l'énergie totale (conservée) s'écrit :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad (44)$$

Avec, en général, $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ et $v = \dot{x} = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$, on a par suite

$$E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi), \quad (45)$$

soit, comme $k = m\omega_0^2$:

$$E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2, \quad (46)$$

ce qui montre bien que l'énergie totale est constante au cours du temps. On voit donc qu'il y a échange périodique au cours du temps entre les deux formes d'énergie, cinétique et potentielle, les deux évoluant en opposition de phase (comme l'une est minimale, l'autre est maximale et vice versa). Des considérations similaires peuvent être faites avec un oscillateur électrique (maille LC), avec l'énergie stockée dans la bobine jouant le rôle de l'énergie cinétique et l'énergie stockée dans le condensateur celui de l'énergie potentielle, et donc échange périodique des énergies stockées dans les deux dipôles.

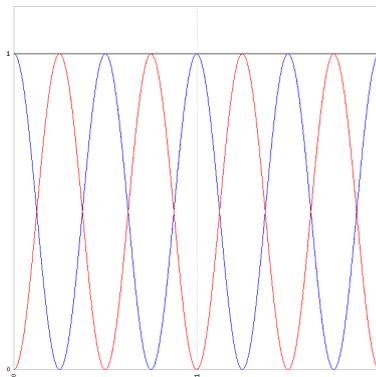


FIGURE 13 – Energie cinétique (en rouge) et énergie potentielle (en bleu) d'un OH au cours du temps. En noir la somme des deux, constante.

2 Oscillations libres d'un oscillateur amorti

En pratique il existe toujours un amortissement (des pertes), que ce soit en mécanique (présence de frottements) ou en électrocinétique (présence de résistances). En mécanique on va considérer des frottements de types visques, i.e. une force de frottement du type $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ avec une coefficient de frottement $\alpha > 0$. Ce n'est pas (et de loin) la seule forme de force de frottement possible (force proportionnelle à v^2 , frottement solide etc...) mais elle est suffisamment réaliste pour bon nombre d'applications (en plus de prolonger l'analogie avec l'électrocinétique!).

2.1 Mise en équation

2.1.1 En mécanique

On considère comme dans le chapitre 1 un système mécanique à un degré de liberté, par exemple astreint à se déplacer sur l'axe O, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Les forces pertinentes en jeu sont une force de rappel (avec un coefficient de raideur k) et une force de frottement visqueux (avec un coefficient de frottement noté α). Il peut y avoir d'autres forces en jeu mais soit leur projection sur Ox est nulle soit elles disparaissent grâce à une condition d'équilibre par exemple (comme on l'a vu au chapitre 1). Le PFD en projection sur OX donne alors

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} \quad (47)$$

soit

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0. \quad (48)$$

On obtient encore une fois une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. On peut noter que de façon générale en physique une équation homogène peut être reliée à un régime transitoire. C'est totalement le cas ici.

2.1.2 En électrocinétique

Considérons le circuit RLC série montré sur la figure 14. La loi des mailles nous donne :

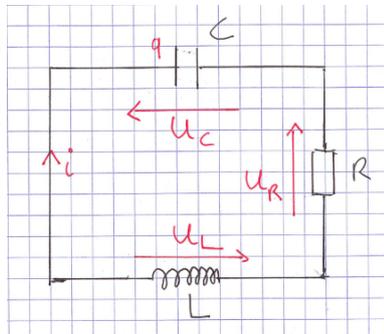


FIGURE 14 – Circuit RLC Série.

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0, \quad (49)$$

soit, comme $i = dq/dt$:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0, \quad (50)$$

équation différentielle similaire à celle de l'équation 48

2.1.3 Equation homogène générale

Dans le cas de l'oscillateur mécanique, l'équation 48 peut se réécrire

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (51)$$

où on a posé $2\lambda = \alpha/m$ et on rappelle $\omega_0^2 = k/m$. De même, l'équation 50 peut se réécrire

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (52)$$

avec $2\lambda = R/L$ et $\omega_0^2 = 1/LC$.

Que ce soit l'oscillateur mécanique ou l'oscillateur électrique, on aboutit à la même équation que l'on peut écrire avec une variable X , représentant soit la position ou un angle dans un problème de mécanique soit la charge aux bornes d'un condensateur..., et paramétrisée par un terme d'amortissement normalisé λ et par la pulsation naturelle du système ω_0 , soit

$$\ddot{X} + 2\lambda\dot{X} + \omega_0^2 X = 0. \quad (53)$$

Le facteur "2" n'est pas du tout fondamental mais est introduit plutôt pour des considérations pratiques (voire esthétiques) comme on va le voir dans la suite.

2.2 Les différents régimes transitoires

2.2.1 Généralités

L'équation 53 est une équation différentielle homogène du second à coefficients constants qui se résout en posant l'équation caractéristique correspondante :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0. \quad (54)$$

On rappelle qu'on obtient cette équation du second degré en cherchant les solutions de (53) sous la forme $\exp(rt)$ avec r inconnue. Le discriminant s'écrit alors :

$$\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2), \quad (55)$$

et on obtiendra des racines réelles ou complexes selon le signe de Δ et une racine double réelle si $\Delta = 0$. Selon la valeur de Δ on obtiendra donc différentes formes de solutions que l'on va détailler.

2.2.2 Régime pseudo-périodique

On se place dans le cas où $\Delta < 0$, c'est à dire $\lambda < \omega_0$, donc le cas d'un amortissement "faible". Les deux solutions de l'équation caractéristique sont donc les deux complexes conjuguées $r_{\pm} = -\lambda \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$. On peut poser

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}; \quad (56)$$

cette quantité s'appelle "pseudo-pulsation" et par suite $T = 2\pi/\Omega$ est la pseudo-période². La solution de l'équation (53) est donc superposition des deux exponentielles complexes $\exp(r_+t)$ et $\exp(r_-t)$,

2. "pseudo" car le mouvement résultant n'est plus périodique stricto sensu et on ne peut définir une pulsation ou une période rigoureusement que pour une fonction périodique.

soit, après factorisation,

$$X(t) = \exp(-\lambda t) \left[a \exp(j\Omega t) + b \exp(-j\Omega t) \right], \quad (57)$$

où a et b sont deux constantes arbitraires a priori complexes ($X(t)$ est une fonction réelle) à déterminer avec les conditions initiales. On peut ré-écrire la solution sous la forme équivalente

$$X(t) = \exp(-\lambda t) \left[a' \cos(\Omega t) + b' \sin(\Omega t) \right], \quad (58)$$

où du coup a' et b' sont deux constantes arbitraires réelles, ou encore sous la forme plus compacte

$$X(t) = A \exp(-\lambda t) \cos(\Omega t + \varphi), \quad (59)$$

où les deux constantes arbitraires (réelles) sont l'amplitude A et la phase φ . On peut poser $\tau = 1/\lambda$, temps caractéristique d'amortissement³. Au bout de quelques τ (certains auteurs disent "5 τ ") on atteint en pratique $X(t) \simeq 0$. Le rapport τ/T qui est de l'ordre de ω_0/λ donne l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations avant retour à zéro.

Comme illustration on peut choisir un système mécanique initialement au repos et auquel on donne une impulsion à $t = 0$. Les conditions initiales sont donc $X(t = 0) = 0$ et $\dot{X}(t = 0) = V_0$. On trouve rapidement que la solution explicite s'écrit alors

$$X(t) = \frac{V_0}{\Omega} \exp(-\lambda t) \sin(\Omega t). \quad (60)$$

Cette solution est représentée sur la figure 15 avec un rapport $\tau/T \sim 10$.

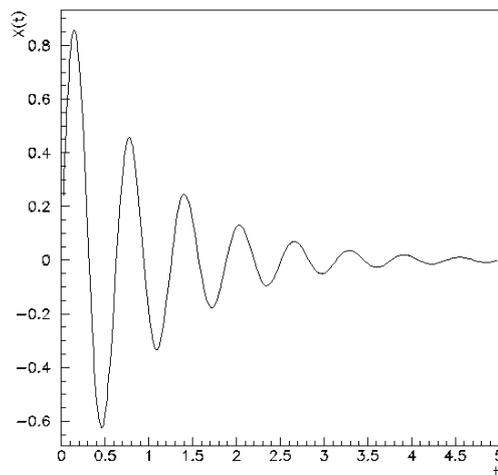


FIGURE 15 – Exemple de régime pseudo-périodique (oscillations amorties).

3. Certains auteurs définissent $\tau = 1/2\lambda$ (définition liée à l'amortissement énergétique) mais cela n'a pas vraiment d'importance.

2.2.3 Régime apériodique

Regardons maintenant le cas où $\Delta > 0$, c'est à dire $\lambda > \omega_0$, donc le cas d'un amortissement "fort". Les deux solutions de l'équation caractéristique sont donc les deux réels $r'_\pm = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ et la solution de l'équation (53) est donc superposition des deux exponentielles réelles $\exp(r'_+ t)$ et $\exp(r'_- t)$, soit,

$$X(t) = \exp(-\lambda t) \left[A \exp\left(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t\right) + B \exp\left(-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t\right) \right], \quad (61)$$

où A et B sont deux constantes (réelles) à déterminer avec les conditions initiales. On note bien que $X(t)$ tend vers 0 quand t devient grand, comme attendu.

On illustre ce type de solution avec les mêmes conditions initiales que pour le régime pseudo-périodique, $X(t=0) = 0$ et $\dot{X}(t=0) = V_0$, et on trouve

$$X(t) = \frac{V_0}{2\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} \exp(-\lambda t) \left[\exp\left(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t\right) - \exp\left(-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t\right) \right], \quad (62)$$

soit encore

$$X(t) = \frac{V_0}{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} \exp(-\lambda t) \sinh\left(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t\right). \quad (63)$$

On retrouve en gros la solution pseudo-périodique en remplaçant \sinh par \sin ! La solution apériodique $X(t)$ est représentée sur la figure 16.

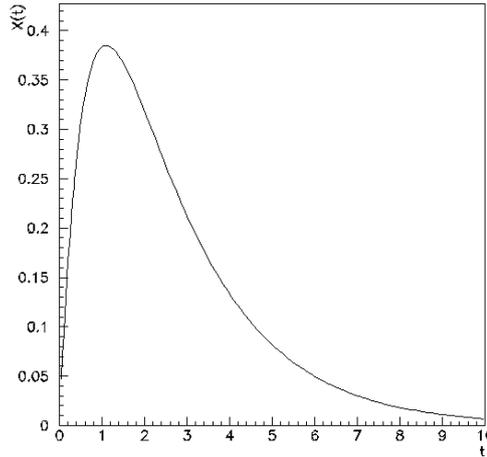


FIGURE 16 – Exemple de régime apériodique.

2.2.4 Régime critique

Enfin dans le cas où $\Delta = 0$ (régime critique), c'est à dire $\lambda = \omega_0$, la solution de l'équation (53) s'écrit

$$X(t) = \exp(-\lambda t) (ct + d), \quad (64)$$

avec c et d deux constantes réelles à déterminer avec les conditions initiales. Toujours avec le même jeu, $X(t=0) = 0$ et $\dot{X}(t=0) = V_0$, on obtient

$$X(t) = \exp(-\lambda t)V_0t. \tag{65}$$

La solution critique $X(t)$ est représentée sur la figure 17.

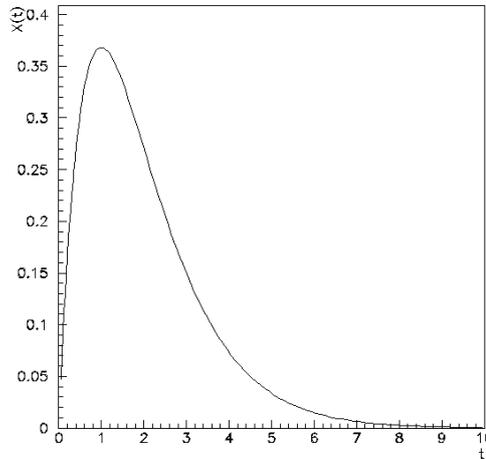


FIGURE 17 – Exemple de régime critique.

Les figures 15, 16 et 17 ont été tracées avec le même facteur d’amortissement λ et on remarque que c’est le régime critique qui permet de revenir le plus rapidement à zéro. C’est totalement général et on peut s’en convaincre rapidement en comparant les formes asymptotiques des trois types de solution quand t tend vers l’infini. Le régime critique assure un retour à la position d’équilibre le plus rapide et cette propriété trouve des applications dans la vie de tous les jours (amortisseurs des véhicules par exemple qui doivent assurer un retour à l’état de confort après un cahot sur la route le plus rapide possible⁴).

2.3 Facteur de qualité

On peut introduire la notion de facteur de qualité de plusieurs façons différentes. On a choisi ici de l’introduire via des considérations énergétiques. Notons d’abord que cette notion est plutôt réservée au régime pseudo-périodique (“qualité” des oscillations). Prenons le point de vue mécanique, sans perte de généralité, le point de vue électrique étant totalement équivalent. On a donc dans ce cas, pour l’énergie mécanique totale :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2, \tag{66}$$

avec, dans le cas du régime pseudo-périodique, $x(t) = A \exp(-\lambda t) \cos(\Omega t + \varphi)$, $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$, $k = m\omega_0^2$ et $2\lambda = \alpha/m$. On a alors

$$\dot{x}(t) = -\lambda A \exp(-\lambda t) \cos(\Omega t + \varphi) - \Omega A \exp(-\lambda t) \sin(\Omega t + \varphi), \tag{67}$$

4. Rien de plus terrible qu’un amortisseur défectueux qui se retrouve à fonctionner dans un régime pseudo-périodique !

et si l'amortissement est faible ($\lambda \ll \omega$), alors $\Omega \simeq \omega_0$ au premier ordre et on peut négliger le terme en cosinus dans la vitesse si bien que

$$E \simeq \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \exp(-2\lambda t) \sin^2(\Omega t + \varphi) + \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \exp(-2\lambda t) \cos^2(\Omega t + \varphi) = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \exp(-2\lambda t). \quad (68)$$

On remarque qu'on retrouve l'énergie d'un OH idéal non amorti multiplié par le terme d'amortissement en énergie $\exp(-2\lambda t)$. On note aussi que le temps caractéristique d'amortissement de l'énergie est deux fois plus petit que celui de l'amplitude (et oui il y a un carré!). Si maintenant on différencie l'expression de E , on obtient

$$dE = -2\lambda E dt. \quad (69)$$

Si de plus on suppose une évolution lente (ce qui est correct dans le cas $\lambda \ll \omega$) alors sur une période $T \simeq 2\pi/\omega_0$ la diminution relative d'énergie est

$$\frac{\Delta E}{E} = -2\lambda T. \quad (70)$$

On peut alors définir le facteur de qualité Q (sans dimension) comme le rapport entre l'énergie et la perte d'énergie sur une période (en valeur absolue) fois 2π , soit

$$Q = 2\pi \left| \frac{E}{\Delta E} \right|. \quad (71)$$

On obtient alors $Q = 2\pi/2\lambda T$ soit

$$Q \simeq \frac{\omega_0}{2\lambda}. \quad (72)$$

L'équation différentielle 53 standard de l'OH amorti se réécrit ainsi en fonction de Q et ω_0 :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = 0. \quad (73)$$

Le discriminant de l'équation caractéristique est alors, en fonction de Q

$$\Delta = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right), \quad (74)$$

ce qui fait apparaître clairement la valeur critique du facteur de qualité, $Q_c = 1/2$. Ainsi $Q < 1/2$ ($\Delta > 0$), on est dans le cas du régime apériodique, si $Q = 1/2 = Q_c$ ($\Delta = 0$) dans le cas du régime critique et si $Q > 1/2$ ($\Delta < 0$) dans le cas du régime pseudo-périodique. Dans ce dernier cas, la pseudo-pulsation se réécrit

$$\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}. \quad (75)$$

3 Oscillations entretenues

3.1 Généralités

3.1.1 Position du problème

On va reprendre l'oscillateur amorti du chapitre précédent (mécanique ou électrique, on a bien compris maintenant que c'est pareil!) et on va rajouter un terme d'entretien, une excitation permanente (une force ou une tension) dépendante du temps. On va en fait se concentrer sur une excitation de type sinusoidale à une certaine pulsation ω et étudier la réponse du système à cette excitation spécifique. Seule la solution du régime permanent nous intéresse car, comme on l'a vu dans le chapitre précédent, le régime transitoire s'atténue très vite⁵. Cette excitation sinusoidale peut aussi être comprise comme la composante à la pulsation ω d'une excitation à la dépendance temporelle plus complexe (principe de la décomposition de Fourier). On va donc s'intéresser à la résolution d'une équation du type :

$$\ddot{X} + 2\lambda\dot{X} + \omega_0^2 X = \ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \mathcal{E}(t) \quad (76)$$

'selon que l'on paramétrise l'amortissement avec λ ou avec Q) où X est notre amplitude (mécanique ou électrique) habituelle et \mathcal{E} l'excitation généralisée (typiquement force divisée par m dans le cas mécanique ou tension d'un générateur BF divisée par L dans le cas électrique). On choisit donc une excitation sinusoidale s'écrivant comme

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (77)$$

Ce choix, au passage, fixe l'origine des phases. Quand le second membre d'une équation différentielle est relativement simple, on cherche d'abord une solution particulière de la même forme et il est donc naturel de chercher le régime permanent sous la forme

$$X(t) = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (78)$$

c'est à dire une solution sinusoidale à la même pulsation que l'excitation et éventuellement déphasée. Notons que la phase φ s'interprète comme le déphasage entre la réponse X du système et l'excitation \mathcal{E} . A ω fixé, il faut donc trouver l'amplitude A et la phase φ de la solution X . Notons bien qu'a priori A et φ sont des fonctions de ω : $A(\omega)$ et $\varphi(\omega)$.

Pour les férus d'électrocinétique et de systèmes linéaires, tout ce que l'on fait dans ce chapitre n'est en fait qu'un cas particulier d'un problème plus général, c'est à dire l'établissement de la fonction de transfert entre une excitation extérieure sinusoidale et la réponse d'un système linéaire, cette fonction de transfert H étant définie comme le rapport entre la réponse $X(t)$ et l'excitation $F(t)$ (pour une force) ou $U(t)$ pour une tension,

$$H = X/F \text{ ou } H = X/U. \quad (79)$$

On va rencontrer de telles "fonctions de transfert" naturellement dans les parties suivantes du chapitre.

5. on se rappelle que la solution générale d'une équation différentielle linéaire avec second membre est superposition de la solution de l'équation homogène (régime transitoire) et d'une solution particulière de l'équation avec second membre (régime permanent).

3.1.2 Passage en complexe

L'intérêt énorme de la méthode du passage en complexe est de transformer une équation différentielle linéaire (n'importe quel ordre) en simple équation scalaire en faisant disparaître le temps.⁶ On voit bien que si l'on injecte $X(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ dans

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = \mathcal{E}_0 \cos \omega t, \quad (80)$$

on est très vite "coincé" pour trouver A et φ , et que l'on va se "décoincer" naturellement en passant en complexe.

La quantité réelle $X(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ (par exemple) va ainsi être représentée par le complexe

$$\underline{X} = A \exp(j\varphi), \quad (81)$$

où $j^2 = -1$ (notation de l'électrocinétique où le symbole "i" est réservé pour l'intensité). A est ainsi le module du complexe \underline{X} et φ son argument (ou sa phase). Le retour à la variable variable se fait en "recollant" le terme de phase temporelle $\exp(j\omega t)$ puis en prenant la partie réelle qui redonne bien le cosinus du début :

$$X(t) = \text{Re}(\underline{X} \exp(j\omega t)) = \text{Re}(A \exp(j\varphi) \exp(j\omega t)) = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (82)$$

De même la dérivée de $X(t)$ s'écrit $\dot{X} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) = A\omega \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$ et est donc représentée par le complexe $A\omega \exp(j[\varphi + \pi/2])$ c'est à dire $j\omega A \exp(j\varphi)$ qui n'est rien d'autre que $j\omega \underline{X}$. C'est tout bêtement dû au fait que la dérivée de $\exp(j\omega t)$ est $j\omega \exp(j\omega t)$! Un raccourci est ainsi de dire que la dérivée par rapport au temps (dans le monde réel) est équivalente à la multiplication par $j\omega$ (dans le monde complexe). En poursuivant dans la même veine, on voit sans mal que la dérivée seconde \ddot{X} sera représentée par le complexe $-\omega^2 \underline{X}$. La table suivante récapitule tous ces résultats élémentaires.

amplitude réelle	amplitude complexe
$X = A \cos(\omega t + \varphi)$	$\underline{X} = A \exp(j\varphi)$
\dot{X}	$j\omega \underline{X}$
\ddot{X}	$-\omega^2 \underline{X}$
$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$	\mathcal{E}_0

3.2 Résonance d'amplitude ou de tension

3.2.1 Fonction de transfert

Repartons donc de l'équation 80 :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = \mathcal{E}_0 \cos \omega t.$$

Comme indiqué par la méthode du passage en complexe, on élimine le temps soit en injectant $\underline{X} \exp(j\omega t)$ dans cette équation soit en transformant directement les quantités réelles de la table précédente par leurs représentations complexes. Dans tous les cas, on a (en particulier parce que $\exp(j\omega t)$ se factorise partout et donc peut se simplifier) :

$$-\omega^2 \underline{X} + j \frac{\omega_0 \omega}{Q} \underline{X} + \omega_0^2 \underline{X} = \mathcal{E}_0 \quad (83)$$

6. On pourra se référer au cours et au poly d'Outils et Méthodes pour la Physique du S1.

Il n'y a effectivement plus de temps, on a transformé l'équation différentielle linéaire initiale en équation du premier degré en \underline{X} (et même dans \mathbb{C} c'est du gâteau à résoudre!).

En factorisant, il vient de suite :

$$\underline{X}(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0\omega}{Q}}, \quad (84)$$

où on marque bien le fait que \underline{X} dépend de ω . On fait ainsi apparaître la fonction de transfert (complexe) entre l'excitation et la réponse. Comme l'amplitude de l'excitation est elle-même constante (indépendante de ω), étudier la fonction de transfert est équivalent à étudier directement $\underline{X}(\omega)$ (facteur constant entre les 2). Notons qu'on peut utiliser la variable réduite sans dimension $x = \omega/\omega_0$ (c'est ce qu'on a fait dans toutes les figures qui suivent) et étudier $\underline{X}(x)$. En factorisant, il vient de suite :

$$\underline{X}(x) = \frac{\mathcal{E}_0}{1 - x^2 + jx/Q}. \quad (85)$$

Pour étudier la fonction complexe $\underline{X}(\omega)$ on va donc étudier successivement son module $A(\omega) = |\underline{X}(\omega)|$ et sa phase $\varphi(\omega) = \arg(\underline{X}(\omega))$.

3.2.2 Amplitude d'oscillations. Condition de résonance

On calcul donc l'amplitude $A(\omega)$ on prenant le module de 84 :

$$A(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^2\omega^2}{Q^2}}}. \quad (86)$$

Il nous faut donc étudier le comportement de A en fonction de ω . On voit de suite que quand $\omega \rightarrow 0$, A tend vers une valeur finie, $A(0) = \mathcal{E}_0/\omega_0^2$ et que quand $\omega \rightarrow \infty$, $A \rightarrow 0$. Entre les deux, la question se pose donc de savoir si A passe un maximum ou pas. Il est évidemment hors de question de dériver A pour trouver si il y a un ou des extrema! On va être plus astucieux en remarquant qu'un maximum de A doit correspondre à un minimum de $1/A^2$ qui est un simple polynôme en ω donc aisément dérivable. Posons $f(\omega) = 1/A^2$:

$$f(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^2\omega^2}{Q^2}. \quad (87)$$

La dérivée de f donne donc :

$$\frac{df}{d\omega} = 2\omega \left[2(\omega^2 - \omega_0^2) + \frac{\omega_0^2}{Q^2} \right]. \quad (88)$$

On trouve au plus 2 racines (positives) : $\omega = 0$, qui indique une tangente horizontale en 0, et

$$\omega_m = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}, \quad (89)$$

qui n'existe évidemment que si $Q > 1/\sqrt{2}$. Cette dernière condition, condition d'existence d'un maximum de $A(\omega)$, est une condition de résonance. Cette résonance n'existe donc que si le facteur de qualité dépasse un certain seuil, $Q > 1/\sqrt{2}$; on note alors que la position de cette résonance, si elle existe, est systématiquement inférieure à la pulsation naturelle ω_0 , $\omega_m < \omega_0$, et s'en rapproche si Q devient élevé (et l'égalise seulement dans le cas idéal sans perte $Q = \infty$).

Si la résonance existe, la valeur du maximum est $A_m = A(\omega_m)$ et en remplaçant dans l'expression de A , on trouve facilement :

$$A_m = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}} A(0). \quad (90)$$

Le rapport entre la valeur à résonance et la valeur à l'origine ne dépend que de Q . Si $Q \rightarrow 1/\sqrt{2}$, ce rapport tend vers 1 (comme attendu, il n'y a plus de résonance) et si $Q \gg 1$ alors ce rapport tend vers Q , ce qui veut dire que si Q est suffisamment élevé alors la hauteur du pic de résonance par rapport à la valeur à l'origine est $\simeq Q$, ce qui peut fournir une estimation rapide du facteur de qualité.

Des exemples de courbes de résonance sont données sur la figure 18 plus bas.

3.2.3 Bande passante

Une autre caractéristique de la courbe de résonance (toujours sous couvert d'existence) est sa largeur que l'on quantifie par la bande passante. La bande passante $\Delta\omega$ est définie comme $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$ où ω_+ et ω_- sont les deux racines de $A(\omega) = A_m/\sqrt{2}$. On retrouvera une définition identique ("largeur à $1/\sqrt{2}$ ") dans le cours d'électrocinétique/instrumentation. Comme dans la section précédente il est préférable d'élever cette relation au carré de façon à obtenir

$$\frac{\mathcal{E}_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^2 \omega^2}{Q^2}} = \frac{2Q^4}{4Q^2 - 1} \frac{\mathcal{E}_0^2}{\omega_0^4}, \quad (91)$$

ce qui donne en inversant et simplifiant :

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^2 \omega^2}{Q^2} = \frac{4Q^2 - 1}{2Q^4} \omega_0^4, \quad (92)$$

soit encore

$$\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2} = \frac{4Q^2 - 1}{2Q^4}. \quad (93)$$

On suppose désormais que le facteur de qualité est plutôt élevé, $Q^2 \gg 1$, alors le terme de droite devient simplement $\simeq 2/Q^2$ et l'équation se ré-écrit (il y a une petite astuce de ré-écriture) :

$$\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)^2 + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right) - \frac{1}{Q^2} = 0. \quad (94)$$

On obtient donc une équation du second degré pour la variable $x = \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)$, soit

$$x^2 + \frac{1}{Q^2}x - \frac{1}{Q^2} = 0. \quad (95)$$

Le discriminant vaut, en n'oubliant pas que $Q^2 \gg 1$,

$$\Delta = \frac{1}{Q^4} + \frac{4}{Q^2} \simeq \frac{4}{Q^2}. \quad (96)$$

On voit rapidement qu'on trouve deux racines, toujours avec l'hypothèse $Q^2 \gg 1$, $x_{\pm} \simeq 1/Q$, soit $\omega_{\pm}^2/\omega_0^2 = 1 \pm 1/Q$, et donc finalement

$$\omega_{\pm} = \omega_0 \sqrt{1 \pm \frac{1}{Q}} \simeq \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right). \quad (97)$$

La bande passante s'en déduit :

$$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- \simeq \frac{\omega_0}{Q}, \quad (98)$$

toujours sous couvert que Q est assez grand. On peut reformuler comme :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}, \quad (99)$$

qui indique que le facteur de qualité s'interprète en gros comme la largeur relative de la résonance (si Q est assez élevé, la pulsation de résonance est proche de ω_0 et donc on ne fait pas une grande erreur en remplaçant ω_m par ω_0 dans l'expression précédente).

En conclusion, on avait déjà vu que le facteur de qualité Q correspondait à la hauteur de la résonance, et on voit maintenant qu'il correspond aussi à sa largeur. Ces deux qualités sont regroupées sous le terme traditionnel "d'acuité" de la résonance ; ainsi plus le facteur de qualité est élevé et plus la résonance est aigue, ie à la fois plus haute et plus étroite, comme on peut le voir sur la figure 18.

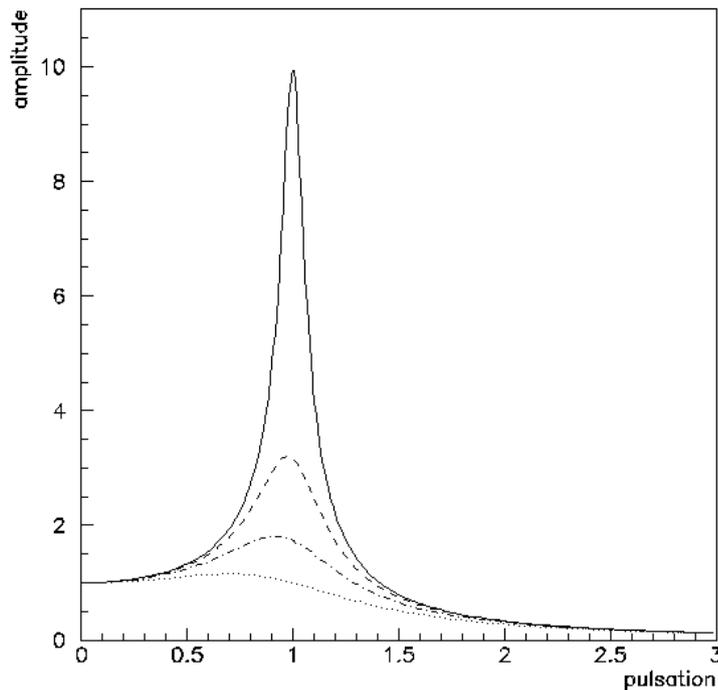


FIGURE 18 – Résonance d'amplitude. Courbes représentant les amplitudes d'oscillations $A(\omega)$ pour diverses valeurs du facteur de qualité, du plus petit au plus grand : $Q = 1$, $Q = 1.7$, $Q = 3$ et $Q = 10$. Les courbes sont en fonction de la pulsation normalisée $x = \omega/\omega_0$. Plus le facteur de qualité est élevé et plus la résonance est aigue et plus la pulsation de résonance se rapproche de ω_0 , ou autrement dit que la pulsation normalisée $x = \omega/\omega_0$ se rapproche de 1.

3.2.4 Phase

La phase s'obtient maintenant en calculant l'argument de 84 :

$$\varphi(\omega) = -\arg\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0\omega}{Q}\right). \quad (100)$$

Une petite astuce (afin d'avoir $\omega_0^2 - \omega^2$ au numérateur plutôt qu'au dénominateur) consiste à factoriser j :

$$\varphi(\omega) = -\arg j \left(\frac{\omega_0 \omega}{Q} - j(\omega_0^2 - \omega^2) \right), \quad (101)$$

et comme $\arg(ab) = \arg(a) + \arg(b)$ et $\arg(j) = \pi/2$, on obtient :

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{atan} \left(Q \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0 \omega} \right), \quad (102)$$

soit encore

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{atan} \left(Q \frac{1 - x^2}{x} \right), \quad (103)$$

en posant $x = \omega/\omega_0$. Cette fonction est représentée sur la figure 19 pour diverses valeurs de Q . On note que pour tout Q , $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\omega_0) = -\pi/2$ (point d'inflexion) et $\varphi \rightarrow -\pi$ si $\omega \rightarrow \infty$.

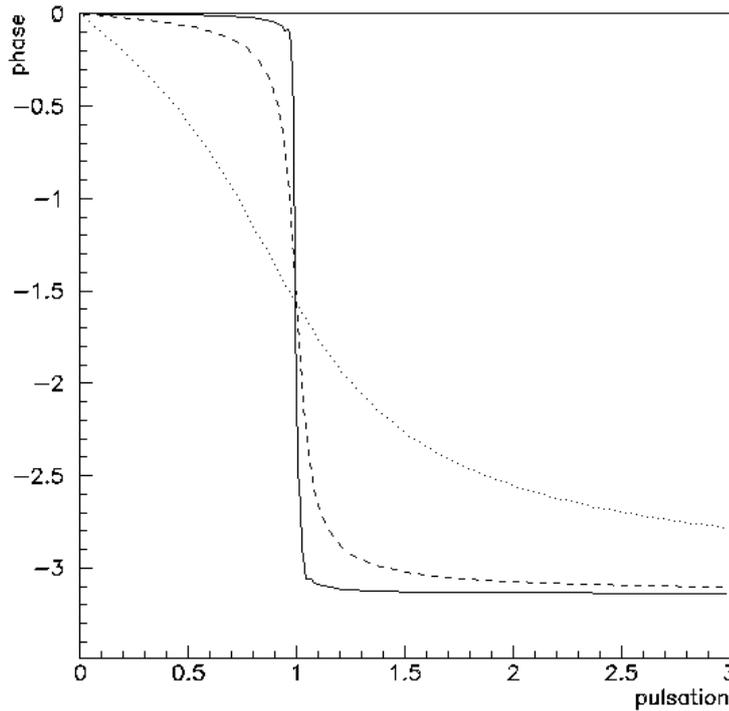


FIGURE 19 – Résonance d'amplitude. Courbes représentant la phase $\varphi(\omega)$ pour diverses valeurs du facteur de qualité, du plus petit au plus grand : $Q = 1$, $Q = 10$ et $Q = 100$. Les courbes sont en fonction de la pulsation normalisée $x = \omega/\omega_0$. Plus le facteur de qualité est élevé et plus la courbe se rapproche d'une fonction créneau passant toujours par $-\pi/2$ en $\omega = \omega_0$.

3.3 Résonance de vitesse ou d'intensité

3.3.1 Fonction de transfert

Après s'être intéressé à l'amplitude, on va maintenant étudier sa dérivée, i.e. la vitesse (si on est en mécanique) ou l'intensité (si on est en électrocinétique). Se rappelant que dériver par rapport au temps

revient à multiplier par $j\omega$ en représentation complexe, et en notant D (comme dérivée) la dérivée de X (soit la vitesse soit l'intensité donc), on obtient en représentation complexe : $\underline{D}(\omega) = j\omega\underline{X}(\omega)$, soit

$$\underline{D}(\omega) = \frac{j\omega\mathcal{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0\omega}{Q}}. \quad (104)$$

On divise par $j\omega$ numérateur et dénominateur pour obtenir

$$\underline{D}(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0}{\frac{\omega_0}{Q} + j\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega}}, \quad (105)$$

soit en divisant par ω_0/Q

$$\underline{D}(\omega) = \frac{Q\mathcal{E}_0}{\omega_0} \frac{1}{1 + jQ\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0\omega}}. \quad (106)$$

On peut poser comme d'habitude $x = \omega/\omega_0$ et on a finalement

$$\underline{D}(x) = \frac{Q\mathcal{E}_0}{\omega_0} \frac{1}{1 + jQ\frac{x^2 - 1}{x}}. \quad (107)$$

Comme pour l'amplitude $\underline{X}(\omega)$, il nous faut étudier module et phase de $\underline{D}(\omega)$. On pose donc $\underline{D}(\omega) = A_D \exp(j\varphi_D)$.

3.3.2 Résonance de vitesse/d'intensité

Le module s'écrit donc

$$A_D(x) = \frac{Q\mathcal{E}_0}{\omega_0} \frac{1}{1 + Q^2 \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2}}. \quad (108)$$

Il n'est nul besoin de dériver pour étudier les maxima de cette fonction. En effet, on note que le dénominateur, somme de deux termes positifs dont l'un constant, est minimal quand le terme non constant s'annule, c'est-à-dire pour $x = 1$, soit $\omega = \omega_0$. Il y a donc toujours résonance de vitesse ou d'intensité (pas de condition sur Q cette fois-ci) et cette pulsation de résonance est exactement ω_0 (différence supplémentaire avec la résonance d'amplitude). Le maximum, qui vaut $A_{Dmax} = Q\mathcal{E}_0/\omega_0$, lui dépend de Q , et est évidemment d'autant plus élevé que Q est grand.

On note également que $A_D \rightarrow 0$ si $\omega \rightarrow 0$ et que $A_D \rightarrow 0$ également si $\omega \rightarrow \infty$. Cette propriété suffit d'ailleurs à prouver que A_D passe bien toujours par un maximum (fonction positive qui s'annule en 0 et en $+\infty$).

3.3.3 Bande passante

On calcule la bande passante de la même façon que pour l'amplitude $A(\omega)$. On cherche les deux valeurs de x telles que $A_D(x) = A_{Dmax}/\sqrt{2}$, soit à résoudre

$$1 + Q^2 \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2} = 2. \quad (109)$$

On en déduit

$$Q^2(x^2 - 1)^2 = x^2, \quad (110)$$

et on obtient en prenant la racine terme à terme deux équations du second degré

$$x^2 \pm x/Q - 1 = 0, \quad (111)$$

dont on garde les racines positives (les deux autres étant négatives) soit :

$$x_{\pm} = \pm \frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \quad (112)$$

La différence des deux est simplement $\Delta x = x_+ - x_- = 1/Q$. Et la bande passante dimensionnée s'ensuit (on multiplie par ω_0) :

$$\Delta\omega = \omega_0/Q. \quad (113)$$

Notons bien que ce résultat est exact (aucune approximation).

3.3.4 Phase

Enfin déterminons la phase φ_D en prenant l'argument de \underline{D} . Il vient facilement

$$\varphi_D(x) = \text{atan}\left(Q \frac{1-x^2}{x}\right) = \text{atan} Q \left(\frac{1}{x} - x\right). \quad (114)$$

On note que $\varphi_D = \varphi + \pi/2$. On voit aussi que $\varphi_D = 0$ pour $x = 1$ ($\omega = \omega_0$), c'est-à-dire à la résonance. C'est d'ailleurs une manière de déterminer expérimentalement la résonance en électrocinétique. Les autres valeurs remarquables sont $\varphi_D \rightarrow +\pi/2$ si $\omega \rightarrow 0$ et $\varphi_D \rightarrow -\pi/2$ si $\omega \rightarrow \infty$.

Les figures 20 et 21 montrent module A_D et phase φ_D de \underline{D} pour deux valeurs de Q .

Notons finalement que cette résonance de vitesse ou d'intensité porte aussi parfois le nom de résonance de phase. En effet à résonance, on a $\varphi_D = 0$ et donc D est alors en phase avec l'excitation extérieure (alors qu'à $\omega = \omega_0$, X est en quadrature avec l'excitation).

On a ainsi, si $\omega = \omega_0$: $X(t) = A \cos(\omega_0 t - \pi/2)$ (pas loin de la résonance d'amplitude si Q est relativement élevé) et $D(t) = \dot{X}(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t)$ (résonance de vitesse ou d'intensité ou de phase).

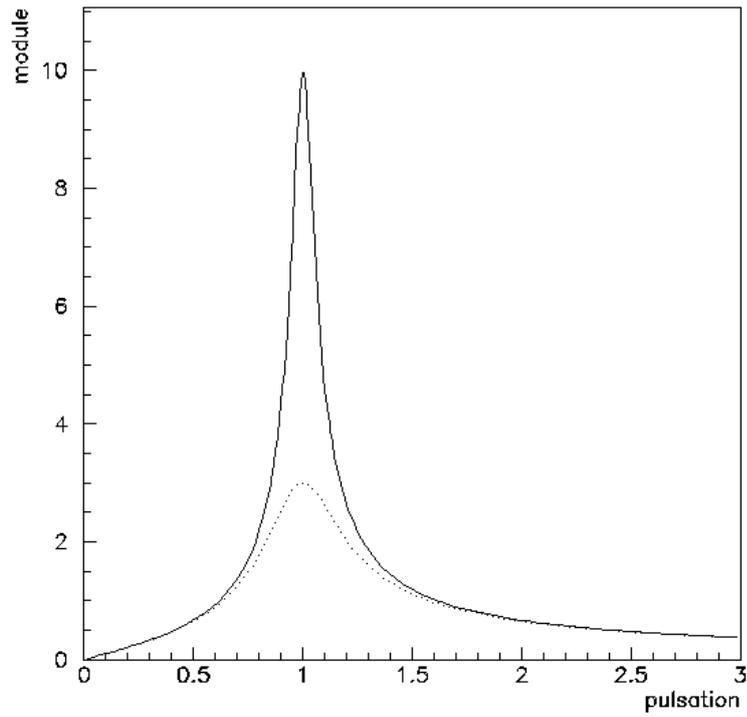


FIGURE 20 – Résonance de vitesse ou d'intensité. Module en fonction de la pulsation normalisée $x = \omega/\omega_0$ pour deux valeurs du facteur de qualité, $Q = 3$ et $Q = 10$. Plus le facteur de qualité est élevé et plus la résonance est aigue. Cette résonance a lieu en $x = 1$ c'est-à-dire à la pulsation ω_0 .

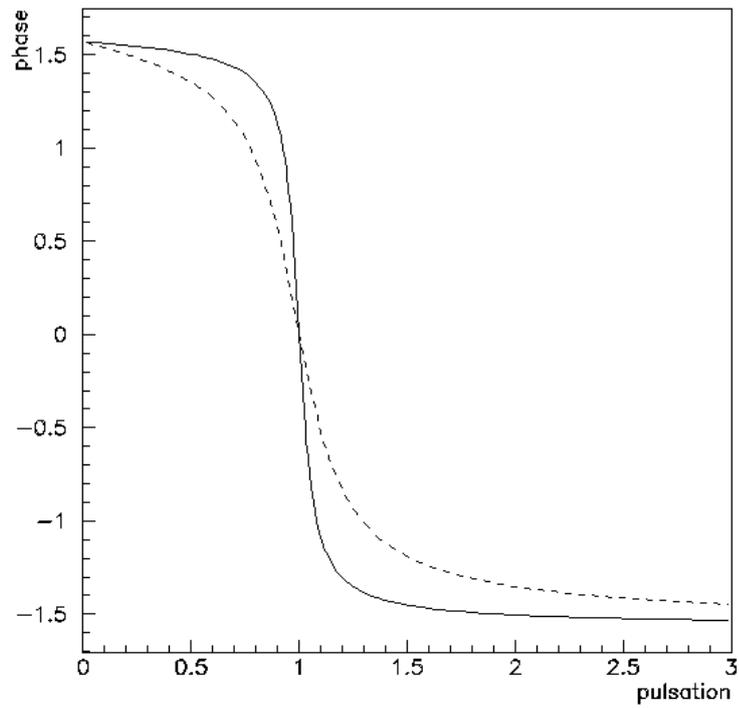


FIGURE 21 – Résonance de vitesse ou d'intensité. Phase en fonction de la pulsation normalisée $x = \omega/\omega_0$ pour deux valeurs du facteur de qualité, $Q = 3$ et $Q = 10$. A la résonance ($x = 1$) la phase s'annule.

3.4 Bilan

Nous avons étudié dans cette partie deux cas de résonance, résonance d'amplitude d'une part et résonance de vitesse ou d'intensité (ou de phase) d'autre part.

La résonance d'amplitude existe si et seulement si $Q > 1/\sqrt{2}$ et pour une pulsation toujours inférieure à ω_0 (égale dans le cas idéal sans perte, $Q = \infty$).

La résonance de vitesse ou d'intensité existe toujours et a lieu précisément à la pulsation ω_0 .

La bande passante dans le premier cas est approximativement égale à ω_0/Q (valable si $Q^2 \gg 1$) et dans le second cas est exactement égale à ω_0/Q (pas d'approximation).

Dans les deux cas le facteur de qualité Q renseigne sur l'acuité de la résonance (hauteur et largeur).

Notons que les fonctions de phase sont les mêmes à $\pi/2$ près; en particulier pour la résonance de vitesse ou d'intensité, la phase s'annule à la pulsation de résonance ω_0 .

Notons finalement que les courbes de résonance d'amplitude ($A(\omega)$) et vitesse ou d'intensité ($A_D(\omega)$) n'ont pas le même comportement en 0; $A(0)$ a une valeur finie alors que $A_D(0) = 0$.

4 Oscillateurs couplés

Après l'étude d'un oscillateur simple sous toutes ses coutures, l'étape suivante est de passer à ... deux oscillateurs! On va donc étudier deux oscillateurs couplés et mettre en évidence de nouvelles caractéristiques ou nouveaux phénomènes. Ce sera en particulier l'occasion d'introduire la notion de modes propres ou le phénomène de battements.

4.1 Etude d'un exemple simple

4.1.1 Position du problème

On considère deux masses identiques m reliées à des points fixes par des ressorts identiques de raideur k et de longueur à vide l_0 et reliées entre elles par un ressort de raideur L et de longueur à vide L_0 , responsable du couplage entre les deux masses. L'ensemble est aligné parfaitement sur l'axe Ox (problème à une dimension, voir la figure 22). Les ressorts sont supposés idéaux et il n'y a pas de frottements (cas des oscillateurs idéaux).

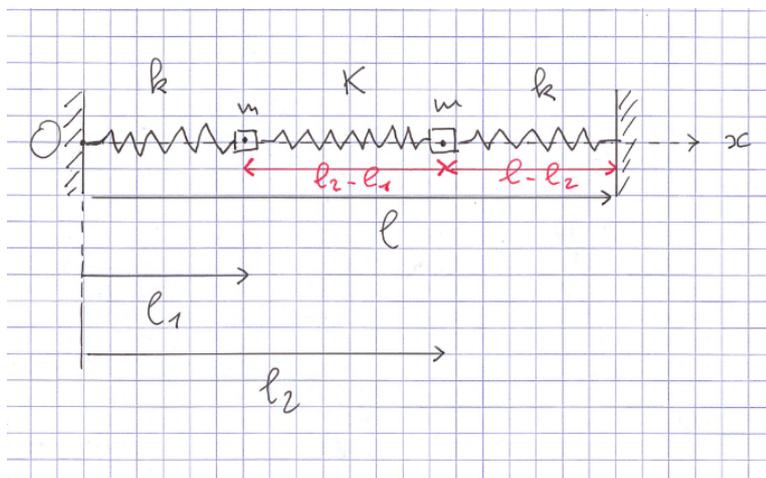


FIGURE 22 – Système mécanique à une dimension constitué de deux oscillateurs couplés.

Avec les notations de la figure 22, la position de la masse de gauche est l_1 et celle de droite est l_2 ; la longueur du ressort de gauche est ainsi l_1 , celle du ressort central (de couplage) est $l_2 - l_1$ et celle du ressort de droite est $l - l_2$. La longueur l du dispositif est évidemment constante. Les forces en jeu pertinentes sont les tensions des ressorts (poids et réactions d'un système non décrit se compensent et assurent que le mouvement a bien lieu uniquement sur l'axe Ox). Si les deux masses sont à l'équilibre on a donc la nullité des sommes des forces en projection sur l'axe Ox pour chacune des deux masses, soit :

$$-k(l_{1e} - l_0) + K(l_{2e} - l_{1e} - L_0) = 0 \quad (115)$$

$$-K(l_{2e} - l_{1e} - L_0) + k(l - l_{2e} - l_0) = 0 \quad (116)$$

où l_{1e} et l_{2e} sont les longueurs à l'équilibre des deux ressorts de gauche et de droite. Si on pose $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les écarts des deux masses par rapport à leurs positions d'équilibre, c'est-à-dire que $l_1 = l_{1e} + x_1$ et $l_2 = l_{2e} + x_2$ alors les équations du mouvement des deux masses s'écrivent, toujours

en projection sur Ox :

$$m\ddot{x}_1 = -k(l_1 - l_0) + K(l_2 - l_1 - L_0) = -k(l_{1e} + x_1 - l_0) + K(l_{2e} + x_2 - l_{1e} - x_1 - L_0) \quad (117)$$

$$m\ddot{x}_2 = -K(l_2 - l_1 - L_0) + k(l - l_2 - l_0) = -K(l_{2e} + x_2 - l_{1e} - x_1 - L_0) + k(l - l_{2e} - x_2 - l_0) \quad (118)$$

puis, en retranchant les équations d'équilibre⁷ on obtient :

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + K(x_2 - x_1) \quad (119)$$

$$m\ddot{x}_2 = -K(x_2 - x_1) - kx_2 \quad (120)$$

soit finalement :

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 + K(x_1 - x_2) = 0 \quad (121)$$

$$m\ddot{x}_2 + kx_2 + K(x_2 - x_1) = 0 \quad (122)$$

(on notera au passage la parfaite symétrie entre les 2 équations ce qui est bon signe vu la symétrie du problème).

On obtient un système de deux équations différentielles couplées, le terme de couplage (mélangeant x_1 et x_2) étant du au ressort central reliant les deux masses. Si on pose $K = 0$ (c'est-à-dire si on fait disparaître le ressort central), alors on retrouve deux équations d'OH idéal indépendantes, dont on connaît les solutions, correspondant aux deux masses attachées aux deux ressorts chacune de leur côté.

4.1.2 Résolution : notion de modes propres, de pulsations propres

Pour résoudre un système d'équations couplées, il faut le ... découpler. Ceci se fait par un changement de variables pour lequel les deux équations finales sont du coup indépendantes, c'est-à-dire découplées. Ici, vu la symétrie du système d'équations, le changement qui s'impose est de prendre somme et différence des variables x_1 et x_2 . On pose donc

$$S(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (123)$$

$$D(t) = x_1(t) - x_2(t) \quad (124)$$

En formant somme et différence des deux équations différentielles couplées on obtient alors :

$$m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 + k(x_1 + x_2) = 0 \quad (125)$$

$$m\ddot{x}_1 - m\ddot{x}_2 + (k + 2K)(x_1 - x_2) = 0 \quad (126)$$

soit

$$m\ddot{S} + kS = 0 \quad (127)$$

$$m\ddot{D} + (k + 2K)D = 0. \quad (128)$$

7. Comme d'habitude avec ces histoires de ressort, on ne peut pas s'en sortir si on n'écrit pas d'abord la ou les conditions d'équilibre.

On obtient bien deux équations d'OH idéal indépendantes de pulsations

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (129)$$

$$\text{et } \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2K}{m}}, \quad (130)$$

appelées pulsations propres du système couplé.

On note aussi que si $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ est la pulsation naturelle de chacun des oscillateurs séparés, masse m +raideur k (sans couplage), alors on a immédiatement :

$$\omega_1 = \omega_0 \quad (131)$$

$$\omega_2 = \omega_0 \times \sqrt{1 + \frac{2K}{k}}. \quad (132)$$

En l'absence de couplage, i.e. si $K \rightarrow 0$, les deux pulsations propres tendent évidemment vers la pulsation naturelle commune ω_0 .

Les solutions découplées sont alors

$$S(t) = S_0 \cos(\omega_1 t + \varphi_S) \quad (133)$$

$$D(t) = D_0 \cos(\omega_2 t + \varphi_D), \quad (134)$$

avec quatre constantes arbitraires ($S_0, \varphi_S, D_0, \varphi_D$) à déterminer avec les conditions initiales (deux pour chacune des masses). On en déduit x_1 et x_2 , partant de $S = x_1 + x_2$ et $D = x_1 - x_2$, d'où $x_1 = (S + D)/2$ et $x_2 = (S - D)/2$, soit

$$x_1(t) = \frac{1}{2}[S_0 \cos(\omega_1 t + \varphi_S) + D_0 \cos(\omega_2 t + \varphi_D)] \quad (135)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}[S_0 \cos(\omega_1 t + \varphi_S) - D_0 \cos(\omega_2 t + \varphi_D)]. \quad (136)$$

Les mouvements des deux masses, repérés respectivement par x_1 et x_2 , sont donc en général superpositions de deux mouvements sinusoïdaux indépendants de pulsations ω_1 et ω_2 , appelés modes propres du système. Par un choix judicieux des conditions initiales, on peut annuler ou S_0 ou D_0 , ce qui signifie que l'on peut sélectionner l'un des deux modes propres. On voit aisément que si le système est dans l'un de ces modes propres, il y reste indéfiniment (l'autre mode ne montre jamais le bout de son nez!).

- Si $D_0 = 0$: les deux masses oscillent à ω_1 et $x_1(t) = x_2(t)$: elles se suivent et donc oscillent en phase. On nomme le mode propre correspondant le mode symétrique. On note que dans ce cas, comme $x_2 - x_1 = 0$, le ressort central n'est ni étiré ni comprimé, il reste immobile.

- Si $S_0 = 0$: les deux masses oscillent à ω_2 et $x_1(t) = -x_2(t)$: elles oscillent en opposition de phase. On nomme le mode propre correspondant le mode antisymétrique. On note que dans ce cas le milieu du ressort central reste immobile, c'est un point de symétrie.

Notons finalement que le système mécanique couplé étudié dans cette partie est formellement équivalent au système électrique suivant (deux mailles LC couplées) montré sur la figure 23. Par

analogie les deux pulsations propres de ce circuit couplé sont

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (137)$$

$$\text{et } \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{2}{LC_0}}. \quad (138)$$

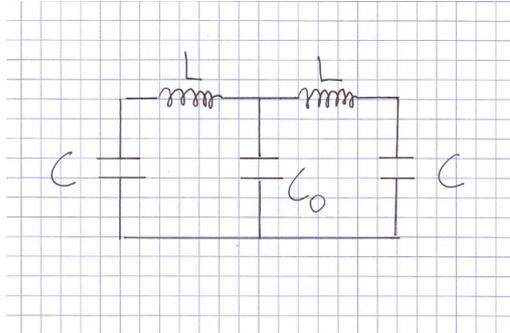


FIGURE 23 – Deux mailles LC identiques couplées par la capacité “centrale” C_0 . Ce système est équivalent au système mécanique étudié.

4.1.3 Détermination des pulsations propres : autre méthode

On va utiliser une autre méthode, très générale (et très puissante), pour déterminer les pulsations propres du système couplé. On reprend le système d'équations différentielles couplées, 121 et 122 et on va “passer en complexe” les deux variables x_1 et x_2 , soit $x_1 = \underline{x}_1 \exp(j\omega t)$ et $x_2 = \underline{x}_2 \exp(j\omega t)$. Le système d'équations différentielles devient le système d'équations scalaires où l'on cherche les valeurs possibles de la pulsation ω

$$(-m\omega^2 + k + K)\underline{x}_1 - K\underline{x}_2 = 0 \quad (139)$$

$$-K\underline{x}_1 + (-m\omega^2 + k + K)\underline{x}_2 = 0. \quad (140)$$

Nous avons donc affaire à un système linéaire homogène en \underline{x}_1 et \underline{x}_2 et pour avoir une solution autre que la solution triviale nulle ($\underline{x}_1 = \underline{x}_2 = 0$) il faut poser que le déterminant du système est nul, et c'est cette condition qui va nous donner les valeurs de ω recherchées, i.e. les pulsations propres. On obtient donc

$$(-m\omega^2 + k + K)^2 - K^2 = 0 \quad (141)$$

soit, comme différence de deux carrés :

$$(k - m\omega^2)(k + 2K - m\omega^2) = 0 \quad (142)$$

et les deux solutions (positives) redonnent bien les pulsations propres ω_1 et ω_2 .

4.1.4 Couplage faible : phénomène de battements

En cas de couplage faible, $K \ll k$, on a toujours évidemment $\omega_1 = \omega_0$ et maintenant $\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2K}{k}} \simeq \omega_0 \left(1 + \frac{K}{k}\right) = \omega_0(1 + \epsilon)$ où on a posé $\epsilon = K/k \ll 1$. Les deux amplitudes x_1 et x_2 sont

donc superpositions de deux modes propres dont les pulsations sont très voisines. La question qui se pose donc : que se passe-t-il si on superpose deux sinusoides de pulsations voisines ? Pour mettre en évidence plus efficacement le nouveau phénomène qui va apparaître, on choisit de plus de superposer deux sinusoides de pulsations voisines ET d'amplitude égales, soit, par exemple

$$x_1(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + x_0 \cos(\omega_0(1 + \epsilon)t + \varphi'_0). \quad (143)$$

On a rajouté des termes de phase φ_0 et φ'_0 pour être plus général, mais en fait ils ne jouent pas vraiment de rôle ici. En se souvenant de nos formules de trigonométrie élémentaires, on obtient alors

$$x_1(t) = 2x_0 \cos\left(\frac{\omega_0 + \omega_0(1 + \epsilon)}{2}t + \frac{\varphi_0 + \varphi'_0}{2}\right) \times \cos\left(\frac{\epsilon\omega_0}{2}t + \frac{\varphi_0 - \varphi'_0}{2}\right), \quad (144)$$

soit finalement

$$x_1(t) \simeq 2x_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) \times \cos\left(\frac{\epsilon\omega_0}{2}t + \phi'_0\right), \quad (145)$$

où on a renommé les termes de phase constants et approximé la pulsation du premier cosinus par simplement ω_0 .

On obtient donc un produit de deux sinusoides, la première de pulsation ω_0 donc de période $T_0 = 2\pi/\omega_0$ (sinusoïde rapide) et la deuxième de pulsation $\epsilon\omega_0/2$ donc de période $T = 4\pi/(\epsilon\omega_0) \gg T_0$ (sinusoïde lente). C'est un exemple de modulation d'amplitude, dans le sens où le "signal" de pulsation "rapide" est modulé par la pulsation lente. Le phénomène obtenu, illustré par la figure 24, est un phénomène de battements, bien connu, par exemple des adeptes d'instruments de musique à corde qui utilisent ce phénomène pour accorder leurs instruments. C'est un phénomène que l'on rencontre ailleurs en physique (doublet jaune du sodium en optique interférentielle ou détection synchrone en électronique par exemple).

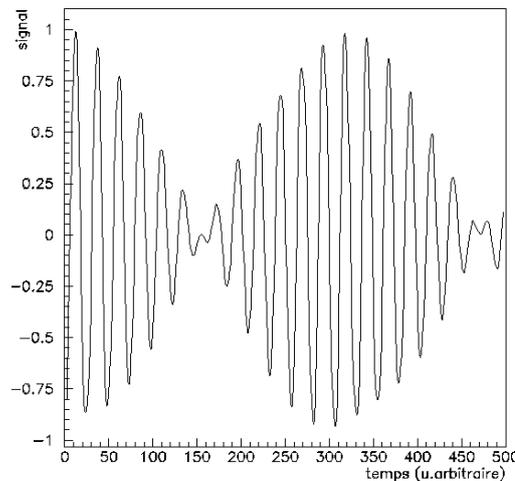


FIGURE 24 – Battements obtenus avec deux pulsations dans un rapport 100.

On note que le "signal" de pulsation lente joue le rôle d'enveloppe et donc que la période de modulation effective n'est pas T mais sa moitié. La pulsation effective de modulation (donc de la sinusoïde lente) est donc $\epsilon\omega_0$ (attention à cette petite subtilité).

4.1.5 Oscillateurs amortis couplés

On va reprendre ce que l'on fait dans les sections précédentes en considérant en plus des termes d'amortissement, forces de frottement visqueux identiques pour les deux masses.⁸ En notant α le coefficient de frottement, on a désormais les équations du mouvement (couplées) :

$$m\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + kx_1 + K(x_1 - x_2) = 0 \quad (146)$$

$$m\ddot{x}_2 + \alpha\dot{x}_2 + kx_2 + K(x_2 - x_1) = 0. \quad (147)$$

Les méthodes de découplage précédentes s'appliquent tout aussi bien, et, en posant comme précédemment $S = x_1 + x_2$ et $D = x_1 - x_2$, on obtient :

$$m\ddot{S} + \dot{S} + kS = 0 \quad (148)$$

$$m\ddot{D} + \dot{D} + (k + 2K)D = 0. \quad (149)$$

On obtient deux équations d'OH amorti indépendantes et on peut donc pour chacune d'entre elles reprendre la discussion du chapitre 2 (régime transitoire d'un OH amorti) : on forme les équations caractéristiques correspondantes et selon la valeur du discriminant, on obtient l'un des trois régimes possibles.

En particulier, en cas d'amortissement faible, on obtient des solutions sinusoïdales amorties, que l'on peut qualifier de pseudo modes propres dont les pulsations (pseudo pulsations propres) sont $\Omega_1 = \sqrt{\omega_1^2 - \lambda^2}$ et $\Omega_2 = \sqrt{\omega_2^2 - \lambda^2}$ où $\lambda = \alpha/2m$ et ω_1 et ω_2 sont les pulsations propres des OH découplés idéaux (sans amortissement) des sections précédentes.

Notons que la méthode du "passage en complexe" est tout aussi efficace. Posant $x_1 = \underline{x}_1 \exp(j\omega t)$ et $x_2 = \underline{x}_2 \exp(j\omega t)$ et injectant dans le système d'équations différentielles, on obtient cette fois ci :

$$(-m\omega^2 + j\alpha\omega + k + K)\underline{x}_1 - k\underline{x}_2 = 0 \quad (150)$$

$$-k\underline{x}_1 + (-m\omega^2 + j\alpha\omega + k + K)\underline{x}_2 = 0. \quad (151)$$

On veut que le déterminant du système linéaire s'annule, soit

$$(-m\omega^2 + j\alpha\omega + k + K)^2 - k^2 = 0 \quad (152)$$

soit, comme différence de deux carrés :

$$(k - m\omega^2 + j\alpha\omega)(k + K - m\omega^2 + j\alpha\omega) = 0. \quad (153)$$

On arrive donc à deux équations (complexes) en ω :

$$k - m\omega^2 + j\alpha\omega = 0 \quad (154)$$

$$k + K - m\omega^2 + j\alpha\omega = 0. \quad (155)$$

Ces deux équations sont en fait reliées directement aux deux équations caractéristiques des deux équations d'OH découplées (en S et en D). On fait la correspondance en posant $r = j\omega$.

Dans le cas d'un amortissement faible on trouve les solutions complexes pour chacune des deux équations (avec toujours les mêmes notations) :

$$\omega = \pm\Omega_1 + j\lambda \quad (156)$$

$$\omega' = \pm\Omega_2 + j\lambda. \quad (157)$$

8. Pour un circuit tel que celui de la figure 23, l'analogie électrique consisterait à introduire deux résistances identiques dans chacune des mailles.

La partie réelle redonne les pseudo pulsations propres et la partie imaginaire le terme d'amortissement. Les solutions sont enfin obtenues en prenant des superpositions de $\exp(j\omega t)$ et $\exp(j\omega' t)$ qui in fine redonnent par exemple une expression

$$x_1(t) = \exp(-\lambda t) \left(A \cos(\Omega_1 t + \phi_1) + B \cos(\Omega_2 t + \phi_2) \right) \quad (158)$$

et une expression similaire pour x_2 .

4.2 Oscillateurs couplés forcés

4.2.1 Deux oscillateurs idéaux couplés, résonances d'amplitude

Après avoir étudié les oscillations libres on va étudier la réponse du système couplé à une force périodique contrôlée par un opérateur extérieur, exactement comme on l'a fait pour un oscillateur simple. On reprend donc les équations du mouvement en rajoutant une force $F_0 \cos \omega t$ agissant par exemple sur la masse 1. Le système d'équations devient donc :

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 + K(x_1 - x_2) = F_0 \cos \omega t \quad (159)$$

$$m\ddot{x}_2 + kx_2 + K(x_2 - x_1) = 0. \quad (160)$$

Comme on recherche la solution du régime permanent, c'est à dire, comme pour un oscillateur simple, une solution sinusoïdale à la même pulsation ω de l'excitation, on va passer naturellement en complexe en posant $x_1 = \underline{x}_1 \exp(j\omega t)$ et $x_2 = \underline{x}_2 \exp(j\omega t)$, la force extérieure étant simplement F_0 en représentation complexe. Le système d'équations différentielles couplées avec second membre devient donc le système linéaire :

$$(-m\omega^2 + k + K)\underline{x}_1 - K\underline{x}_2 = F_0 \quad (161)$$

$$-K\underline{x}_1 + (-m\omega^2 + k + K)\underline{x}_2 = 0. \quad (162)$$

De la deuxième équation on exprime \underline{x}_2 en fonction de \underline{x}_1 :

$$\underline{x}_2 = \frac{K}{k + K - m\omega^2} \underline{x}_1, \quad (163)$$

et on reporte dans la première pour trouver :

$$\underline{x}_1 = \frac{k + K - m\omega^2}{(k - m\omega^2)(k + 2K - m\omega^2)} F_0. \quad (164)$$

En divisant numérateur et dénominateur on refait apparaître les pulsations ω_1 et ω_2 (au dénominateur) et une nouvelle pulsation $\omega_a = \sqrt{(k + K)/m}$ et donc

$$\underline{x}_1 = \frac{\omega_a^2 - \omega^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)} \frac{F_0}{m}, \quad (165)$$

et par suite

$$\underline{x}_2 = \frac{K/m}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)} \frac{F_0}{m}. \quad (166)$$

On voit, vue la forme des fonctions $|\underline{x}_1|$ et $|\underline{x}_2|$, qu'il y a résonance aux pulsations ω_1 et ω_2 et, nouveauté, antirésonance à la pulsation ω_a . C'est trivial pour $|\underline{x}_1|$ et on le vérifiera pour $|\underline{x}_2|$. Ce qui est bien confirmé par les représentations graphiques, figures 25 et 26. On note aussi que $|\underline{x}_1|$ s'annule à l'antirésonance mais pas $|\underline{x}_2|$ (minimum non nul). Cette dissymétrie entre les deux masses est bien entendu due au fait que la force extérieure s'applique sur la première et pas sur la seconde.

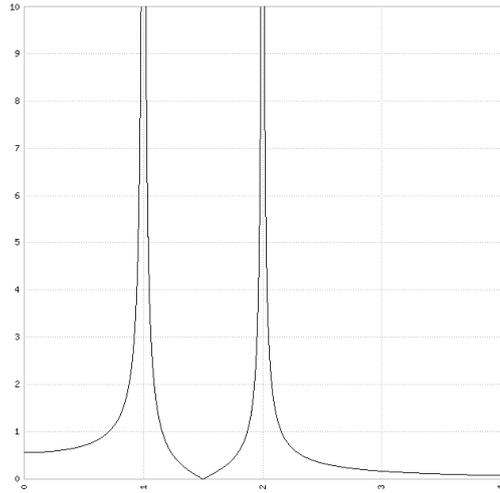


FIGURE 25 – Amplitude au carré $|x_1|^2$ en fonction de ω . On remarque les deux résonances séparées d’une antirésonance et que les résonances sont en fait infinies.

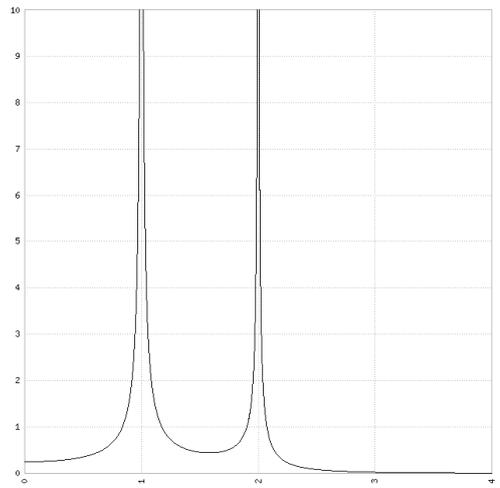


FIGURE 26 – Amplitude au carré $|x_2|^2$ en fonction de ω . On remarque les deux résonances séparées d’une antirésonance et que les résonances sont en fait infinies.

4.2.2 Effet de la dissipation

Les résonances que l'on vient de mettre en évidence sont en général limitées par la présence de dissipation (force de frottement / résistances). Au lieu d'avoir des résonances infinies, on aura donc des résonances finies. Un autre effet, comme on l'a vu au chapitre 3, est de décaler ces résonances vers "la gauche" et ce d'autant plus que la dissipation est importante jusqu'à éventuellement disparaître. Pour voir cela concrètement, reprenons les équations du mouvement précédentes en ajoutant pour chaque une force de frottement visqueux identique :

$$m\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + kx_1 + K(x_1 - x_2) = F_0 \cos \omega t \quad (167)$$

$$m\ddot{x}_2 + \alpha\dot{x}_2 + kx_2 + K(x_2 - x_1) = 0. \quad (168)$$

On passe en complexe et on a :

$$(-m\omega^2 + k + K + j\alpha\omega)\underline{x}_1 - K\underline{x}_2 = F_0 \quad (169)$$

$$-K\underline{x}_1 + (-m\omega^2 + k + K + j\alpha\omega)\underline{x}_2 = 0. \quad (170)$$

On tire de la deuxième équation :

$$\underline{x}_2 = \frac{K}{k + K - m\omega^2 + j\alpha\omega} \underline{x}_1, \quad (171)$$

et en reportant dans la première :

$$\underline{x}_1 = \frac{k + K - m\omega^2 + j\alpha\omega}{(k - m\omega^2 + j\alpha\omega)(k + 2K - m\omega^2 + j\alpha\omega)} F_0. \quad (172)$$

On trouve une équation similaire au cas idéal, avec maintenant des "+j\alpha\omega" dans tous les termes ! En réintroduisant les pulsations caractéristiques ω_1 , ω_2 et ω_a et en introduisant les facteurs de qualité $Q_1 = m\omega_1/\alpha$, $Q_2 = m\omega_2/\alpha$ et $Q_a = m\omega_a/\alpha$, on obtient :

$$\underline{x}_1 = \frac{\omega_a^2 - \omega^2 + j\omega_a\omega/Q_a}{(\omega_1^2 - \omega^2 + j\omega_1\omega/Q_1)(\omega_2^2 - \omega^2 + j\omega_2\omega/Q_2)} \frac{F_0}{m}, \quad (173)$$

d'où on tire le module au carré :

$$|\underline{x}_1|^2 = \frac{(\omega_a^2 - \omega^2)^2 + \omega_a^2\omega^2/Q_a^2}{((\omega_1^2 - \omega^2)^2 + \omega_1^2\omega^2/Q_1^2)((\omega_2^2 - \omega^2)^2 + \omega_2^2\omega^2/Q_2^2)} \left(\frac{F_0}{m}\right)^2. \quad (174)$$

De même après un peu de calcul on trouve

$$|\underline{x}_2|^2 = \frac{(K/m)^2}{((\omega_1^2 - \omega^2)^2 + \omega_1^2\omega^2/Q_1^2)((\omega_2^2 - \omega^2)^2 + \omega_2^2\omega^2/Q_2^2)} \left(\frac{F_0}{m}\right)^2. \quad (175)$$

On trouve les mêmes formes de fonctions que pour la résonance d'amplitude d'un oscillateur simple et la discussion va donc être similaire. Ainsi, si elles existent, les résonances ont lieu pour les pulsations décalées

$$\omega_{1m} = \omega_1 \times \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_1^2}} \quad \text{et} \quad \omega_{2m} = \omega_2 \times \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_2^2}} \quad (176)$$

et donc n'existent que si $Q_1 > 1/\sqrt{2}$ et $Q_2 > 1/\sqrt{2}$ (conditions identiques à celle trouvée au chapitre 3). L'antirésonance elle aussi est décalée :

$$\omega_{am} = \omega_a \times \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_a^2}}, \quad (177)$$

et n'existe que si $Q_a > 1/\sqrt{2}$.

Des exemples sont représentés sur les figures 27 et 28.

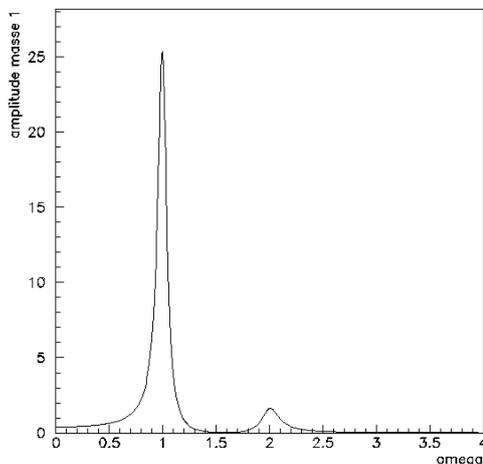


FIGURE 27 – Amplitude au carré $|x_1|^2$ en fonction de ω dans le cas d'oscillateurs amortis. Les facteurs de qualité ont été pris égaux à 10 et $\omega_1 = 1$ u.a et $\omega_2 = 2$ u.a.

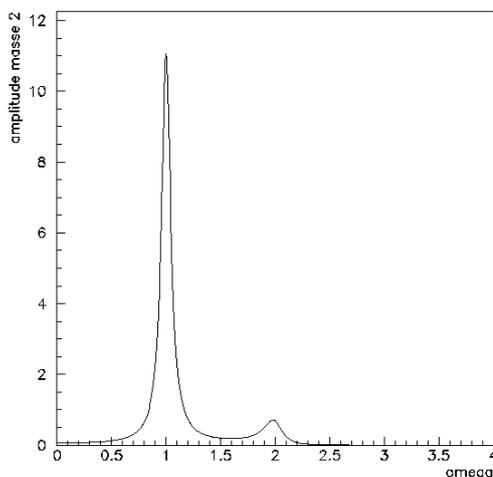


FIGURE 28 – Amplitude au carré $|x_2|^2$ en fonction de ω dans le cas d'oscillateurs amortis. Les facteurs de qualité ont été pris égaux à 10 et $\omega_1 = 1$ u.a et $\omega_2 = 2$ u.a.

Etudions également les phases de x_1 et x_2 . Commençons par cette dernière : $\varphi_2 = \arg(x_2)$ soit

$$\varphi_2(\omega) = -\arg(\omega_1^2 - \omega^2 + j\omega_1\omega/Q_1) - \arg(\omega_2^2 - \omega^2 + j\omega_2\omega/Q_2) \quad (178)$$

et, comme pour un oscillateur simple au chapitre 3, en factorisant j , on obtient

$$\varphi_2(\omega) = -\pi + \operatorname{atan}\left(Q_1 \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_1 \omega}\right) + \operatorname{atan}\left(Q_2 \frac{\omega_2^2 - \omega^2}{\omega_2 \omega}\right) \quad (179)$$

Le comportement aux bornes est simple, $\varphi_2 \rightarrow 0$ si $\omega \rightarrow 0$ et $\varphi_2 \rightarrow -2\pi$ si $\omega \rightarrow \infty$. De plus, si ω_1 et ω_2 ne sont pas trop proches, alors on obtient $\varphi_2(\omega_1) \simeq -\pi/2$ et $\varphi_2(\omega_2) \simeq -3\pi/2$.

Pour $\varphi_1 = \arg(\underline{x}_1)$, c'est à peine plus compliqué et la même méthode conduit à

$$\varphi_1(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{atan}\left(Q_1 \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_1 \omega}\right) + \operatorname{atan}\left(Q_2 \frac{\omega_2^2 - \omega^2}{\omega_2 \omega}\right) - \operatorname{atan}\left(Q_a \frac{\omega_a^2 - \omega^2}{\omega_a \omega}\right) \quad (180)$$

Le comportement aux bornes nous donne $\varphi_1 \rightarrow 0$ si $\omega \rightarrow 0$ et $\varphi_1 \rightarrow -\pi$ si $\omega \rightarrow \infty$. On a de plus, si les pulsations sont bien séparées, $\varphi_1(\omega_1) \simeq \varphi_1(\omega_a) \simeq \varphi_1(\omega_2) \simeq -\pi/2$.

Des exemples sont montrés sur les figures 29 et 30.

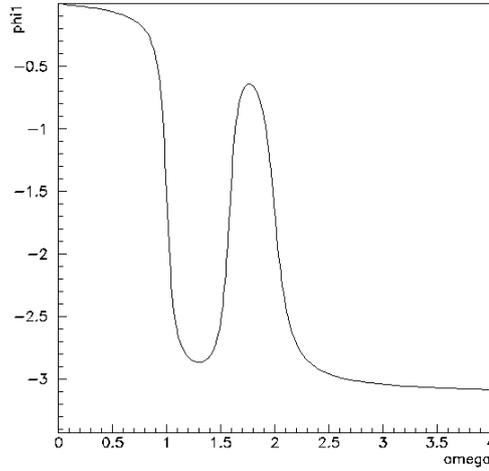


FIGURE 29 – Phase de \underline{x}_1 en fonction de ω . Les facteurs de qualité ont été pris égaux à 10 et $\omega_1 = 1$ u.a et $\omega_2 = 2$ u.a.

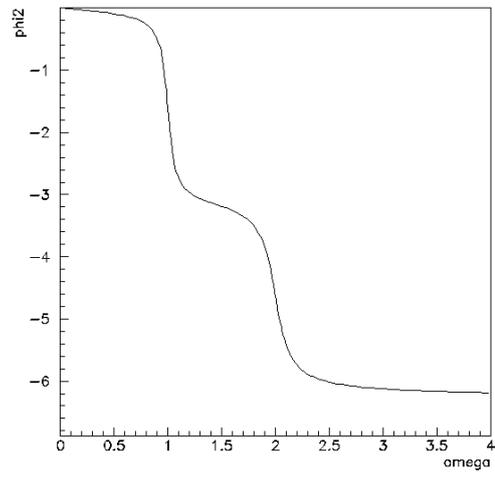


FIGURE 30 – Phase de \underline{x}_2 en fonction de ω . Les facteurs de qualité ont été pris égaux à 10 et $\omega_1 = 1$ u.a et $\omega_2 = 2$ u.a.

5 Autres types d'oscillations

Les oscillateurs harmoniques ne sont qu'une classe d'oscillateurs, certes fréquente et très utile. Dans ce chapitre on va aller au delà de l'approximation harmonique et découvrir l'effet des anharmonicités mais aussi étudier une autre classe d'oscillations, celle dite des oscillations de relaxation (qui en général sont tout sauf harmoniques).

5.1 Oscillations pendulaires : au delà de l'approximation des petites oscillations

5.1.1 Pendule simple, rappels

On a étudié le pendule simple au chapitre 1 (section 1.1.2 et figure 5). On a d'abord établi l'équation du mouvement exacte (non linéaire) :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad (181)$$

où $\omega_0 = \sqrt{g/L}$, g étant l'accélération de la pesanteur et L la longueur du pendule. On s'est ensuite placé dans l'approximation des petites oscillations en posant $\sin \theta \simeq \theta$ ce qui a permis de linéariser l'équation précédente et de retomber sur une équation d'OH idéal :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta \simeq 0, \quad (182)$$

dont la solution peut s'écrire, par exemple, $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

Cette solution est en fait remarquable en ceci que la période des oscillations $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$ est indépendante de θ_0 , élongation maximale qui est aussi l'amplitude initiale (en cas de lâcher sans vitesse initiale). On parle ainsi d'isochronisme des petites oscillations. Quelque soit θ_0 , du moment que $\theta_0 \ll 1$, la période T_0 est la même. On va donc voir comment cette propriété est modifiée si on considère des oscillations de plus grande amplitude.

5.1.2 Intégrale première du mouvement et séparation des variables

Une des méthodes de résolution qu'on avait utilisé était basée sur le théorème de l'énergie cinétique et le fait que toutes les forces en jeu sont conservatives (si on oublie les frottements évidemment), et on peut donc reprendre l'équation 16, soit

$$E = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL \cos \theta. \quad (183)$$

L'énergie E est une constante du mouvement et l'équation précédente est en particulier valable au point d'élongation maximale, $\theta = \theta_0$ où justement la vitesse s'annule. En en déduit donc

$$E = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL \cos \theta = -mgL \cos \theta_0. \quad (184)$$

Il vient alors, la masse m disparaissant (oeuvre du principe d'équivalence) :

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2g}{L}} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}, \quad (185)$$

soit encore

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \pm \sqrt{2} \frac{2\pi}{T_0} dt. \quad (186)$$

Les variables sont formellement séparées, θ d'un côté et le temps t de l'autre et on peut se dire qu'il n'y a plus qu'à intégrer terme à terme. C'est trivial pour le terme de droite, et un peu plus délicat pour le terme de gauche (on va en fait rentrer dans le domaine fantastique des intégrales elliptiques!)

5.1.3 Formule de Borda

Pour arriver à quelque chose de plus pratique ; commençons par passer à l'angle moitié, sachant que $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2(\theta/2)$, on a $\cos \theta - \cos \theta_0 = 2[\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)]$, d'où

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}} = \pm \frac{4\pi}{T_0} dt. \quad (187)$$

Maintenant, si on intègre par exemple de 0 à θ_0 à gauche alors à droite cela correspond à un quart de période soit $T/4$ et le "±" est alors simplement "+" (en effet $\dot{\theta} > 0$ quand θ est croissant entre 0 et θ_0). On obtient donc

$$\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}} = \frac{4\pi}{T_0} \times \frac{T}{4} = \pi \frac{T}{T_0}. \quad (188)$$

On peut dès lors procéder au changement de variables : $\sin(\theta/2) = \sin(\theta_0/2) \times \sin \phi$ avec, si $\theta \in [0, \theta_0]$ alors $\phi \in [0, \pi/2]$. De plus en différenciant, on obtient : $1/2 \times \cos(\theta/2) \times d\theta = \sin(\theta_0/2) \times \cos \phi \times d\phi$. Le changement de variables conduit alors à :

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_0/2) \sin^2(\phi)}}. \quad (189)$$

On est arrivé à une forme qui appelle le développement limité ($1/\sqrt{1-x} \simeq 1 + x/2 + 3x^2/8 + \dots$). On développant par rapport à $\sin^2(\theta_0/2) \sin^2(\phi)$ on obtient :

$$T \simeq \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\phi \times \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2(\theta_0/2) \sin^2(\phi) + \frac{3}{8} (\sin^2(\theta_0/2) \sin^2(\phi))^2 + \dots \right). \quad (190)$$

Chacune des intégrales en ϕ se calcule facilement, l'intégrale de 1 donne $\pi/2$, elle de $\sin^2 \phi$ donne $\pi/4$ etc ..., d'où :

$$T \simeq \frac{2T_0}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin^2(\theta_0/2) \times \frac{\pi}{4} + \dots \right), \quad (191)$$

soit

$$T \simeq T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2(\theta_0/2) + \dots \right). \quad (192)$$

Il ne reste plus qu'à développer le \sin^2 en fonction de θ et, en se limitant à l'ordre le plus bas, on obtient la formule de Borda :

$$T \simeq T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right). \quad (193)$$

On voit que la période à l'ordre le plus bas non nul dépend explicitement de θ_0 . Cette sensibilité aux conditions initiales est une conséquence du caractère non linéaire de l'équation différentielle du mouvement. Si on peut négliger θ_0 devant 1 alors on retrouve l'isochronisme des petites oscillations, $T = T_0$. Sinon on aura seulement un isochronisme approché. Tout cela dépend aussi de la précision de nos instruments de mesure (notre chronomètre en l'occurrence). Par exemple si l'on veut $T \simeq T_0$ à 1% près alors cela demande $\theta_0^2/16 < 10^{-2}$, soit $\theta_0 < 0.40$ rad (23 degrés). Autrement dit si la précision de notre mesure du temps est de l'ordre du % alors on pourra lancer notre pendule depuis tout angle initial $\theta_0 < 0.40$ rad, et on aura expérimentalement $T \simeq T_0$. Par contre, si on part d'un angle plus élevé, on commencera à voir des déviations par rapport à l'isochronisme, et, au passage, on pourra construire expérimentalement la formule de Borda. Evidemment si on prend des valeurs initiales encore plus élevées, on verra apparaître des corrections d'ordres supérieurs (d'abord en θ_0^4 puis en θ_0^6 etc...).

5.2 Anharmonicités

5.2.1 Premier terme au delà de l'ordre harmonique

On a vu au tout début que à l'ordre le plus bas, on pouvait approximer l'énergie potentielle au voisinage d'un minimum (position d'équilibre stable) par un potentiel d'OH, $E_p = 1/2kx^2$ (moyennant un changement d'origine de l'axe OX), dont dérive la force de rappel $-kx$ qui in fine donne l'équation d'OH, $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, avec $\omega_0^2 = k/m$.

On peut pousser le développement à l'ordre suivant et poser, au voisinage du minimum de l'énergie potentielle (situé en $x = 0$ par choix) :

$$E_p \simeq \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{3}\alpha kx^3, \quad (194)$$

le terme supplémentaire étant supposé petit devant le terme harmonique (ce qui se traduit par $\alpha x \ll 1$) et le signe "-" étant posé par convenance. Le terme α est donc supposé être un infiniment petit du premier ordre. L'équation du mouvement se déduit facilement :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha \omega_0^2 x^2. \quad (195)$$

On obtient donc une équation d'OH idéal avec un terme de force supplémentaire non linéaire à droite. Ce terme peut être traité comme une perturbation de l'OH idéal et on va donc effectuer un calcul classique de perturbation (peut-être pour la première fois).

5.2.2 Traitement en perturbation

La méthode consiste à poser la solution comme solution de l'OH idéal (non perturbé), solution d'ordre 0 à la quelle on superpose un terme d'ordre 1, correction due au terme supplémentaire, soit

$$x(t) = x^{(0)}(t) + x^{(1)}(t) \quad (196)$$

avec $x^{(1)} \ll x^{(0)}$. On va ensuite injecter cette solution dans l'équation différentielle non linéaire et séparer les termes d'ordre 0 d'une part (qui devrait redonner l'équation de l'OH idéal et donc nous donner $x^{(0)}$) et d'ordre 1 d'autre part (dont la solution nous donnera $x^{(1)}$). On obtient donc

$$\ddot{x}^{(0)} + \ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2(x^{(0)} + x^{(1)}) = \alpha \omega_0^2(x^{(0)2} + 2x^{(0)}x^{(1)} + x^{(1)2}). \quad (197)$$

Les termes d'ordre 0 redonnent

$$\ddot{x}^{(0)} + \omega_0^2 x^{(0)} = 0 \quad (198)$$

alors que les termes d'ordre 1 donnent :

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = \alpha \omega_0^2 x^{(0)2}, \quad (199)$$

tous les autres termes étant d'ordre 2 ou supérieurs (attention α est d'ordre 1 tout comme $x^{(1)}$).

La solution de l'équation 198 peut s'écrire (moyennant une choix adéquat de l'origine des temps pour simplifier) $x^{(0)}(t) = a \cos \omega_0 t$, solution que l'on peut donc injecter dans le second membre de l'équation 199, soit

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = \alpha \omega_0^2 a^2 \cos^2 \omega_0 t = \alpha \omega_0^2 a^2 \times \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega_0 t). \quad (200)$$

On retrouve donc une équation d'OH idéal en régime forcé avec deux termes de forçage, l'un constant (donc à pulsation nulle) et l'autre à la pulsation $2\omega_0$. Le régime permanent sera superposition d'une solution particulière associée au terme de pulsation nulle et d'une solution particulière associée au terme de $2\omega_0$.

5.2.3 Génération d'harmoniques

La solution particulière associée au terme constant est triviale (on cherche une solution constante) et on trouve $1/2\alpha a^2$. Pour la solution particulière associée au terme de $2\omega_0$, on cherche une solution sinusoïdale à la même pulsation (on peut passer en complexe mais ce n'est pas nécessaire ici comme il n'y a pas de terme d'amortissement) et on trouve $-1/6\alpha a^2 \cos 2\omega_0 t$. Au final :

$$x^{(1)}(t) = \frac{1}{2}\alpha a^2 - \frac{1}{6}\alpha a^2 \cos 2\omega_0 t \quad (201)$$

La solution complète, somme de l'ordre 0 et du premier ordre, $x(t) = x^{(0)}(t) + x^{(1)}(t)$, s'écrit finalement :

$$x(t) = a \cos \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha a^2 - \frac{1}{6}\alpha a^2 \cos 2\omega_0 t \quad (202)$$

Le premier terme d'ordre 0 est la solution de l'OH idéal à la pulsation ω_0 obtenue en l'absence de perturbation et les deux termes suivants, du premier ordre en α , sont les corrections d'ordre le plus bas dues à l'anharmonicité (terme en x^3 dans le potentiel). On remarque que ces corrections sont aux pulsations $\omega_0 \pm \omega_0$, soit 0 et $2\omega_0$. L'effet de l'anharmonicité, effet non linéaire, a donc été de faire apparaître deux nouvelles pulsations dans la solution physique, 0 et $2\omega_0$. Cet effet porte le nom de génération d'harmoniques.

5.2.4 Ordre suivant

Regardons maintenant l'effet de l'ordre suivant en développant l'énergie potentielle un cran plus loin :

$$E_p \simeq \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{3}\alpha kx^3 - \frac{1}{4}\beta kx^4, \quad (203)$$

avec α toujours du premier ordre et β du second ordre ($\beta x^2 \ll \alpha x \ll 1$). L'équation du mouvement s'en déduit :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha \omega_0^2 x^2 + \beta \omega_0^2 x^3. \quad (204)$$

On procède de la même façon que précédemment mais en rajoutant un terme au développement en perturbation :

$$x(t) = x^{(0)}(t) + x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t), \quad (205)$$

que l'on injecte dans l'équation du mouvement. On regroupe les termes d'ordre 0 (qui redonne l'équation 198) puis d'ordre 1 (qui redonne l'équation 199) et enfin d'ordre 2, nouvelle équation :

$$\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = \alpha \omega_0^2 \times 2x^{(0)}x^{(1)} + \beta \omega_0^2 x^{(0)3}, \quad (206)$$

tous les autres termes étant d'ordre > 2 . Connaissant les solutions d'ordre 0 et d'ordre 1, on en déduit les seconds membres de cette équation, qui après linéarisation (un peu de trigo nécessaire) vont donner des termes en $\cos \omega_0 t$ et $\cos 3\omega_0 t$. La solution du régime permanent pour $x^{(2)}$ va donc être superposition des solutions particulières associées à ces deux termes, soit superposition de $\cos \omega_0 t$ et $\cos 3\omega_0 t$ (le calcul exact n'est pas nécessaire pour la discussion) ce qui correspond à des termes de pulsations $2\omega_0 \pm \omega_0$. Le terme en x^4 dans le potentiel va donc être responsable en particulier de l'apparition d'une nouvelle pulsation celle à $3\omega_0$ (nouvelle harmonique).

5.2.5 Généralisation

L'ordre 0 (OH idéal) donne une solution sinusoïdale à la pulsation ω_0 , l'ordre 1 (terme en x^3 dans le potentiel) des termes de correction aux pulsations $\omega_0 \pm \omega_0$ et l'ordre 2 (terme en x^4 dans le potentiel) des termes de corrections supplémentaires aux pulsations $2\omega_0 \pm \omega_0$. La généralisation est immédiate, un terme en x^n dans le potentiel va donner des corrections aux pulsations $n\omega_0 \pm \omega_0$, soit générer l'harmonique $n + 1$ (et contribuer à l'harmonique $n - 1$). Le génération d'harmoniques est un phénomène que l'on retrouvera dans divers domaines de physique non linéaire (perturbations de l'oscillateur harmonique quantique dès le L3 par exemple) et qui est commun en optique non linéaire (voir la figure 31).



FIGURE 31 – Doublage de fréquence à l'aide d'un cristal non linéaire. Le laser incident de longueur d'onde 800 nm passe à travers le cristal et la lumière transmise est à la longueur d'onde 400 nm.

5.3 Oscillations de relaxation

5.3.1 Définition

Les oscillations dites de « relaxation » peuvent survenir quand un certain système acquiert de l'énergie venant d'une source externe jusqu'à ce qu'un seuil soit atteint. A ce moment, l'énergie emmagasinée est libérée (parfois brusquement), le système revient à l'état initial et le cycle recommence. La forme des oscillations obtenues est en général tout sauf sinusoïdale !

5.3.2 Oscillateur de Van Der Pol

Balthasar Van Der Pol était ingénieur chez Phillips aux Pays-Bas et a inventé un circuit non linéaire à base de tubes à vide en 1927 (donc avant l'invention des transistors et bien avant l'invention des circuits intégrés) et a observé des oscillations auxquelles il a donné le nom d'oscillations de relaxation. Il a pu modéliser les oscillations libres de ce circuit de façon relativement simple grâce à l'équation qui porte maintenant son nom (équation de Van Der Pol) :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (207)$$

C'est une équation non linéaire (terme en x^2) et le paramètre a joue le rôle de seuil. En particulier si $x \ll a$, l'équation devient

$$\ddot{x} - \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x \simeq 0, \quad (208)$$

ce qui correspond à un OH à amortissement négatif (donc oscillations amplifiées!). Ensuite quand x atteint le seuil a le terme “d’amortissement” change de signe, devient un vrai amortissement et les oscillations s’amortissent jusqu’à ce que x soit à nouveau petit et le cycle repart. Le terme d’amortissement dépend de x et n’est donc jamais constant, on ne peut donc pas obtenir de solutions sinusoïdales amorties (ou amplifiées). Il n’y a d’ailleurs pas de solution analytique à l’équation de Van Der Pol et on doit se contenter de résolutions numériques (comme par exemple montrées sur la figure 32). Notons que l’énergie est apportée évidemment par une alimentation extérieure (celle qui alimente le tube à vide dans le circuit original de Van Der Pol).

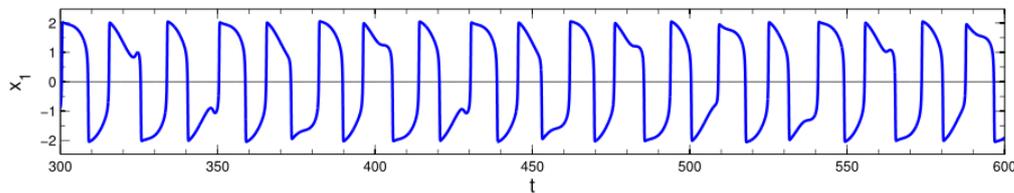


FIGURE 32 – Exemple d’oscillations forcées obtenues avec un oscillateur de Van Der Pol (piqué sur wikipédia!).

Il existe plein d’exemples d’oscillateurs à relaxation, depuis des montages à base d’ampli-op en régime saturé jusqu’au vase de Tantale (facile à réaliser, il suffit d’un robinet, une bassine et un siphon, et facile à modéliser). Dans la section finale, on va prendre comme exemple simple un circuit avec une lampe au néon.

5.3.3 Montage avec une lampe au néon

On dispose d’un circuit RC alimenté en continu avec une lampe au néon placée en parallèle du condensateur (voir figure 33). La lampe au néon (composant en fait non linéaire) est caractérisée par deux tensions : la tension d’allumage V_a et la tension d’extinction V_e , avec $V_a > V_e$. Si la tension aux bornes de la lampe atteint V_a alors elle s’allume et reste allumée tant que la tension reste supérieure à V_e . La lampe éteinte équivaut à une résistance infinie et la lampe allumée à une résistance r en général très faible (en pratique $r \ll R$). A $t=0$, on ferme l’interrupteur (non représenté sur la figure), le condensateur étant initialement déchargé. On suppose aussi que $E > V_a$ (condition importante comme on va le voir trivialement dans la suite).

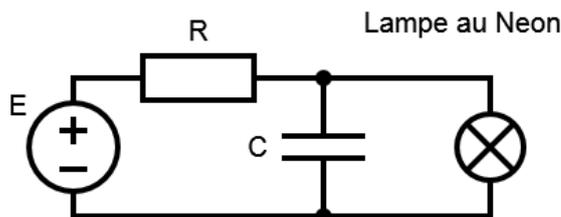


FIGURE 33 – Circuit RC avec lampe au néon en parallèle.

Notons $V(t)$ la tension aux bornes de la capacité et de la lampe (orientée vers le haut sur la figure), q la charge (armature supérieure) de la capacité et i le courant traversant la résistance R (orienté de la gauche vers la droite sur la figure). Aux premiers instants, la tension V part de 0 et

est donc inférieure à V_a , la lampe est donc une résistance infinie et le circuit équivalent est un simple circuit RC . Il s'agit donc du problème classique de charge d'un condensateur et on trouve facilement que, en posant $\tau = RC$,

$$V(t) = E(1 - \exp(-t/\tau)) \quad (209)$$

qui reste valide tant que $V < V_a$.

A l'instant t_a , $V(t_a) = V_a$ et la lampe s'allume et on change de régime. Ce qui va se passer physiquement c'est que le condensateur qui voit subitement une petite résistance en parallèle va s'y décharger. Lois des mailles et des noeuds dans le nouveau régime nous amène à, en posant $\tau' = \tau \times r/(r + R)$,

$$V(t) = \frac{rE}{r + R} + \left(V_a - \frac{rE}{r + R} \right) \exp(-(t - t_a)/\tau') \quad (210)$$

qui reste valide tant que $V > V_e$.

A l'instant t_e , $V(t_e) = V_e$ et la lampe s'éteint et on change de régime à nouveau, on repart sur une phase de charge. On montre alors sans mal que

$$V(t) = E + (V_e - E) \exp(-t/\tau). \quad (211)$$

valable jusqu'à ce que $V = V_a$ à nouveau etc. On assiste donc à une succession de phases de charges du condensateur (lampe éteinte) et de décharges (lampe allumée).

Un exemple est donné figure 34. On voit qu'effectivement avec les valeurs numériques typiques choisies $\tau \simeq 10$ ms et $\tau' \simeq 1$ μ s, soit $\tau' \ll \tau$ et l'exponentielle de décharge est quasi-verticale. Les oscillations obtenues ressemblent plutôt à des fonctions triangle et aucun cas à des sinusoides! Comme la période T des oscillations correspond essentiellement au temps de charge du condensateur, on montre facilement que

$$T \simeq \tau \ln \left(\frac{E - V_e}{E - V_a} \right). \quad (212)$$

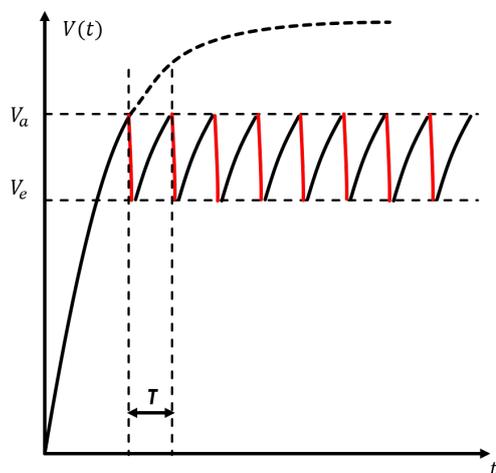


FIGURE 34 – Circuit RC avec lampe au néon en parallèle. Valeurs numériques utilisées : $E = 180$ V, $V_a = 110$ V, $V_e = 80$ V, $C = 1$ μ F, $R = 10$ k Ω et $r = 1$ Ω .

Annexes

A Equivalence mécanique / électricité.

On l'a vu, l'analogie entre mécanique et électricité est presque totale. On récapitule ici les quantités mécaniques et électriques qui sont "équivalentes".

mécanique	électricité
masse m	inductance L
raideur k	inverse de la capacité $1/C$
Coefficient de frottement visqueux α	résistance R
position x	charge q
vitesse $v = dx/dt$	intensité $i = dq/dt$
pulsation naturelle $\omega_0 = \sqrt{k/m}$	pulsation naturelle $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$
Energie cinétique	Energie stockée dans l'inductance
Energie potentielle	Energie stockée dans la capacité
force F	tension V

On peut encore aller plus loin en définissant, à l'instar de l'impédance électrique, une impédance mécanique. Rappelons que l'impédance électrique complexe est définie par $\underline{u} = \underline{Z} \times \underline{i}$ (voir fig.35 pour les notations usuelles), soit $\underline{Z} = \underline{u}/\underline{i}$.

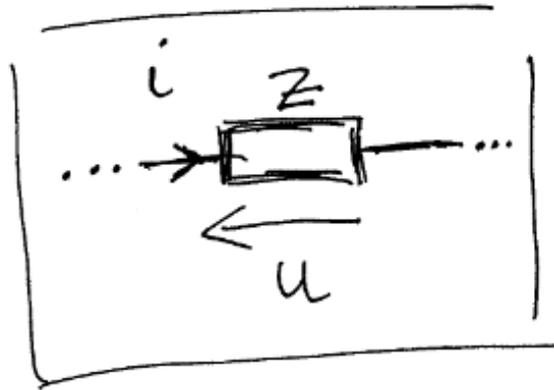


FIGURE 35 – Impédance, notations.

De façon similaire, on va définir l'impédance mécanique (complexe) comme rapport force sur vitesse : $\underline{Z} = \underline{F}/\underline{v}$. Par exemple, un oscillateur harmonique amorti soumis à une force extérieure F , de façon à ce que

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m},$$

soit en passant en complexe

$$(-\omega^2 + j\frac{\omega_0\omega}{Q} + \omega_0^2)\underline{x} = \frac{F}{m}.$$

Comme $\underline{v} = j\omega\underline{x}$, et F étant donnée par l'expression précédente, il vient, tous calculs faits :

$$\underline{Z} = m\left(\frac{\omega_0}{Q} + j(\omega - \omega_0^2/\omega)\right).$$

Si on écrit l'expression de l'impédance complexe d'un circuit RLC série : $\underline{Z} = R + j(L\omega - 1/C\omega)$.
Comme $\omega_0^2 = 1/LC$ et $Q = L\omega_0/R$, on peut réécrire :

$$\underline{Z} = L\left(\frac{\omega_0}{Q} + j(\omega - \omega_0^2/\omega)\right),$$

expression totalement analogue à celle obtenue au dessus pour l'oscillateur mécanique !