# TDs PHYS137: Relativité restreinte

Barbara Perri

2023/2024

## 1 Référentiel galiléen

Indiquer si les référentiels suivants peuvent être considérés comme galiléens :

1. un point immobile,
2. un wagon à vitesse constante dans une ligne droite,
3. un wagon à accélération constante dans une ligne droite,
4. un wagon à vitesse constante dans un virage,
5. le référentiel terrestre.

## 2 Astronaute dans l'espace

Un astronaute s'éloigne de la Terre avec une vitesse de valeur constante $v = 0.90 \times c$ suivant une trajectoire rectiligne jusqu'à une planète distante de $d = 4$ années-lumières. La durée mesurée $\Delta T$ par une horloge sur Terre est différente de la durée propre $\Delta T'$ relevée par une horloge fixe dans un référentiel lié à l'astronaute.

1. Quelle est la distance parcourue par l'astronaute durant son trajet en mètres ?
2. Quelle est la durée du trajet de l'astronaute pour un observateur terrestre ?
3. Que vaut le facteur de Lorentz de l'astronaute ? Peut-on considérer que son trajet est relativiste ?
4. Quelle est la durée de ce même trajet pour l'astronaute ?
5. L'astronaute mesure 1m75. Combien a-t-on l'impression qu'il mesure vu depuis la Terre ?

## 3 GPS et relativité

Le système GPS est composé d'une vingtaine de satellites situés à une altitude de $z = 20000$ km. Il permet de déterminer la position sur Terre à quelques mètres près. Cela se fait par triangulation en calculant la distance par rapport à 4 satellites minimum. Il faut donc calculer le temps de trajet de signaux électromagnétiques échangés avec les satellites et avec qui les horloges internes sont parfaitement synchrones.

1. Quelle est la période de révolution des satellites GPS autour de la Terre ?
2. Quelle est alors leur vitesse ?
3. Quel est le facteur de Lorentz des satellites GPS ?
4. Comment sont les durées mesurées par les satellites par rapport à celles mesurées sur Terre ?
5. Soit $\tau = \Delta T' - \Delta T$ le décalage entre les deux horloges. Que vaut $\tau$ après un jour d'écart sur Terre ?
6. Soit $\Delta d = \tau \times c$ l'erreur de calcul GPS sur les distances. Comment se traduit ce décalage d'un jour sur $\Delta d$ ?
7. Un deuxième effet affecte les satellites à cause de la relativité générale : le temps s'écoule plus lentement dans un champ gravitationnel plus intense. Or, nos satellites sont en altitude, et l'attraction gravitationnelle qu'ils subissent est environ 20 fois plus faible que la nôtre. Leur temps est alors accéléré de 45 microsecondes par jour par rapport au nôtre. Que deviennent alors $\tau$ et $\Delta d$ ? Les effets de la relativité générale doivent-ils être pris en compte ?

**Données utiles :**
Vitesse de la lumière : $c = 3\,10^8$ m/s,
Constante de gravitation : $G = 6,67\,10^{-11}$ kg$^{-1}$.m$^3$.s$^{-2}$,
Rayon de la Terre : $R_T = 6380$ km,
Masse de la Terre : $M_T = 6\,10^{24}$ kg.

# 1 Référentiel galiléen

On rappelle qu'un référentiel galiléen (ou inertiel) est un référentiel en translation rectiligne uniforme où la loi d'additivité des vitesses s'applique.

1. Oui, l'immobilité est un cas particulier de la translation uniforme (à vitesse nulle),
2. Oui, c'est la définition-même,
3. Non, l'accélération fait que la vitesse n'est plus uniforme, on a alors une force d'inertie supplémentaire,
4. Non, le virage fait qu'on n'est plus en translation, on a des pseudo-forces qui s'appliquent,
5. Ça dépend ! La Terre n'est pas un référentiel parfaitement galiléen (elle tourne sur elle-même et a une vitesse non constante sur son orbite), mais si on s'intéresse à des événements suffisamment courts et localisés, alors on peut faire cette approximation.

# 2 Astronaute dans l'espace

1. Une année-lumière correspond à la distance parcourue par la lumière en une année.
   Comme il parcourt 4 années-lumières, on a : $d = 4 \times 3600 \times 24 \times 365 \times c = 3,8\,10^{16}$ m.
   Cela correspond à 38 000 milliards de kilomètres.
2. Dans le référentiel de la Terre, l'astronaute s'éloigne à une vitesse constante $v$.
   Pour calculer la durée du trajet, on utilise donc la relation : $v = d/t \Rightarrow t = d/v$.
   Avec la distance calculée précédemment, on a donc : $\Delta T = \frac{d}{0.9 \times c} = 1,4\,10^8$ s.
   Cela correspond à environ 4,4 ans.
3. Le facteur de Lorentz de l'astronaute vaut : $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0.9^2}} = 2.3$. Il est plus grand que 1, donc le trajet est relativiste.
4. Comme il s'agit d'un trajet relativiste, on utilise la relation : $\Delta T = \gamma \Delta T' \Rightarrow \Delta T' = \Delta T/\gamma$.
   On obtient alors : $\Delta T' = 4,4/2.3 = 1,9$ ans.
5. On utilise la relation : $L = 1/\gamma L'$.
   On trouve alors : $L = 0,76$ m. L'astronaute ne semble mesurer que 76 cm !

# 3 GPS et relativité

1. On utilise la troisième loi de Kepler : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$ où $a = R_T + z$ et $M \approx M_T$.
   On obtient alors : $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}} = 4,26\,10^4$ s.
   Ceci correspond environ à 11,8 minutes.
2. On suppose le satellite en orbite circulaire, on obtient alors : $v = 2\pi a/T$.
   Cela donne : $v = 3,89\,10^3$ m/s.
3. Le facteur de Lorentz s'exprime comme : $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.
   Comme $v/c = 1.3\,10^{-5}$, on obtient : $\gamma \approx 1$ avec $\gamma > 1$.
4. Comme on a la relation $\Delta T' = \Delta T/\gamma$ et que $\gamma > 1$, cela implique forcément $\Delta T' < \Delta T$. Donc les durées mesurées par les satellites sont plus courtes.
5. On a : $\tau = \Delta T' - \Delta T = \Delta T/\gamma - \Delta T = \Delta T \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1\right)$.
   On trouve donc : $\tau = 24 \times 3600 \times (-8,5\,10^{-11}) = -7,3\,10^{-6}$ s.
6. On trouve : $\Delta d = \tau \times c = 2,2\,10^3$ m.
   Cela revient donc à une erreur de calcul de 2 km par jour.
7. On a alors : $\tau = 45 - 7 = 38\,\mu$s.
   Cela donne : $\Delta d = 11,4\,10^3$ m/s, soit une erreur désormais de 11 km par jour.
   Les effets de relativité générale doivent donc bien être pris en compte.