

TD 1 : Oscillateur harmonique

(I) Modèle de J.J. Thomson ou modèle du "plum pudding"

J.J. Thomson établit l'existence de l'électron en 1897 et aussitôt propose un modèle de l'atome, celui du "plum pudding" où les électrons chargés négativement se déplacent dans un "noyau" étendu, milieu homogène chargé positivement. On va modéliser donc l'atome d'Hydrogène comme suit : une boule homogène de charge $+e$ et de rayon a . On montre alors (théorème de Gauss qu'on verra au S3) que le champ électrique à l'intérieur du noyau est :

$$\vec{E} = \frac{er}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{e}_r$$

1. Quelle est l'expression de la force subie par l'électron dans l'atome ? Quelles sont ses principales caractéristiques ? Que peut-on en déduire sur la nature de la trajectoire ? Quelles sont en général les trajectoires possibles ?
2. On suppose la trajectoire rectiligne. Ecrire l'équation du mouvement. Que reconnaît-on ? Déterminer la pulsation puis la fréquence du mouvement libre. Donner une estimation numérique de cette fréquence et de la longueur d'onde correspondante. A quelle région du spectre électromagnétique correspond-elle ?
3. Discuter la validité du modèle de Thomson.

(II) Pendule simple

On considère une masse ponctuelle M suspendue au bout d'un fil inextensible de longueur l . On veut étudier le mouvement du pendule dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On notera m la masse de M .

1. Quelles sont les forces subies par la masse ponctuelle M ? Sont-elles conservatives ?
2. Déterminer une intégrale première du mouvement grâce au théorème de l'énergie cinétique. En déduire l'équation du mouvement.
3. Déterminer l'équation du mouvement à l'aide du théorème du moment cinétique cette fois.

4. Dans le cas des petites oscillations déterminer la période du mouvement. On suppose M lâchée sans vitesse initiale depuis la position repérée par l'angle θ_0 ($\theta_0 \ll 1$), déterminer la loi horaire du mouvement.

(III) Vibrations d'une molécule hétéronucléaire (exemples des halogènes)

On considère une molécule diatomique O-A dont l'un des atomes est beaucoup plus léger que l'autre (HCl ou encore mieux HBr ou HI par exemple). De cette façon on peut considérer l'atome "lourd" O comme fixe à l'origine du référentiel considéré (supposé galiléen) et étudier le mouvement de l'atome "léger" A par rapport à O. On suppose que O est plus électronégatif que A et porte la charge partielle $-\delta$ alors que A porte la charge $+\delta$. On note m la masse de A et on suppose que l'énergie potentielle d'interaction entre les deux atomes est de la forme :

$$U(r) = -\frac{\delta^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{C}{r^9}$$

où C est une constante positive et r dénote la distance entre O et A.

1. Discuter l'expression de $U(r)$. Tracer la courbe correspondante. Montrer qu'il existe une position d'équilibre stable pour une certaine valeur r_0 . Exprimer C en fonction de r_0 .
2. Etudier les petits mouvements autour de cette position d'équilibre : on exprimera $U(x)$ au second ordre en x au voisinage de r_0 , où $x = r - r_0$ avec $x \ll r_0$ en prenant soin d'éliminer C grâce à la question précédente puis on écrira l'équation du mouvement. On notera k la constante de raideur du ressort équivalent. Exprimer k en fonction des données du problème.
3. En déduire la fréquence naturelle de vibration de la molécule en fonction de k et m . Application numérique : calculer les inverses des longueurs d'onde correspondantes (en cm^{-1}) pour les trois molécules de HCl, HBr et HI pour lesquelles les valeurs de k sont données dans la table ci-dessous. Comparer aux valeurs mesurées, données dans la même table.

	$\lambda^{-1}(\text{cm}^{-1})$	$k(\text{N/m})$
HCl	2886	480
HBr	2559	410
HI	2230	320