LDD1 MPSI

Systemes Oscillants (OLPH155D)
Partiel du 16 mars 2023

Durée : 2h

L'utilisation de documents, téléphones portables…est interdite, à l'exception d'un pense-bête format A4 recto. Les calculatrices sont autorisées. Les différentes parties du sujet sont indépendantes,

Atome d'Hydrogène classique

On considère un atome d'Hydrogène constitué d'un proton de charge $+e$ et d'un électron de charge $-e$ et de masse m. Le proton, beaucoup plus lourd que l'électron, est supposé immobile en O, origine du référentiel du laboratoire supposé galiléen. On note r la distance entre le proton et l'électron. L'énergie potentielle de l'électron est de la forme :

$$E_p(r) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{L^2}{2mr^2},$$

où L est la norme du moment cinétique de l'électron.

1. Montrer que L est bien homogène à un moment cinétique.
2. A quoi correspond le premier terme dans E_p ? Est-il attractif ou répulsif ?
3. De même le second terme est-il attractif ou répulsif ? Pouvez-vous l'interpréter physiquement ?
4. Montrer que $E_p(r)$ admet un minimum pour une valeur r_0 que l'on précisera. Que devient ce minimum si $L = 0$? Question subsidiaire : quel est le mouvement de l'électron si $L = 0$?
5. Tracer $E_p(r)$ en fonction de r dans les deux cas, $L \neq 0$ et $L = 0$.

   Dans toute la suite on suppose $L \neq 0$ et on étudie les petits mouvements autour de la position d'équilibre stable $r = r_0$.
6. Ecrire la dérivée seconde de E_p en r_0 en fonction de e, ϵ_0 et r_0. D'après le rappel ci-dessous, justifier que l'énergie potentielle de l'électron au voisinage de $r = r_0$ s'écrit sous la forme :

   $$E_p(r) \simeq E_0 + \frac{1}{2}m\omega_0^2(r - r_0)^2.$$

   Préciser les expressions de E_0 et ω_0.
7. Décrire succinctement le mouvement de l'électron.
8. En supposant que l'électron oscillant autour de sa position d'équilibre émet une onde électromagnétique à la même pulsation ω_0, déterminer la longueur d'onde correspondante. Application numérique : $e \simeq 1.6 \times 10^{-19}$ C, $m \simeq 0.9 \times 10^{-30}$ kg, $1/(4\pi\epsilon_0) \simeq 9 \times 10^9$ SI, $r_0 \simeq 0.53 \times 10^{-10}$m. On rappelle également la vitesse de la lumière $c \simeq 3 \times 10^8$ m/s.
9. Les longueurs d'onde les plus petites du spectre de l'atome d'Hydrogène (série de Lyman) sont situées dans le domaine ultraviolet entre environ 90 et 120 nm. Toutes les autres raies sont de longueurs d'onde plus grandes (visible, infrarouge...). La valeur numérique obtenue précédemment est-elle plausible ? Conclure quant à la pertinence d'un modèle classique de l'atome d'Hydrogène.

Rappel. Développement de Taylor au second ordre d'une fonction $F(x)$ au voisinage de x_0 :

$$F(x) \simeq F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}F''(x_0)(x - x_0)^2$$

Défibrilateur cardiaque

Un défibrilateur utilise des condensateurs capables de stocker de l'énergie électrique et de la libérer en un temps très court. On considère un tel appareil modélisé par le circuit représenté sur la figure suivante. Le condensateur C_1 est initialement déchargé alors que le condensateur C_2 est initialement chargé ($q_2(t=0) = q_0$). L'interrupteur K intialement ouvert est fermé à l'instant $t = 0$. On note u la tension entre A et B (tension aux bornes de C_2 ou aux bornes de R_2).

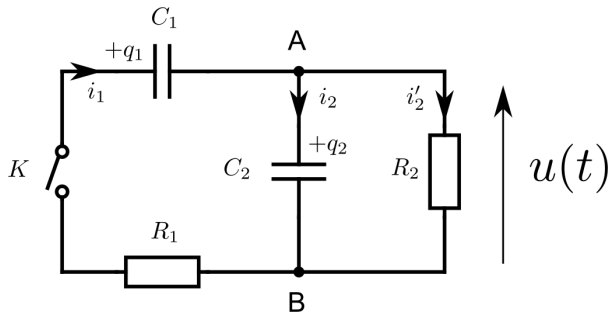

Figure 1: Défibrilateur.

1. En écrivant la loi des mailles (maille de gauche), déterminer une première équation entre u, i_1 et q_1.
2. Ecrire la loi des noeuds en A et en déduire une équation entre dq_1/dt, dq_2/dt et u.
3. Dériver cette dernière et obtenir une troisième relation.
4. Injecter les 2 relations précédentes, issues de la loi des noeuds, dans la première et obtenir finalement une équation différentielle pour u sous la forme :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \alpha\frac{du}{dt} + \beta u = 0,$$

où on exprimera α et β en fonction de C_1, C_2, R_1 et R_2.

5. Rappeler les trois régimes possibles correspondant aux solutions possibles de cette équation différentielle. A quelles conditions (sur α et β) obtient-on l'un ou l'autre de ces régimes ? On donnera explicitement les formes des solutions $u(t)$.
6. Dans le cas du défibrilateur, la décharge doit s'effectuer en un temps le plus court possible. Quel est alors le régime transitoire le plus adapté ?