LDD1 MPSI

Systèmes Oscillants (phys106)
Examen partiel du 23 mars 2022

Durée : 2h

L'utilisation de documents, téléphones portables... est interdite. Les calculatrices sont autorisées.
Les différentes parties du sujet sont indépendantes,

Petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable

On considère une particule de masse m astreinte à se déplacer sur l'axe Ox, avec $x > 0$, le référentiel considéré étant supposé galiléen. La seule force en jeu , dirigée selon l'axe des x, s'écrit :

$$f(x) = -\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^3}$$

où a et b sont des paramètres réels positifs.

1. Déterminer la position d'équilibre x_0 en fonction de a et b.
2. Déterminer l'énergie potentielle $U(x)$ dont dérive $f(x)$. On choisira la constante d'intégration de sorte que $U(x)$ soit nulle à l'infini.
3. Calculer dérivées première et seconde de $U(x)$. Que valent-elles en $x = x_0$? En déduire que la position d'équilibre en x_0 est effectivement stable.
4. Graphe résumé : tracer soigneusement $U(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
5. D'après le rappel donné à la fin de l'énoncé, justifier qu'on puisse écrire au voisinage de x_0 :

   $$U(x) \simeq U_0 + \frac{1}{2}m\omega_0^2(x - x_0)^2$$

   où on précisera U_0 et ω_0 en fonction de a, b et m.
6. Si l'on se limite aux petits mouvements autour de x_0, quelle est l'équation du mouvement approchée ? On pourra poser $\epsilon = x - x_0$. Quelle est la solution générale $\epsilon(t)$ de cette équation ?
7. On suppose qu' à $t = 0$ on écarte la particule de sa position d'équilibre d'une petite quantité a et on la lâche sans vitesse initiale. Déterminer complétement $\epsilon(t)$.

Rappel. Développement de Taylor au second ordre d'une fonction $F(x)$ au voisinage de x_0 :

$$F(x) \simeq F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}F''(x_0)(x - x_0)^2$$

Régime transitoire dans une maille LC

On considère une maille LC supposée tout d'abord idéale (voir figure 1). A $t = 0$, on ferme l'interrupteur et le condensateur est supposé initialement chargé avec une charge q_0. On note $i(t) = dq/dt$ l'intensité du courant dans la maille. Les conditions initiales sont donc $q(t = 0) = q_0$ et $i(t = 0) = 0$.

1. Grâce à la loi des mailles, écrire l'équation différentielle que vérifie $q(t)$. On posera $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.
2. Rappeler pourquoi $i(t)$ et $q(t)$ sont nécessairement continus pour ce circuit.
3. Déterminer $q(t)$ à l'aide des conditions initiales. En déduire $i(t)$.

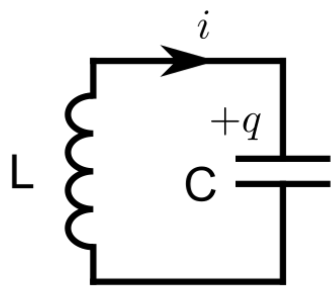

Figure 1: Maille LC idéale.

4. Ecrire les énergies “stockées” dans la bobine et le condensateur respectivement. Evoluent-elles en phase ? en quadrature ? en opposition ? Les tracer en fonction du temps.

   On considère maintenant une maille LC réelle; la bobine possède une résistance interne modélisée par une résistance r en série avec L et le condensateur possède une résistance de fuite modélisée par une résistance R en parallèle de C (voir figure 2) A $t = 0$, on ferme l'interrupteur et le condensateur est supposé initialement chargé avec une charge q_0 (même conditions initiales que pour la maille idéale).

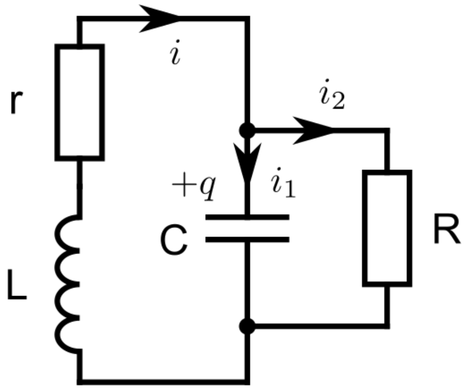

Figure 2: Maille LC réelle.

5. Ecrire les équations obtenues grâce à la loi des mailles appliquée à chacune des mailles L-r-C et C-R. Déduire en particulier de la deuxième que

$$i_1 = RC\frac{di_2}{dt}.$$

6. En utilisant cette relation et la loi des noeuds, éliminer i et i_1 pour déterminer l'équation différentielle que vérifie i_2 :

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{r}{L}\right)\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{r}{R}\right)i_2 = 0$$

7. Discuter les différentes formes possibles des solutions de cette équation (on étudiera l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle).

8. Application numérique : on donne $L \simeq 1$H, $C \simeq 1\mu$F, $r \simeq 1\Omega$ et $R \simeq 10^6\Omega$. Quelle est la forme des solutions pour ce cas ? Si la solution est pseudo-périodique, calculer la pseudo-pulsation et la comparer à ω_0, puis estimer le facteur de qualité des oscillants.