

Systmes oscillants (phys106)
Examen du 11 mai 2020

Durée : 2 (4) heures

Le superatténuateur de Virgo

Virgo est un détecteur d'ondes gravitationnelles, ondes prédites par la Relativité Générale d'Einstein. C'est un gigantesque interféromètre de Michelson (les bras font 3 km !) et les miroirs, parties sensibles de l'instrument doivent être isolées du sol afin de minimiser l'impact de l'agitation sismique. C'est le but du système d'isolation sismique appelé "superatténuateur" et représenté sur la figure 1 ci-dessous. Le but de ce problème est de comprendre le principe de l'isolation sismique.

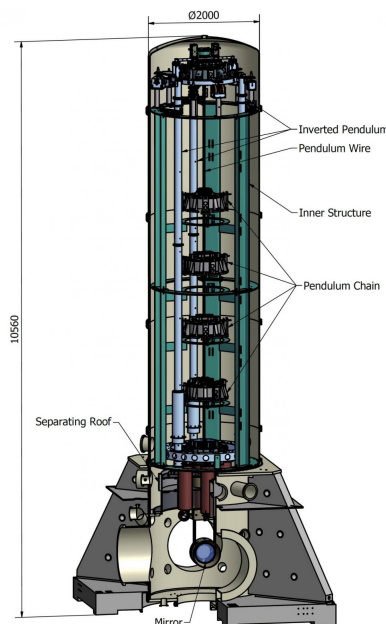


Figure 1: Système d'atténuation sismique utilisé dans Virgo.

On considère donc une masse m suspendue à un ressort idéal dans un premier temps (pas d'amortissement) de raideur k et de longueur à vide l_0 (voir figure 2). Le ressort est attaché à un support horizontal au point O. On note $x(t)$ la position du centre de masse de la masse m et $x_0(t)$ la position du point O. Cette dernière est éventuellement variable et non nulle à cause justement de l'agitation sismique (le support vibre). La longueur du ressort est donc $l(t) = x(t) - x_0(t)$. Attention, l'axe vertical ("axe des x") est orienté vers le bas.

1. Après avoir énuméré les forces en jeu, écrire l'équation du mouvement de la masse m en projection sur l'axe des x.
2. Ecrire l'équation d'équilibre de la masse m , équilibre qui est atteint si le support ne vibre pas (dans ce cas $x_0 = 0$). On notera x_e la position d'équilibre de la masse.
3. Utiliser cette dernière pour simplifier l'équation du mouvement et montrer que

$$m\ddot{x} + k(x - x_e) = kx_0. \quad (1)$$

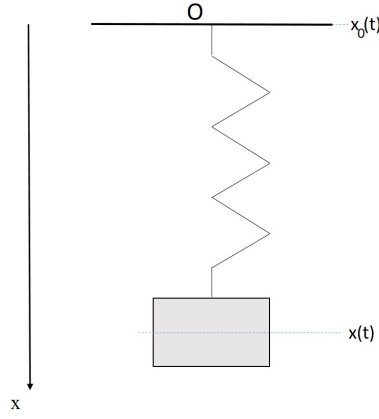


Figure 2: Schéma d'un isolateur sismique simple.

4. On pose $X = x - x_e$. En utilisant la représentation complexe $X(t) \mapsto \underline{X} \exp(j\omega t)$ et $x_0(t) \mapsto \underline{x}_0 \exp(j\omega t)$, montrer que la "fonction de transfert" $G(\omega) = \underline{X}/\underline{x}_0$ entre x_0 et X s'écrit :

$$G(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (2)$$

où l'on précisera l'expression de ω_0 .

5. Comment se comporte $G(\omega)$ si $\omega \gg \omega_0$? Comment peut-on qualifier le filtre mécanique ainsi réalisé ?

On considère maintenant deux filtres en cascade comme représenté sur la figure 3. Les deux ressorts sont identiques (en particulier les mêmes raideurs k) et les deux masses sont aussi identiques (mêmes masses m). On note $X_1(t)$ et $X_2(t)$ leurs positions relativement à leurs positions d'équilibre et $\underline{X}_2$ et $\underline{X}_1$ leurs représentations complexes.

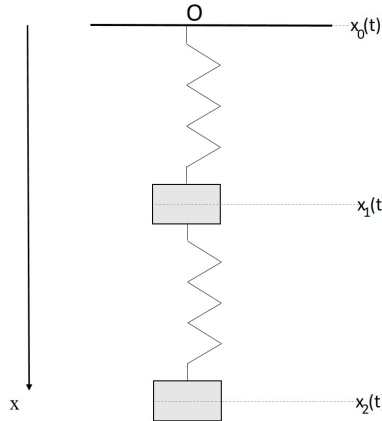


Figure 3: Isolateur avec 2 filtres en cascade.

6. Quelle relation peut-on écrire entre $\underline{X}_2$ et $\underline{X}_1$? Justifier alors que si $\omega \gg \omega_0$:

$$\underline{X}_2 \simeq \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)^2 \underline{x}_0 \quad (3)$$

On s'appuiera sur le résultat de la question (5) et des propriétés des oscillateurs couplés quand ω est très grand devant les pulsations de résonance (proches de ω_0) des oscillateurs couplés.

7. Maintenant si l'on dispose d'une chaîne de N filtres en cascade, écrire la relation entre $\underline{X}_N$, représentation complexe de la position de la dernière masse (i.e. l'un des miroirs de Virgo), et $\underline{x}_0$, quand $\omega \gg \omega_0$.
8. Application numérique. Le superatténuateur de Virgo est conçu de sorte que la fréquence de résonance $f_0 = \omega_0/2\pi$ est relativement basse de façon à fournir un bon amortissement des vibrations sismiques à

partir de quelques Hz (la bande passante du détecteur Virgo est typiquement quelques Hz - quelques kHz). Si $f_0 \simeq 0.6$ Hz, déterminer le nombre N de filtres en cascade nécessaires pour produire une atténuation de 10 ordres de grandeur à $f = 10$ Hz (on prendra évidemment l'expression simplifiée trouvée à la question 5).

9. Si l'on revient à la fonction de transfert mécanique (Eq.2), que se passe-t-il si ω est proche de ω_0 ? Comment s'appelle le phénomène mis en évidence ? $G(\omega)$ peut-il vraiment être infini ? Qu'est ce qui limite en pratique les valeurs de G ?
10. Si la masse m du début est en plus soumise à une force de frottement de type visqueux, $F = -\alpha\dot{x}$, comment modifier l'équation du mouvement (Eq.1) ? De même comment modifier la fonction de transfert $G(\omega)$ (Eq.2) ?

L'ensemble chaîne d'atténuation sismique + miroir est en fait sous ultra-vide. Une force de frottement visqueux n'est donc pas adaptée pour modéliser l'amortissement mécanique. La source principale d'amortissement est ici l'amortissement interne (frictions internes dans les matériaux des ressorts et des points de jonction). Cet amortissement interne peut être modélisé en rajoutant un terme imaginaire à la constante de raideur k . La force de rappel généralisée s'écrit alors :

$$F = -k(1 + j\phi)X.$$

11. Quelle est la dimension de ϕ ? Justifier qu'on l'appelle usuellement "angle de pertes".
12. Comment doit-être alors modifiée l'Eq.2 donnant la fonction de transfert d'un filtre mécanique $G(\omega)$?
13. Calculer $|G|$, le module de G . Tracer $|G|$ en fonction de ω .