LDD1 MPSI

Systemes Oscillants (phys106)
Examen du 17 mai 2022

Durée : 2h

L'utilisation de documents, téléphones portables...est interdite, à l'exception d'un pense-bête format A4 recto. Les calculatrices sont autorisées. Les différentes parties du sujet sont indépendantes,

Etude d'un sismomètre

Un sismomètre est un appareil destiné à enregistrer les vibrations du sol (activité sismique). Il est constitué d'un boitier muni d'une pointe P qui repose sur le sol de sorte que cette pointe suit les mouvements verticaux du sol. Une masse m supposée ponctuelle au point M est suspendue à un ressort attaché au point Q au sommet du boitier (voir la figure 1). Le sismomètre enregistre le mouvement de M relativement au boitier, c'est à dire la distance PM, notée $z(t)$. C'est cette quantité qu'on étudiera dans ce problème.

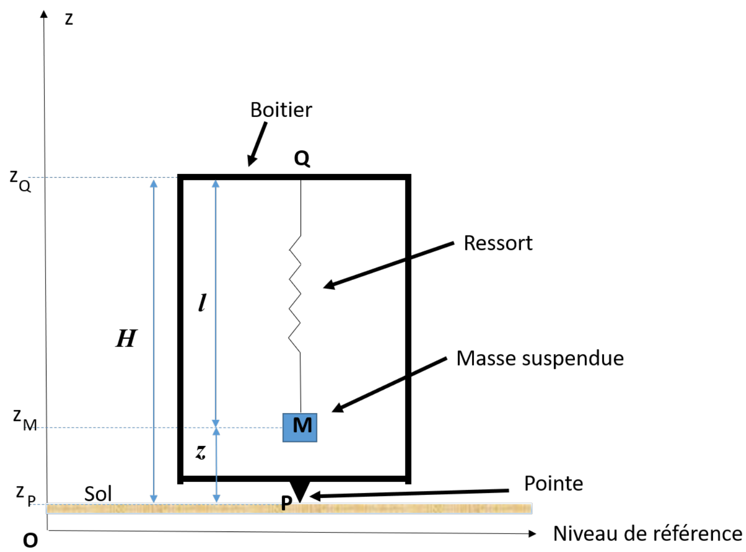

Figure 1: Schéma du sismomètre.

On note $z_M(t)$ l'altitude de la masse suspendue et $z_P(t)$ celle de la pointe. En l'absence de vibrations P est fixe tel que $z_P = 0$. L'altitude du point Q z_Q est telle que $z_Q - z_P = H$, où H est la dimension verticale (constante) du boitier (pointe comprise). Le ressort est de raideur k et de longueur à vide l_0; sa longueur à l'instant t est $l(t) = z_Q(t) - z_M(t) = H - z(t)$. La masse est de plus soumise à une force de frottement visqueux $\vec{f} = \alpha \frac{dl}{dt} \vec{u}_z$. On notera g l'accélération de la pesanteur.

1. Enoncer et écrire précisément les forces subies par la masse suspendue (expressions vectorielles).

2. Etablir la condition d'équilibre de la masse suspendue en fonction de m, g, k, l_0, H et la valeur de z à l'équilibre notée z_e. L'équilibre est atteint si la masse est immobile et si le sol ne vibre pas.

3. Ecrire la relation entre z_M, z_P and z. En déduire l'accélération de M, $\ddot{z}_M$ en fonction de $\ddot{z}_P$ et $\ddot{z}$.

4. Ecrire l'équation du mouvement et la simplifier à l'aide de la relation d'équilibre. On pose $Z = z - z_e$, montrer finalement que :

$$\ddot{Z} + 2\lambda \dot{Z} + \omega_0^2 Z = -\ddot{z}_P. \qquad (1)$$

   où l'on précisera les expressions de ω_0 et de λ.

5. Application numérique. On donne $m \simeq 10$ kg, $k \simeq 10^3$ N.m^{-1} et $\alpha = 210$ N.m^{-1}s; calculer ω_0 et λ. On rappelle le facteur de qualité $Q = \omega_0/2\lambda$. Quelle est la valeur numérique de Q ici ?

   Le mouvement du sol peut être considéré comme la superposition de mouvements sinusoidaux indépendants de différentes pulsations. On considère donc dans la suite l'une de ces composantes à la pulsation ω, soit $z_P(t) = a\cos\omega t$ où a est une amplitude arbitraire.

6. La solution de l'équation (1) avec le second membre sous une forme sinusoidale est la superposition du régime transitoire de courte durée et du régime forcé sinusoidal. A quelle condition le régime transitoire est-il critique ? Quel est l'intérêt de ce régime ? Commenter les valeurs numériques obtenue à la question 5 : dans quel régime est-on ?

   On suppose dans toute la suite que le régime transitoire est terminé et que seul subsiste le régime permanent.

7. En utilisant la représentation complexe $Z(t) \mapsto \underline{Z}\exp(j\omega t)$ et $z_P(t) \mapsto a\exp(j\omega t)$, déterminer la "fonction de transfert" $\underline{G}(\omega) = \underline{Z}/a$ exprimant la réponse Z à un mouvement sinusoidal du sol.

8. En déduire le module $G(\omega) = |\underline{G}(\omega)|$. Montrer que $G(\omega)$ admet un maximum si $Q > 1/\sqrt{2}$, où $Q = \omega_0/2\lambda$, et que ce maximum est atteint pour
$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 1/2Q^2}}.$$
   On pourra étudier $1/G(\omega)^2$ et poser $x = \omega_0^2/\omega^2$.

9. Tracer soigneusement $G(\omega)$ pour $Q > 1/\sqrt{2}$ et pour $Q < 1/\sqrt{2}$.

10. Dans quelle bande de fréquence le sismomètre suit-il fidèlement les vibrations du sol ? Est-ce dépendant de la valeur du facteur de qualité ? Quel est l'intérêt de la valeur choisie à la question 5 pour le facteur de qualité ?

Filtre RLC

On considère le circuit RLC série alimentée par un générateur de tension sinuoïdale $E = E_0\sin\omega t$ (figure 2) et on note U la tension aux bornes de la résistance. On posera $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $Q = L\omega_0/R$. On s'intéressera uniquement au régime permanent (forcé sinusoïdal).

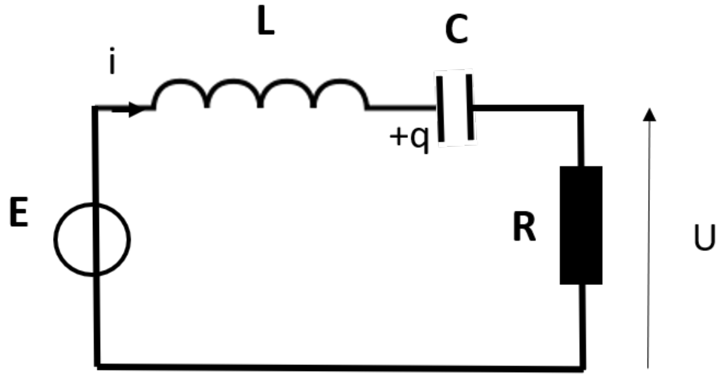

Figure 2: Circuit RLC série.

1. Déterminer l'équation différentielle que vérifie $U(t)$.

2. En utilisant la représentation complexe, déterminer $\underline{U}$ en fonction de Q, E_0 et $x = \omega/\omega_0$.

3. On note $\underline{H} = \underline{U}/E_0$ la fonction de transfert du filtre RLC et on pose $G = |\underline{H}|$. Montrer que G passe par un maximum pour une pulsation que l'on précisera. Ce maximum existe-t-il quelque soit Q ? Comment nomme-t-on le phénomène mis en évidence ?

4. Tracer $G(x)$. Quelle est la nature du filtre considéré ?

5. Déterminer finalement sa bande passante.