LDD1 MPSI

Systèmes Oscillants (OLPH155d)

Examen du 16 mai 2023

Durée : 2h

L'utilisation de documents, téléphones portables…est interdite. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Circuits couplés par induction mutuelle : régime libre.

On considère deux mailles LC identiques idéales et couplées par induction mutuelle (voir figure 1).

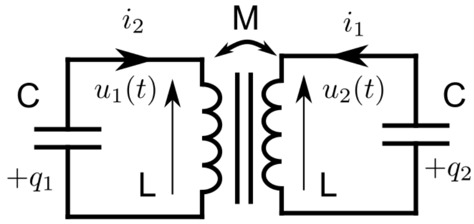

Figure 1: Deux mailles LC identiques couplées par induction mutuelle.

Les deux bobines étant proches, elles sont en interaction magnétique (on verra au S3 qu'une bobine parcourue par un courant génère un champ magnétique). Ceci se traduit par le fait que la tension aux bornes de l'une des bobines dépend aussi des variations de courant dans l'autre bobine. Ainsi on écrira, avec les notations de la figure 1 :

$$u_1 = L\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$
$$u_2 = L\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

où M est le coefficient d'induction mutuelle entre les deux bobines. Si on éloigne les bobines l'un de l'autre, M tend vers 0 et on retrouve bien entendu les expressions des tensions habituelles.

A $t = 0$, les circuits sont fermés (interrupteurs non représentés sur la figure), la capacité de gauche étant chargée ($q_1(t = 0) = q_0$) et celle de droite déchargée ($q_2(t = 0) = 0$). On posera dans la suite $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

1. Ecrire les lois des mailles pour chacune des mailles LC et on déduire les deux équations différentielles que vérifient $q_1(t)$ et $q_2(t)$. Qu'ont-elles de remarquable ?

2. Faire la somme des deux équations et poser $S(t) = q_1(t) + q_2(t)$. Quelle est la nature de l'équation différentielle que vérifie $S(t)$? Exprimer la pulsation ω_s apparaissant dans cette équation en fonction de ω_0 et du rapport $a = L/M$.

3. Faire la différence des deux équations et poser $D(t) = q_1(t) - q_2(t)$. Quelle est la nature de l'équation différentielle que vérifie $D(t)$? Exprimer la pulsation ω_d apparaissant dans cette équation en fonction de ω_0 et du rapport $a = L/M$.

4. Montrer que $\omega_s < \omega_0 < \omega_d$.

5. Les équations que vérifient $S(t)$ et $D(t)$ sont elles découplées ? Ecrire les solutions générales pour $S(t)$ et $D(t)$.

6. Expliquer pourquoi les conditions initiales pour les deux intensités sont nécessairement : $i_1(t = 0) = i_2(t = 0) = 0$. Ecrire ensuite explicitement les conditions initiales pour S et D et leurs dérivées. En déduire les solutions explicites de $S(t)$ et $D(t)$ en fonction de q_0, ω_s, ω_d et t.

7. En déduire les expressions de $q_1(t)$ et $q_2(t)$ en fonction de q_0, ω_s, ω_d et t.
8. Dans le cas particulier d'un couplage faible, $a = L/M >> 1$, que deviennent ω_s et ω_d en fonction de ω_0 et a, au premier ordre en a ?
9. Montrer qu'alors on peut écrire :

$$q_1(t) \simeq q_0 \cos(\omega_0 t) \cos(\frac{\omega_0 t}{2a})$$
$$q_2(t) \simeq q_0 \sin(\omega_0 t) \sin(\frac{\omega_0 t}{2a})$$

(voir le rappel de trigonométrie en fin d'énoncé). Comment appelle-t-on le phénomène mis en évidence ?

10. Tracer les fonctions $q_1(t)$ et $q_2(t)$. Comment en déduire une mesure du coefficient M ?

Rappels.

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

Circuits couplés par induction mutuelle : régime forcé.

On considère le même système que précédemment mais la maille de gauche est maintenant alimentée par un générateur de tension sinusoidale de pulsation ω, $U(t) = U_0 \cos \omega t$ (voir la figure 2).

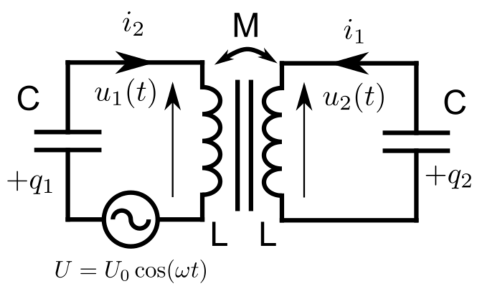

Figure 2: Circuits couplés par mutuelle induction en régime sinusoidal.

1. Comme dans la première partie, écrire les lois des mailles et en déduire les équations différentielles que vérifient $q_1(t)$ et $q_2(t)$.
2. En utilisant la représentation complexe $q_1(t) \mapsto \underline{q_1} \exp(j\omega t)$, $q_2(t) \mapsto \underline{q_2} \exp(j\omega t)$ et $U(t) \mapsto U_0 \exp(j\omega t)$, déduire de la question précédente le système linéaire que satisfont les deux variables complexes $\underline{q_1}$ et $\underline{q_2}$.
3. Résoudre ce système (on pourra exprimer $\underline{q_2}$ en fonction de $\underline{q_1}$ dans l'une des équations et remplacer dans l'autre) et montrer qu'on obtient :

$$\underline{q_1} = \frac{U_0}{L} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_s^2 - \omega^2)(\omega_d^2 - \omega^2)}$$
$$\underline{q_2} = \frac{M}{L} \frac{U_0}{L} \frac{\omega^2}{(\omega_s^2 - \omega^2)(\omega_d^2 - \omega^2)}$$

4. Tracer soigneusement les modules des "fonctions de transfert" $|\underline{q_1}(\omega)|$ et $|\underline{q_2}(\omega)|$. Que se passe-t-il en ω_s ? En ω_d ? En ω_0 ? Comment seraient changées ces courbes si on rajoutait dans chacune des mailles une résistance en série ?