

Systèmes oscillants (Phys106)

Examen du 20 mai 2019

Durée : 2h

Documents de toutes sortes interdits. Calculatrices autorisées.

Exercice 1 : circuit RLC

On se propose d'étudier le montage suivant, fig.1 (que vous aurez reconnu) :

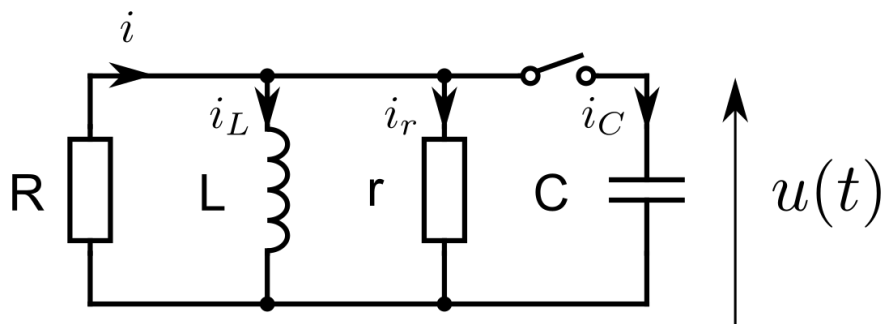


Figure 1: Schéma du montage étudié dans l'exo 1.

A l'instant $t = 0$ on ferme l'interrupteur, le condensateur C est initialement chargé avec une tension E .

Partie 1

1. Que valent les courants i , i_L , i_r et i_C à $t = 0$?
2. Que vaut $u(0)$?
3. Établissez l'équation différentielle que vérifie $u(t)$.
4. Exprimez le facteur d'amortissement λ , la pulsation propre du système ω_0 et la pseudo pulsation Ω (si elle existe).
5. Quels sont les 3 régimes possibles et leurs conditions ?

Partie 2

Vous avez vu en TP que les AOP sont très utiles. Ils permettent entre autres de créer des résistances négatives.

1. Exprimez $u(t)$ lorsque $r = -R$?
2. Quel est le régime correspondant ? (Exprimez la période des oscillations et le temps pendant lequel elles sont maintenues)
3. D'où vient l'énergie pour entretenir ce régime ?
4. Que se passerait-il si $r \ll -R$? A votre avis, est ce possible ? Commentez ?

Exercice 2 : oscillations d'une molécule diatomique

On considère une molécule diatomique formée d'un atome A de masse m_a et d'un atome B de masse m_b . Les deux atomes forment une molécule grâce à une liaison covalente. La partie 1 s'intéresse à un modèle de liaison covalente et la partie 2 à un modèle classique d'oscillations de la molécule de monoxyde de carbone CO. Les deux parties sont essentiellement indépendantes.

Partie 1 : potentiel de Morse

Le potentiel de Morse est un modèle empirique d'énergie potentielle d'interaction entre deux atomes distants de r et formant une liaison covalente. Il est de la forme :

$$U(r) = U_0 \left(\exp(-2a(r - r_e)) - 2 \exp(-a(r - r_e)) \right),$$

où le premier terme est répulsif (à courte portée) et le second attractif (à plus longue portée).

1. Quelle sont les dimensions de a et de U_0 ?
2. Montrer que $U(r)$ possède un minimum en $r = r_e$. Que peut-on dire de l'état du système si $r = r_e$?
3. Tracer la fonction $U(r)$ en fonction de r .
4. Etudier les petits mouvements autour de la position $r = r_e$. On posera $x = r - r_e$ et on effectuera un développement de Taylor au second ordre de $U(r)$ au voisinage de r_e (c.a.d. au voisinage de $x = 0$). On montrera qu'au voisinage de r_e on pourra assimiler $U(r)$ à l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique avec une constante de raideur équivalente que l'on notera k . On exprimera k en fonction de U_0 et a .

Partie 2 : vibrations d'une molécule diatomique

La molécule AB est modélisée par les deux masses m_a et m_b mobiles sur l'axe Ox reliées par un ressort de longueur à vide nulle et de raideur k , comme décrit dans la partie précédente. Les seules forces en jeu sont donc les forces de rappel qu'exerce chacun des atomes sur l'autre. On note x_a la position de l'atome A et x_b celle de B. La longueur du ressort équivalent intervenant dans ces forces de rappel s'écrit donc en fonction de $x_b - x_a$ (ou l'inverse !).

1. Ecrire les équations du mouvement en projection sur Ox pour chacun des atomes. Les deux équations sont couplées, le mouvement d'un atome dépendant du mouvement de l'autre à travers les forces de rappel.
2. On pose $s = m_a x_a + m_b x_b$ et $d = x_b - x_a$. Dédurre de la question précédente les équations différentielles que vérifient s et d . A-t-on découplé le problème avec ces nouvelles variables ?
3. Donner la forme générale de la solution de l'équation différentielle que vérifie d . Quelle est la pulsation propre des oscillations de la molécule. On pourra poser $\mu = m_a m_b / (m_a + m_b)$. Question bonus : comment s'appelle μ ?
4. Application numérique pour CO : on donne $k = 1856$ N/m, masse molaire du carbone = 12 g.mol⁻¹, masse molaire de l'oxygène = 16 g.mol⁻¹ et nombre d'Avogadro $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ mol⁻¹. Calculer la fréquence propre des vibrations de la molécule de CO. Quelle est la partie du spectre électromagnétique correspondante ?
5. Quelle est la solution de l'équation différentielle pour s ? Comment interprétez vous ce résultat ?