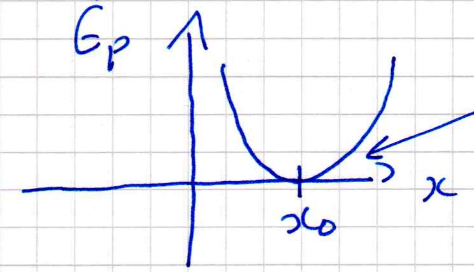
II Anharmonicités

1) Premier terme au delà de l'ordre harmonique

a) Mise en équation

On a vu OH $\longleftrightarrow$ approximation des fonds de puits de potentiel (position d'équilibre stable)



approx harmonique (parabolique) pour le voisinage de x_0

Comme indiqué par le dév. de Taylor à l'ordre (non nul) le + bas :

$$E_p(x) \simeq E_p(x_0) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_0} (x-x_0)^2$$

+ choix origine des axes et origine des énergies :
on peut se ramener à $E_p(x) \simeq \frac{1}{2} k x^2$

$\left(\text{avec } k = \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_0} \right)$

et ensuite l'énergie totale $E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2$

d'où l'on tire l'éq^{n} du mvt par dérivation / temps :

$$0 = m\ddot{x} + kx$$

soit $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Maintenant ce n'est qu'une approximation !

(valide si on autorise une certaine précision à la détermination de $x(t)$)

Si on va + loin ds le dév. de Taylor :

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{6} \left.\frac{d^3 E_p}{dx^3}\right|_{x=0} (x)^3$$

(tjs avec le choix d'origine des x ~~au~~ minimum de E_p et choix d'origine des énergies en $E_{p\,min}$.)

On réécrit $E_p(x)$ sous une forme (équivalente) mais plus pratique :

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{3} \alpha k x^3$$

1er terme non harmonique (ou "anharmonique")

où le coef α englobe la dérivée 3ème et une partie du coef numérique.

(exactement : $-\frac{1}{3} \alpha k = \frac{1}{6} \left.\frac{d^3 E_p}{dx^3}\right|_{x=0}$

$$\hookrightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \left.\frac{d^3 E_p}{dx^3}\right|_{x=0} \Big/ \left.\frac{d^2 E_p}{dx^2}\right|_{x=0}$$
)

On suppose que l'effet du nouveau terme en x^3 est "faible" : $\left|\frac{1}{3} \alpha k x^3\right| \ll \left|\frac{1}{2} k x^2\right|$

soit $\underline{|\alpha x| \ll 1}$

On a alors $E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{3}\alpha k x^3$

et en dérivant / temps :

$$0 = m\ddot{x} + kx - \alpha k x^2$$

soit $m\ddot{x} + kx = \alpha k x^2$

ou encore $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\alpha k}{m} x^2$

$$\boxed{\underbrace{\ddot{x} + \omega_0^2 x}_{\text{eq}^{n}\text{ de l'OH habituel}} = \underbrace{\alpha \omega_0^2 x^2}_{\text{nouveau terme}}}$$

eq^{n} de l'OH habituel

nouveau terme
↪ "perturbation" de l'OH classique

↳ "calcul de perturbation"

b) Résolution par la méthode des perturbations

Méthode : on va chercher la solution sous la forme :

$$x(t) = x^{(0)}(t) + x^{(1)}(t)$$

ordre 0 (sol^{n} de l'OH non perturbé)

ordre 1 (correction due au terme de perturbation)

avec $x^{(1)} \ll x^{(0)}$

Evidemment si $\alpha \to 0$ alors $x(t) \to x^{(0)}(t)$
$(x^{(1)}(t) \to 0)$

- $x^{(0)}(t)$ est la solⁿ de l'éqⁿ non perturbée $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ et est donc de la forme : $x^{(0)}(t) = a \cos \omega_0 t$
(avec choix judicieux de l'origine des temps $a\cos(\omega_0 t + \varphi) = a \cos(\omega_0(t-t_0))$
et $t - t_0 \to t$)

- connaissant $x^{(0)}(t)$, on injecte $x^{(0)} + x^{(1)}$ ds l'éqⁿ perturbée en ne gardant que les termes d'ordre ≤ 1 de façon à calculer $x^{(1)}$.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha \omega_0^2 x^2$$

$$\hookrightarrow \quad \ddot{x}^{(0)} + \ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 (x^{(0)} + x^{(1)}) = \alpha \omega_0^2 (x^{(0)} + x^{(1)})^2$$

soit $$\underbrace{\ddot{x}^{(0)} + \omega_0^2 x^{(0)}}_{=0} + \ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = \alpha \omega_0^2 \left(x^{(0)2} + 2x^{(0)}x^{(1)} + x^{(1)2} \right)$$

dans le membre de droite : α est d'ordre 1 (c'est le coef. de la perturbation), $x^{(0)2}$ d'ordre 0, $x^{(0)}x^{(1)}$ d'ordre 1 et $x^{(1)2}$ d'ordre 2

il ne faut garder que les termes d'ordre ≤ 1 :
il ne reste donc que $\underline{\underline{\alpha \omega_0^2 x^{(0)2}}}$

- dans le membre de gauche $\left(\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 \cancel{t}\, x^{(1)}\right)$
il n'y a que des termes d'ordre 1 : <u>OK</u>

il reste finalement :

$$\boxed{\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} \simeq \alpha\, \omega_0^2\, x^{(0)\,2}}$$

avec $x^{(0)}(t) = a \cos \omega_0 t$:

$$x^{(0)}(t)^2 = a^2 \cos^2 \omega_0 t$$
$$= a^2 \left(\frac{1 + \cos 2\omega_0 t}{2}\right)$$

on a donc

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = \frac{\alpha\, \omega_0^2 a^2}{2} \left(1 + \cos 2\omega_0 t\right)$$

Que reconnait-on ?

éq^{n} d'OH avec 2^{nd} membre sinusoidal
→ <u>OH régime forcé</u> !

avec 2 termes :

- 1 à fréquence (pulsation) nulle
- l'autre à la pulsation $2\omega_0$

On superpose les 2 solutions (particulières) correspondant à ces 2 second membres

– Sol. Part. associée à $\frac{\alpha\omega_0^2 a^2}{2}$:

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = \frac{\alpha\omega_0^2 a^2}{2}$$

$$\hookrightarrow x^{(1)} = \frac{\alpha a^2}{2} \quad (\text{cte})$$

– Sol. Part. associée à $\frac{\alpha\omega_0^2 a^2}{2}\cos 2\omega_0 t$:

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = \frac{\alpha\omega_0^2 a^2}{2}\cos 2\omega_0 t \qquad (*)$$

on cherche $x^{(1)}$ sous la forme $e^{j\omega_0 t}$ (ou $\cos 2\omega_0 t$)

(cf passage en $\mathbb{C}$) | en fait + simple ici !

$(**)$ $x^{(1)} = A\cos 2\omega_0 t$ ds $(*)$:

$$\hookrightarrow \ddot{x}^{(1)} = -(2\omega_0)^2 A\cos 2\omega_0 t$$

ds $(*)$: $-4\omega_0^2 A\cos 2\omega_0 t + \omega_0^2 A\cos 2\omega_0 t = \frac{\alpha\omega_0^2 a^2}{2}\cos 2\omega_0 t$

$$\Rightarrow -3\omega_0^2 A = \frac{\alpha\omega_0^2 a^2}{2}$$

$$\text{soit } A = -\frac{\alpha a^2}{6}$$

$$\hookrightarrow x^{(1)} = \frac{-\alpha a^2}{6}\cos 2\omega_0 t$$

La solution totale pour $x^{(1)}$ est finalement :

$$x^{(1)} = \frac{\alpha a^2}{2} + \left(-\frac{\alpha a^2}{6}\cos 2\omega_0 t\right)$$

ou encore $x^{(1)} = \frac{\alpha a^2}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\cos 2\omega_0 t\right)$

On obtient final^t $x(t)$ à l'ordre 1 inclus :

$$x(t) = x^{(0)}(t) + x^{(1)}(t)$$

$$\hookrightarrow \boxed{x(t) = a\cos\omega_0 t + \frac{\alpha a^2}{2} - \frac{\alpha a^2}{6}\cos 2\omega_0 t}$$

terme harmonique
sol^n de l'OH idéal
pulsation $\underline{\underline{\omega_0}}$

corrections dues à
l'anharmonicité
pulsations 0 et $2\omega_0$
ie $\omega_0 - \omega_0$ et $\omega_0 + \omega_0$

3 pulsations : ω_0 et $\omega_0 \pm \omega_0$

$\uparrow$

GENERATIONS D'HARMONIQUES

($\hookrightarrow$ non linéarité de l'eq^n diff.)

Pratique commune ds le monde des lasers
par exemple.
(cristal non linéaire $\rightarrow$ doublage de fréquence)

2) ordre suivant

on continue !

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{3} \alpha k x^3 - \frac{1}{4} \beta k x^4 \dots$$

$\rightarrow$ éq^{n} du mvt :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha \omega_0^2 x^2 + \beta \omega_0^2 x^3$$

Même méthode mais du coup en allant à l'ordre 2.

on suppose évidemment que $\beta \omega_0^2 x^3 \ll \alpha \omega_0^2 x^2 \ll \omega_0^2 x$

soit $\quad \beta x^2 \ll \alpha x \ll 1$

et on pose $x(t) = x^{(0)}(t) + x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t)$

avec $x^{(2)} \ll x^{(1)} \ll x^{(0)}$

on résoud l'ordre 0 et l'ordre 1 comme en (1) : $\quad x^{(0)}(t) = a \cos \omega_0 t$

et $\quad x^{(1)}(t) = \frac{\alpha a}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \cos 2\omega_0 t\right)$

on écrit l'équation en $x^{(2)}$ en ne gardant que les termes d'ordre 2

c'est à dire :

$$\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = \alpha \omega_0^2 \left(2 x^{(0)} x^{(1)}\right) + \beta \omega_0^2 x^{(0)3}$$

ordre 2 ordre 1 ordre 0 × ordre 1 ordre 2 ordre 0

$$\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = 2\alpha\omega_0^2 x^{(0)} x^{(1)} + \beta\omega_0^2 x^{(0)3}$$

avec $x^{(0)}(t) = a\cos\omega_0 t$

$$x^{(1)}(t) = \frac{\alpha a}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\cos 2\omega_0 t\right)$$

donc
$$x^{(0)}x^{(1)} = \frac{\alpha a^2}{2}\cos\omega_0 t\left(1 - \frac{1}{3}\cos 2\omega_0 t\right)$$
$$= \frac{\alpha a^2}{2}\left[\cos\omega_0 t - \frac{1}{3}\cos\omega_0 t\cos 2\omega_0 t\right]$$
$$= \frac{\alpha a^2}{2}\left[\cos\omega_0 t - \frac{1}{6}\left(\cos\omega_0 t + \cos 3\omega_0 t\right)\right]$$

et $x^{(0)3} = a^3\cos^3\omega_0 t = a^3\left(\frac{3}{4}\cos\omega_0 t + \frac{1}{4}\cos 3\omega_0 t\right)$

le 2nd membre comprend donc des termes en $\cos\omega_0 t$ et $\cos 3\omega_0 t$

$$\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = (\ldots)\cos\omega_0 t + (\ldots)\cos 3\omega_0 t$$

OH forcé $\rightarrow x^{(2)}(t)$ superposition de termes aussi en $\cos\omega_0 t$ et $\cos 3\omega_0 t$

↓

apparition de l'harmonique d'ordre 3

De façon + g^ale : $|\omega_0 \pm 2\omega_0|$ → ω_0, → $3\omega_0$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right)$

Bilan ordre 2 pour les pulsations :

ordre 0	ordre 1 (x^3)	ordre 2 (x^4)
ω_0	$\lvert\omega_0 \pm \omega_0\rvert \to 0$, $\to 2\omega_0$	$\lvert\omega_0 \pm 2\omega_0\rvert \to \omega_0$, $\to 3\omega_0$
	↓ génération de l'harmonique d'ordre 2	↓ génération de l'harmonique d'ordre 3

3) <u>Généralisation</u>

- perturbation en x^n (ds $E_p(x)$) $\rightarrow$ génération de l'harmonique d'ordre <u>$n-1$</u> (~~[illegible]~~)

- non linéarité en $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n} \alpha_n \omega_0^2 x^n$ ds E_p

$\rightarrow$ génération des harmoniques $2\omega_0, 3\omega_0, \ldots (n-1)\omega_0$

$|\omega_0 \pm k\omega_0|$