

Examen

Durée : 2h

I. Cours : résonance d'amplitude.

On considère un système oscillant de pulsation naturelle ω_0 et de facteur de qualité Q entretenu par une source à la pulsation ω .

- 1) Justifier que l'équation de l'oscillateur forcé peut s'écrire sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = E_0 \cos(\omega t)$$

- 2) Ecrire l'amplitude complexe $\underline{x}$ en fonction de ω , ω_0 , Q et E_0 .

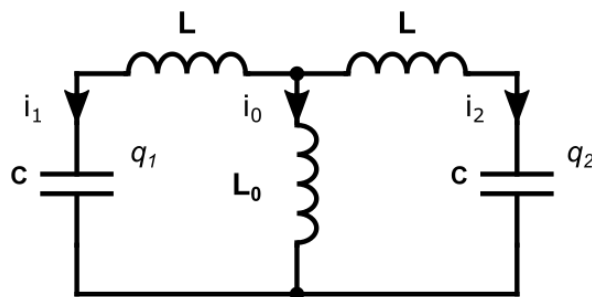
- 3) On pose $A(\omega) = |\underline{x}|$.

- $A(\omega)$ possède-t-elle un maximum (résonance) pour tout Q ?
- Comparer la pulsation de résonance (si elle existe) à ω_0 .
- Tracer l'allure de la fonction $A(\omega)$.

[pour les questions 3a) et 3b) on ne demande pas de justification détaillée]

II. Mailles LC couplées par une inductance.

On considère le circuit de la figure ci-dessous. A l'instant $t = 0$ on ferme l'interrupteur, la capacité C de la maille de gauche étant initialement chargée ($q_1(t = 0) = q_0$), celle de gauche étant déchargée ($q_2(t = 0) = 0$)



- Que valent les intensités i_0 , i_1 et i_2 à l'instant $t = 0$?
- Etablir les deux équations différentielles (couplées) que vérifient q_1 et q_2 .
- On pose $S(t) = q_1(t) + q_2(t)$ et $D(t) = q_1(t) - q_2(t)$. Montrer à partir du système obtenu à la question précédente que $S(t)$ et $D(t)$ vérifient deux équations différentielles indépendantes de type « oscillateur harmonique » avec deux pulsations propres que l'on notera ω_+ et ω_- .

- 4) Exprimer les pulsations propres du circuit en fonction de L, L_0 et C .
- 5) Déterminer $S(t)$ et $D(t)$ en fonction de t, q_0, ω_+ et ω_- .
- 6) En déduire $q_1(t)$ et $q_2(t)$ puis $i_1(t)$ et $i_2(t)$.
- 7) On suppose maintenant que $L_0 \ll L$. On note $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $\varepsilon = L_0/L$. Ecrire ω_+ et ω_- en fonction de ω_0 et ε (au 1^{er} ordre).
- 8) Montrer alors que $i_1(t) \approx i_0 \sin(\omega_0 t) \cos(\varepsilon \omega_0 t/2)$ où on exprimera i_0 en fonction de ω_0 et q_0 .
- 9) Tracer $i_1(t)$. Comment s'appelle le phénomène mis en évidence ?

III. Non-linéarité et génération d'harmoniques

On considère une particule de masse m astreinte à se déplacer uniquement sur l'axe Ox (problème à une dimension). On suppose que la seule force en jeu dérive de l'énergie potentielle :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{3}\alpha x^3.$$

On reconnaît un potentiel d'oscillateur harmonique plus une correction en x^3 (terme suivant du développement de Taylor de l'énergie potentielle autour d'une position d'équilibre stable par exemple).

- 1) Quelle est la dimension de α ?
- 2) Ecrire la force qui dérive de $E_p(x)$.
- 3) Montrer que l'équation du mouvement peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon x^2 \quad (1)$$

où on exprimera ω_0 et ϵ en fonction des données.

- 4) On suppose, dans un premier temps, que le terme quadratique (ϵx^2) est négligeable ($\epsilon \rightarrow 0$). Quelle est la forme générale de la solution de l'équation correspondante ?
- 5) Déterminer complètement cette solution avec le choix de conditions initiales $x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = 0$.
- 6) On va chercher la solution de (1) sous la forme $x(t) = x^{(0)}(t) + x^{(1)}(t)$ où $x^{(0)}(t)$ est la solution d'ordre zéro déterminée en 4) et 5) et $x^{(1)}(t)$ est une correction du premier ordre due au terme ϵx^2 dans (1). En injectant $x^{(0)}(t) + x^{(1)}(t)$ dans (1) et en ne gardant que les termes d'ordre 1 montrer que

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = \epsilon x^{(0)2} \quad (2)$$

- 7) Montrer que la solution particulière de (2) est la superposition d'un terme de pulsation nulle et d'un terme de pulsation $2\omega_0$. Justifiez alors le terme « génération d'harmoniques ».

Formulaire potentiellement utile

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$