

Devoir maison ②

2019

1) Un mouvement harmonique est de la forme :

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t + \phi)$$

soit :

$$\dot{x}(t) = -C\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$\ddot{x}(t) = -C\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$\ddot{\dot{x}}(t) = C\omega_0^3 \sin(\omega_0 t + \phi)$$

donc

$$(\ddot{x}(t))^2 = C^2 \omega_0^4 \cos^2(\omega_0 t + \phi)$$

$$\dot{x} \ddot{\dot{x}}(t) = -C^2 \omega_0^4 \sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

en moyenne $\langle \cos^2(\omega_0 t + \phi) \rangle_t = \frac{1}{2}$

$$\langle \sin^2(\omega_0 t + \phi) \rangle_t = \frac{1}{2}$$

$$\text{alors } \langle \ddot{x}^2 \rangle_t = -\langle \dot{x} \ddot{\dot{x}} \rangle_t$$

On considère les valeurs moyennes car nous nous intéressons à la puissance rayonnée moyenne et non instantanée. La position réelle de l'électron n'est pas intéressante ici.

2) Soit $\vec{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$, avec v la vitesse
donc $\frac{q^2 \ddot{r}^2}{64\pi\epsilon_0 c^3} = F \ddot{r}$

ici il n'y a qu'une force et une trajectoire rectiligne, donc $\vec{F}$ est dans la direction et de sens de la vitesse $\vec{v}$

soit:
$$F = \frac{q^2 \ddot{r} \ddot{r}}{64\pi\epsilon_0 c^3 \ddot{r}} = \frac{q^2 \ddot{r}}{64\pi\epsilon_0 c^3}$$
$$= m \frac{q^2}{64\pi\epsilon_0 c^3 m} \ddot{r} = mK \ddot{r}$$

avec $K = \frac{q^2}{64\pi\epsilon_0 m c^3}$

3) Soit $r = r_0 e^{i\omega t}$
 $\Rightarrow \ddot{r} = -\omega^2 r_0 e^{i\omega t}$
 $\ddot{\ddot{r}} = -i\omega^3 r_0 e^{i\omega t}$

donc $-\omega^2 r_0 e^{i\omega t} + \omega^2 r_0 e^{i\omega t} + K i\omega^3 r_0 e^{i\omega t} = 0$

soit $\omega_0^2 - \omega^2 + Ki\omega^3 = 0$

4) On pose $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ avec $\delta\omega \ll \omega_0$
alors on a:

$$\omega_0^2 - \omega_0^2 - \delta\omega^2 - 2\omega_0 \delta\omega + Ki(\omega_0 + \delta\omega)^3 = 0$$

$$\Rightarrow Ki(\omega_0 + \delta\omega)^3 = \delta\omega(2\omega_0 + \delta\omega)$$

$$\Rightarrow \delta\omega \approx \frac{Ki(\omega_0 + \delta\omega)^3}{2\omega_0 + \delta\omega} \approx \frac{Ki\omega_0^2}{2}$$

au final:

$$\overline{\omega} = i \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 mc^3} \times \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m \pi^3}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m \pi^3}}$ et π le rayon de Bohr.

$$\text{donc } \overline{\omega} = i \frac{q^4}{48\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 c^3 \pi^3}$$

$$\begin{aligned} 5) \text{ On a } r(t) &= r_0 e^{i\omega_0 t - \Gamma t} = r_0 e^{i\omega_0 t} e^{-\Gamma t} \\ &= r_0 e^{i\omega_0 t} e^{-\Gamma t} \end{aligned}$$

Le temps caractéristique d'émission est $\frac{1}{\Gamma} = \tau$

$$\tau = \frac{48\pi^2 \epsilon_0^2 c^3 \pi^3 m^2}{q^4} \approx 1.8 \cdot 10^{-10} \text{ s.}$$

Le temps de relaxation du moyeu d'hydrogène est environ 10^{-8} s. donc le calcul classique n'est pas aberrant. De plus on a $\Gamma \gg \omega_0$ donc l'approximation de la moyenne est correcte (beaucoup d'oscillations)