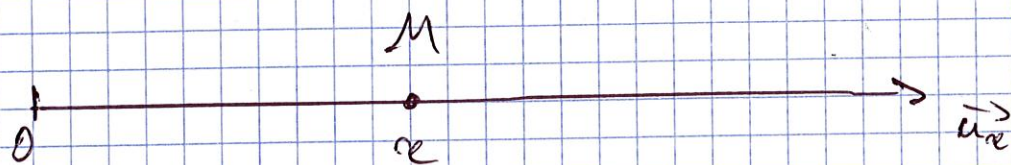


Devoir maison (1) 2019



On a :

$$U(r) = \frac{1}{2} k r^2 + \frac{A}{r} \quad (k, A \in \mathbb{R}^+)$$

l'énergie potentielle de la masse M.

1) position d'équilibre $\Rightarrow \frac{dU(r)}{dr} = 0$

La position d'équilibre est stable si c'est un puits de potentiel: $\frac{d^2U(r)}{dr^2} > 0$ (minimum local)

donc que $\frac{d^2U(r)}{dr^2} > 0$

Calculons :

$$\frac{dU(r)}{dr} = k r - \frac{A}{r^2}$$

on veut: $\frac{dU(r)}{dr} = k r_0 - \frac{A}{r_0^2} = 0$

$$\Rightarrow r_0^3 = \frac{A}{k}$$

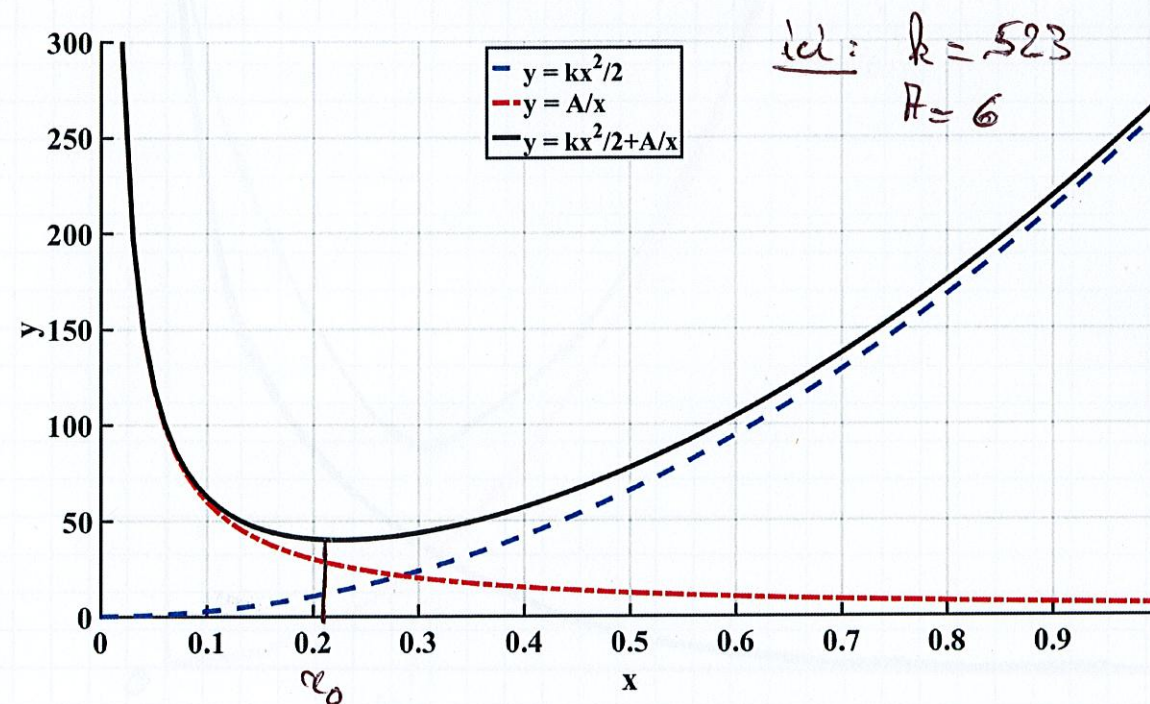
donc $r_0 = \sqrt[3]{\frac{A}{k}}$; existe car $\sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $r \mapsto \sqrt[3]{r}$

$$\frac{d^2U(r)}{dr^2} = k + \frac{2A}{r^3}$$

donc $\frac{d^2U(r_0)}{dr^2} = k + \frac{2A}{r_0^3} = k + \frac{2A}{(\sqrt[3]{\frac{A}{k}})^3} = k + 2k = 3k > 0$
car $k \in \mathbb{R}^+$

Donc la position d'équilibre est stable si $k \neq 0$

2)



$$3) U(r) = U(r_0) + (r-r_0) \frac{dU(r)}{dr} + \frac{(r-r_0)^2}{2} \frac{d^2U(r)}{dr^2} + o((r-r_0)^2)$$

$$\approx U(r_0) + \frac{3}{2} k (r-r_0)^2$$

$$\left(\approx 3k^{1/3} A^{2/3} - 3k^{1/3} A^{1/3} r + \frac{3}{2} k r^2 \right)$$

On pose $X = r - r_0 \Rightarrow \ddot{X} = \ddot{r}$

4) La force F dérive du potentiel donc :

$$F = - \frac{dU(r)}{dr} = -3k(r-r_0) = -3kX$$

5) En appliquant le principe fondamental de la dynamique on obtient :

$$\ddot{r} = - \frac{3k}{m} (r-r_0) \quad \left| \quad \text{La pulsation propre } \omega_0 \text{ est donc} \right.$$

$$\Rightarrow \ddot{X} + \frac{3k}{m} X = 0 \quad \left| \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \right.$$