Phys 106
Exam 2020

1) Il y a en jeu : · la force de pesanteur (le poids de la masse m) $\vec{P} = +m\vec{g} = mg\vec{x}$

0,5pt · la force de rappel du ressort $\vec{F_r} = -(l(t) - l_0)k\vec{x}$

On applique le principe fondamental de la dynamique

$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_{ext_i}$ ($\vec{a}$ accélération du système, $\vec{F}_{ext_i}$ force extérieur au système)

$m\ddot{\vec{x}} = \vec{P} + \vec{F_r}$

$m\ddot{\vec{x}} = mg\vec{x} + (-l(t) + l_0)k\vec{x}$

en projetant sur $\vec{x}$:

0,5pt $m\ddot{x} = mg + (-x + x_0 + l_0)k$

$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g + \frac{k}{m}(x_0 + l_0)$

2) A l'équilibre $\ddot{x} = 0$, $x_0 = 0$, donc :

1pt $\frac{k}{m}x_e = g + \frac{kl_0}{m}$

soit $x_e = l_0 + \frac{m}{k}g$

3) On a :

1pt $m\ddot{x} + kx - mg - kl_0 = kx_0$

avec $x_e = \frac{1}{k}(kl_0 + mg)$ on obtient

$$m\ddot{x} + k(x - x_e) = kx_0$$

4) En notation complexe on a :

$$m\ddot{\underline{X}} + k\underline{X} = k\underline{x_0}e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow m(j\omega)^2\underline{X}e^{j\omega t} + k\underline{X}e^{j\omega t} = k\underline{x_0}e^{j\omega t}$$

donc $-m\omega^2\underline{X} + k\underline{X} = k\underline{x_0}$

alors $\underline{X}(k - m\omega^2) = k\underline{x_0}$

On obtient pour $G(\omega) = \frac{\underline{X}}{\underline{x_0}}$:

$$G(\omega) = \frac{k}{k - m\omega^2} = \frac{1}{1 - \frac{m}{k}\omega^2} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Soit :

2pt $$G(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

5) $\lim_{\omega \to +\infty} G(\omega) \longrightarrow \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \to 0$

1pt

$G(\omega)$ tend vers 0 pour les hautes fréquences, c'est un passe-bas ($G(0) = 1$).

0,5pt

6) Pour l'équation du mouvement de x_1, rien ne change (au changement de masse près) donc :

$$m \ddot{X}_1 + k X_1 = k \underline{x_0} e^{j\omega t}$$

(on néglige les ~~effets d'inertie~~)

$$\frac{\underline{X_1}}{\underline{x_0}} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$ sinon $$\frac{\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega_0^4 + \omega^4 - \underline{3}\omega_0^2\omega^2}$$ ~~influence de~~ m_2 sur m_1

Pour x_2 nous avons les mêmes équations mais le point de référence est maintenant x_1 et plus x_0

0,5pt $m \ddot{X}_2 + k X_2 = k X_1$

donc $\frac{\underline{X_2}}{\underline{X_1}} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$, alors

1,5pt $\underline{X_2} = \left(\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)^2 \underline{x_0}$

7) Si on a N filtres en cascade on aura :

1pt $\underline{X_N} = \left(\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)^N \underline{x_0}$

8) On a :

$$G_N(\omega) = \left(\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)^N$$

avec $\omega_0 = 2\pi f_0 \simeq 3,8 \text{ rad.s}^{-1}$; $N \in \mathbb{N}$

On veut :

$$G_N(\omega) = \left(\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)^N < 10^{-10}$$

avec $\omega = 2\pi f \simeq 62,8 \text{ rad.s}^{-1}$

soit avec la réponse à la question 5)

$$G_N(\omega) = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^{2N} < 10^{-10}$$

$$= (0,06)^{2N} < 10^{-10}$$

$$= 6^{2N} . 10^{-2N} < 10^{-10}$$

par dichotomie :

$N = 4$: $G_4(\omega) \simeq 1,68 . 10^{-10}$

$N = 5$: $G_5(\omega) \simeq 6,0 . 10^{-13}$

Il faut 5 filtres en cascade pour produire une atténuation d'au moins 10 ordres de grandeur.

2pt

en report de :

$$G(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

on a :

0,5pt $$\lim_{\omega \to \omega_0} G(\omega) \longrightarrow \pm\infty$$

Le gain diverge et il y a un changement de signe à la pulsation ω_0. C'est le phénomène de résonance. $G(\omega)$ ne peut pas être infini car il y a un amortissement mécanique qui existe. 0,5pt 0,5pt 0,5pt

10) En appliquant le PFD avec cette nouvelle force sur x_1, on trouve :

$$m\ddot{x}_1 = mg + k(x_0 + l_0 - x_1) - \alpha\dot{x}_1$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_{e_1}) + \alpha\dot{x}_1 = k x_0 \quad 0{,}5pt$$

donc en notation complexe :

$$m\ddot{\underline{X}}_1 + k\underline{X}_1 + \alpha\dot{\underline{X}}_1 = k\underline{x_0}\, e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow -m\omega^2 \underline{X}_1 + k\underline{X}_1 + j\omega\alpha\underline{X}_1 = k\underline{x_0}$$

soit $$G(\omega) = \frac{\underline{X_1}}{\underline{x_0}} = \frac{k}{k + j\alpha\omega - m\omega^2} = \frac{\omega_0^2}{j\frac{\alpha}{m}\omega + (\omega_0^2 - \omega^2)}$$ 1,5pt

11) ϕ ici n'a pas de dimension pour être homogène à

0,5pt 1. Cela peut donc être un angle en radians.

Comme ϕ représente l'amortissement du système, il représente une perte d'énergie, donc "angle de pertes" semble être un nom judicieux.

0,5pt

12) On part de :

$$G(\omega) = \frac{k}{k' - m\omega^2}, \quad \text{avec } k' = k(1 + j\phi)$$

donc $$G(\omega) = \frac{k(1+j\phi)}{k(1+j\phi) - m\omega^2} = \frac{\omega_0^2(1+j\phi)}{\omega_0^2(1+j\phi) - \omega^2}$$

1,5pt $$G(\omega) = \frac{\omega_0^2 + j\omega_0^2\phi}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega_0^2\phi}$$

13) $$|G(\omega)| = \frac{|\omega_0^2 + j\omega_0^2\phi|}{|\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega_0^2\phi|} = \sqrt{\frac{\omega_0^4(1+\phi^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega_0^4\phi^2}}$$

1pt $$= \sqrt{\frac{1+\phi^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \phi^2}}$$