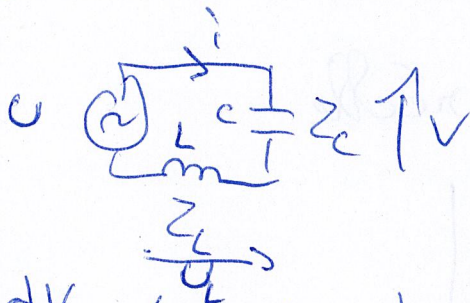


Exam phys 106

2021

Exercice I: Circuit (R)LC série.

1) On a :



• $i = C \frac{dV}{dt}$ (condensateur)

• $U_L = L \frac{di}{dt}$ (bobine)

• $U = V + U_L$ (loi des mailles)

donc $U = V + LC \frac{d^2V}{dt^2}$

alors l'équation que vérifie V est

$$\ddot{V} + \frac{1}{LC} V = U/LC$$

2) On passe en complexe, V est de la forme de U en régime permanent: $\underline{V} = \underline{R} (\underline{V} e^{j\omega t})$

donc l'équation devient

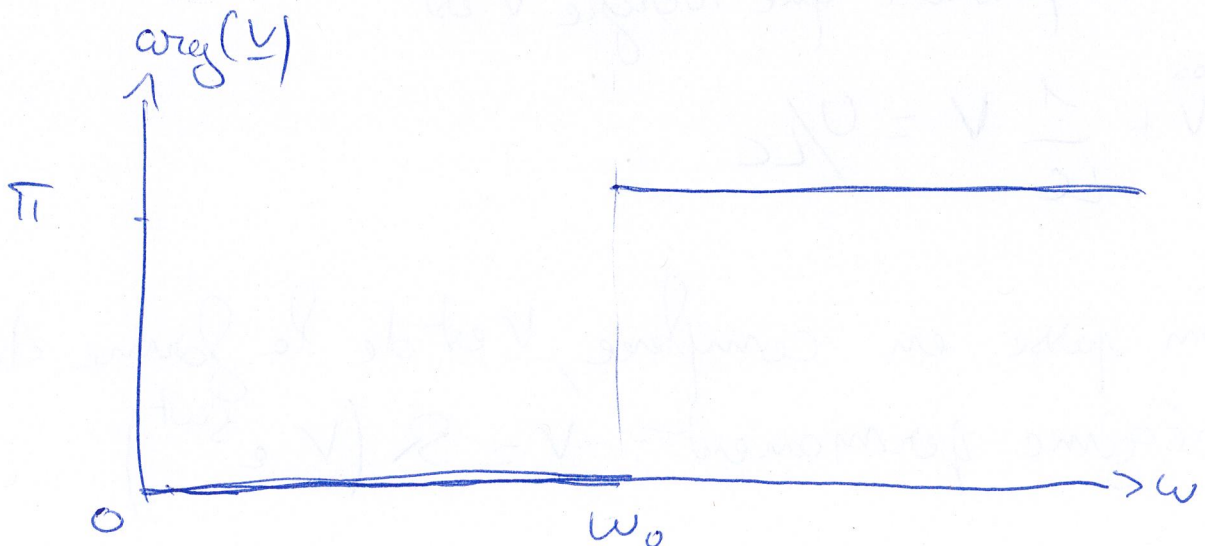
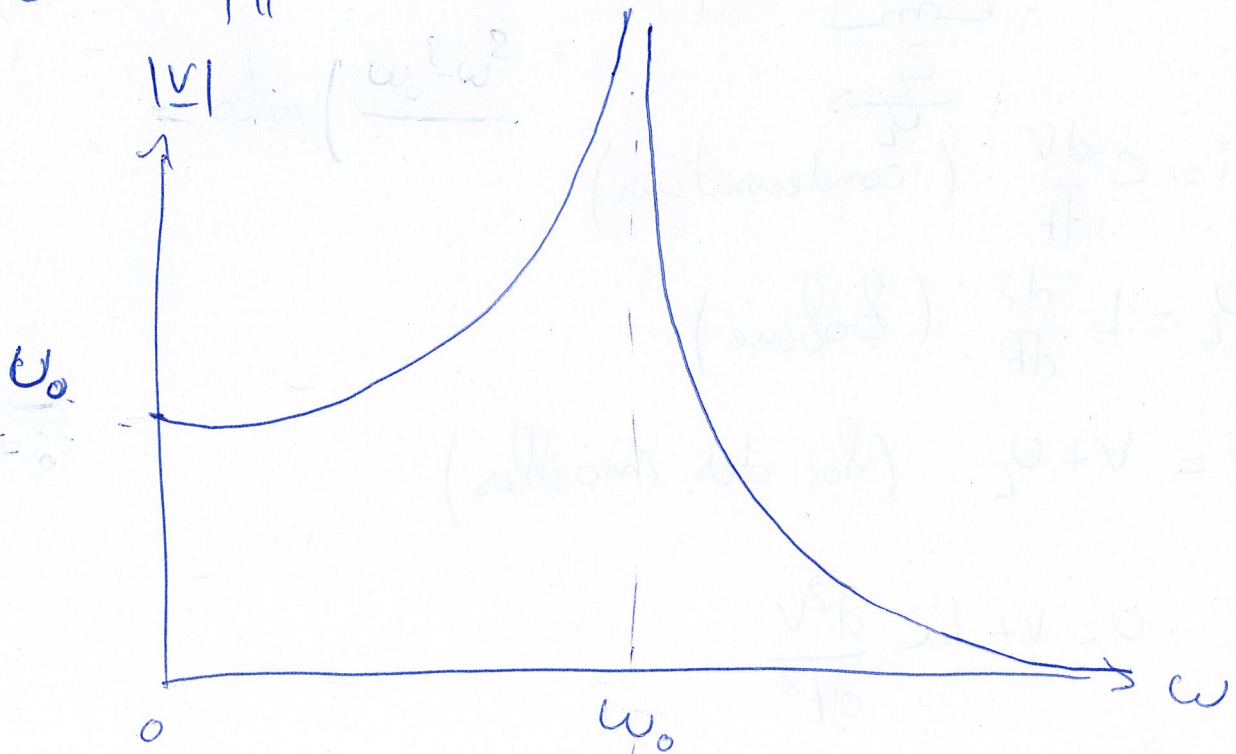
$$-\omega^2 \underline{V} + \frac{1}{Lc} \underline{V} = \frac{U_0}{Lc} = \underline{V} (\omega_0^2 - \omega^2)$$

alors :

$$\underline{V} = \frac{U_0 \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$3) |\underline{V}| = \left| \frac{U_0 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right| = \left| \frac{U_0 \omega_0^2}{(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)} \right|$$

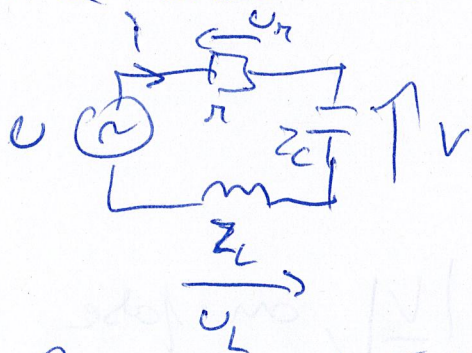
$$\arg(\underline{V}) = \left| \frac{0}{\pi} \right| \text{ car } \underline{V} \text{ est réel}$$



4) Il est mis en évidence le phénomène de résonance (amplitude qui diverge) en ω_0 .

5) $|V|$ ne peut pas être infini en pratique car il y a toujours une résistance résiduelle (câbles, fils, composants) qui limite le courant et donc la tension.

6) On a maintenant:



de même que précédemment:

- $i = C \frac{dV}{dt}$ (condensateur)
- $U_L = L \frac{di}{dt}$ (bobine)
- $U = U_r + V + U_L$ (loi des mailles)
- $U_r = i r$ (loi d'Ohm)

$$\text{donc } U = C r \ddot{V} + V + L C \ddot{V}$$

$$\text{soit } \frac{U}{LC} = \ddot{V} + \frac{r}{L} \dot{V} + \frac{1}{LC} V$$

7) de $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $V(t) = \Re(V e^{j\omega t})$ et du passage en complexe, on trouve: (3)

$$\underline{V} (-\omega^2 + \omega_0^2 + j\omega \frac{R}{L}) = U_0 \omega_0^2$$

donc

$$\underline{V} = \frac{U_0 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{R}{L}}$$

alors :

$$\underline{V} = \frac{U_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{R}{\omega_0 L}} = \frac{U_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_0}}$$

par identification:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

8) On cherche le max de $|\underline{V}|$, on pose

$$|\underline{V}| = G = \frac{U_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}}$$

G est maximum quand $\sqrt{\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}$ est minimum,
donc quand $\left[\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2\right]$ est minimum

$$\text{On pose } A = \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 = \omega^2 \left(\frac{1}{Q^2 \omega_0^2} - \frac{2}{\omega_0^2}\right) + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 + 1$$

$$\frac{\partial A}{\partial \omega} = 2\omega \left(\frac{1}{Q^2 \omega_0^2} - \frac{2}{\omega_0^2}\right) + \frac{4\omega^3}{\omega_0^4} = \omega \left(\frac{2}{Q^2 \omega_0^2} - \frac{4}{\omega_0^2} + \frac{4\omega^2}{\omega_0^4}\right)$$

On veut:

$$\frac{dA}{d\omega} = 0 \text{ donc, soit } \omega = 0 \text{ soit}$$
$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{2Q^2}}}$$

ce n'est possible que si $\omega \in \mathbb{R}$ donc que

$$Q^2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

de plus $\frac{d^2A}{d\omega^2} = \left(\frac{2}{Q^2\omega_0^2} - \frac{4}{\omega_0^2} \right) + \frac{16\omega^2}{\omega_0^4}$

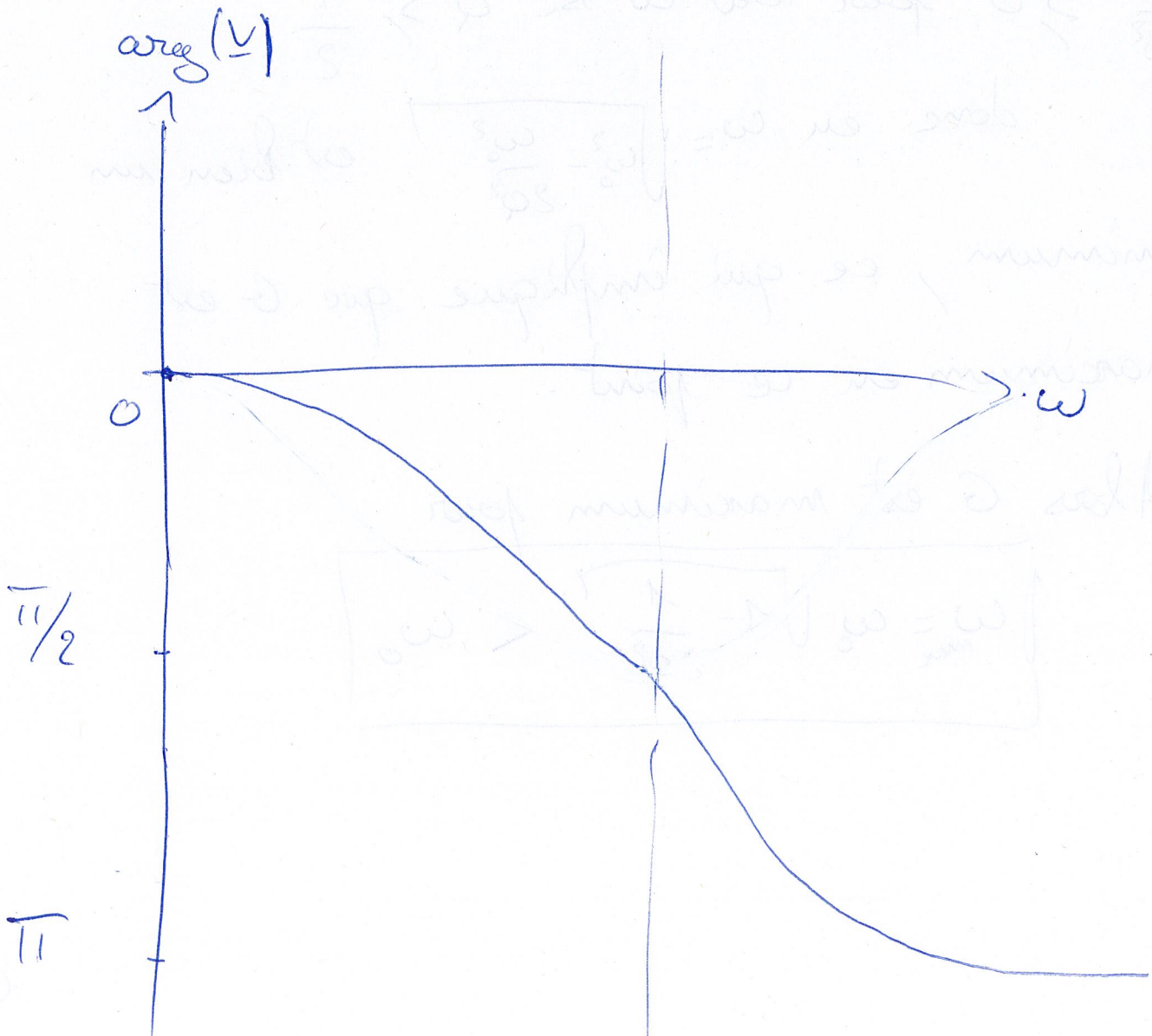
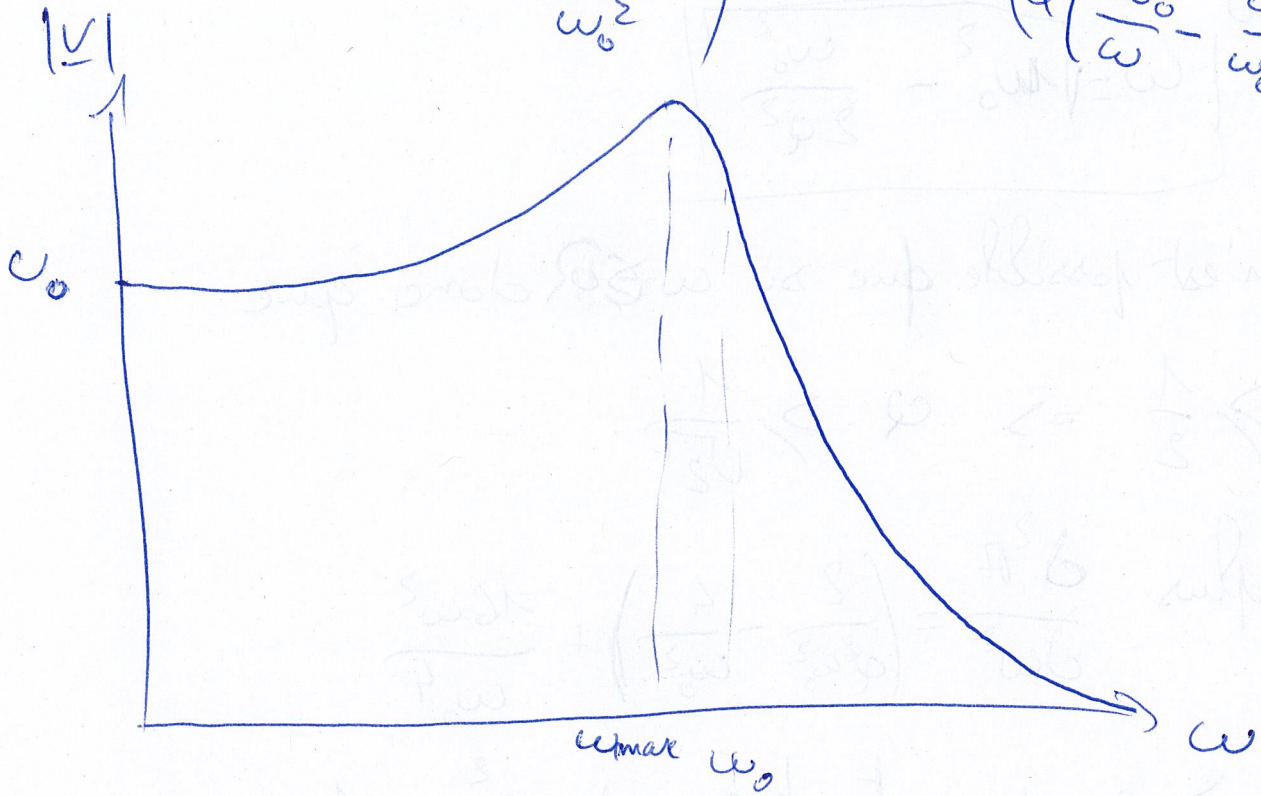
$$\frac{d^2A}{d\omega^2} \geq 0 \text{ pour tout } \omega \text{ si } Q^2 \geq \frac{1}{2}$$

donc en $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{2Q^2}}$ est bien un minimum, ce qui implique que G est maximum en ce point.

Alors G est maximum pour

$$\boxed{\omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0}$$

$$g) \arg(V) = -\arctan \left(\frac{\omega / q\omega_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right) = -\arctan \left(\frac{1}{q \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)} \right)$$



$$10) \underline{Z} = r + Z_C + Z_L = r + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L$$

11) d'après la loi d'Ohm

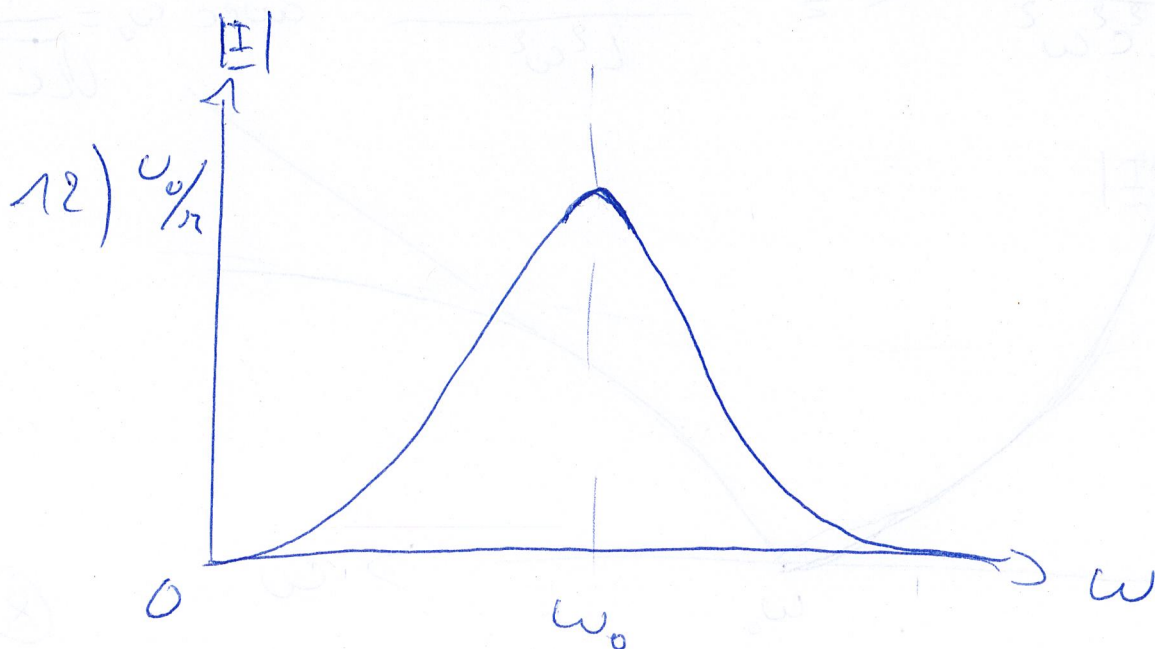
$$\underline{I} = \frac{U_0}{\underline{Z}} = \frac{U_0 j\omega C}{1 + j\omega rC - \omega^2 LC}$$

$$\text{donc } |\underline{I}| = \frac{U_0 C \omega}{\sqrt{r^2 C^2 \omega^2 + (1 - \omega^2 LC)^2}}$$

$$\text{on a } rC = \frac{1}{Q\omega_0} \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\text{donc } \underline{I} = \frac{U_0 j\omega C}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

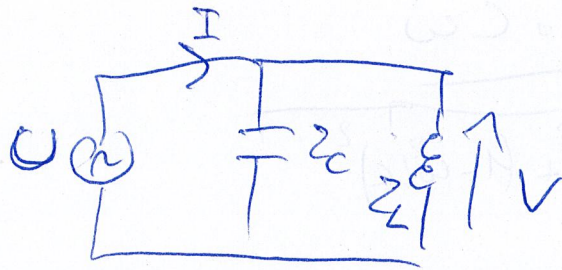
$$\text{alors } |\underline{I}| = \frac{U_0 C \omega}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$



13) Le phénomène mis en évidence est une résonance d'intensité. Il ne dépend que de π pour son amplitude (il existe toujours).

Exercice II: Circuit R/L/C parallèle.

On a :



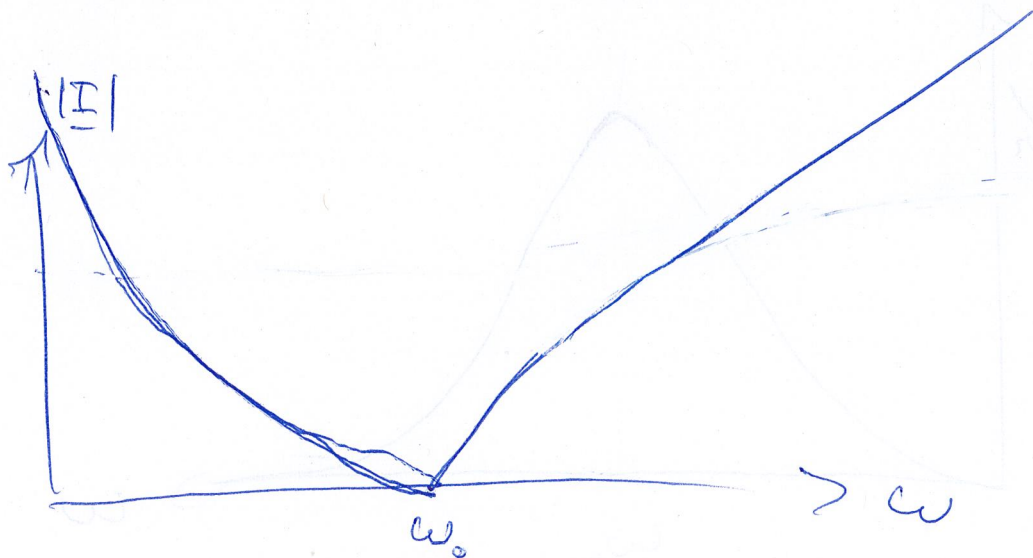
1) L'impédance équivalente du circuit est :

$$Z = \frac{Z_C Z_L}{Z_C + Z_L} = \frac{L/C}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$$

2) $\underline{I} = \frac{U_0}{Z} = \frac{(1 - LC\omega^2) U_0}{jL\omega}$ alors

$$|\underline{I}| = \frac{U_0 |1 - LC\omega^2|}{L\omega} = \frac{U_0 \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right|}{L\omega} \quad \text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

3)



4) C'est le phénomène d'ant-résonance
qui est mis en évidence autour de ω_0 .

5) Quand $\omega \rightarrow 0$ $|I|$ diverge vers l'infini
ce qui est impossible car il y a toujours une
résistance résiduelle pour limiter le courant.

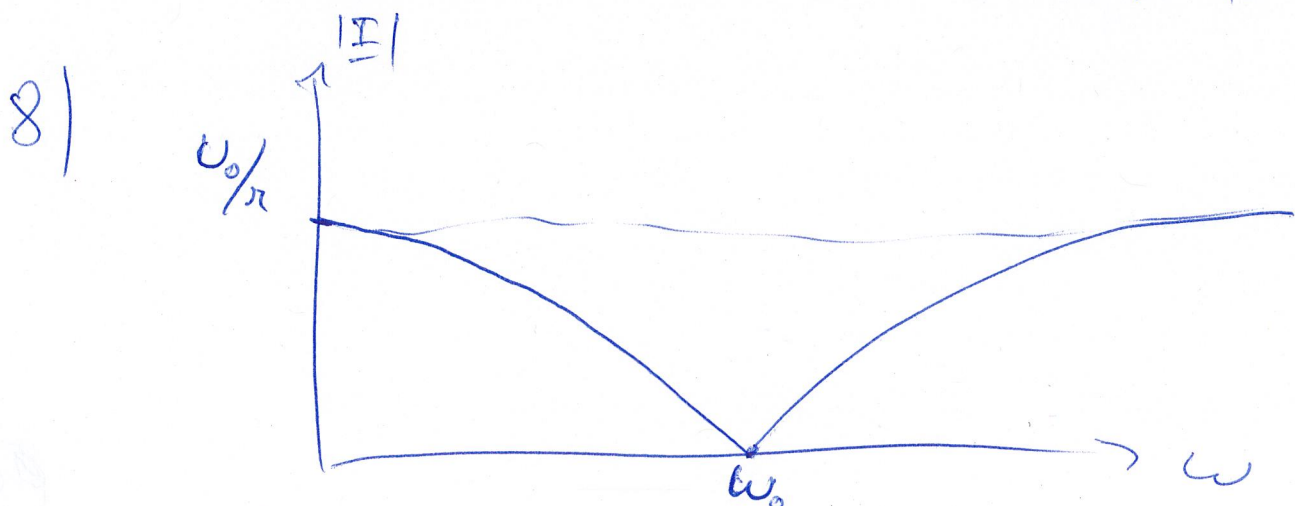
• Quand $\omega \rightarrow +\infty$, $|I|$ tend vers l'infini
également, donc non réaliste

$$6) \text{ On a } Z = r + Z = r + \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2} = \frac{r - \pi LC\omega^2 + jL\omega}{1 - LC\omega^2}$$

$$7) \text{ On obtient } \underline{I} = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0(1 - LC\omega^2)}{\pi + jL\omega - \pi LC\omega^2} = \frac{U_0(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)}{\pi(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j\frac{L}{\pi}\omega)}$$

soit

$$|I| = \frac{U_0 |1 - LC\omega^2|}{\sqrt{(\pi - \pi LC\omega^2)^2 + (L\omega)^2}} = \frac{U_0 |1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2|}{\pi \sqrt{(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2 + (\frac{L}{\pi}\omega)^2}}$$



3) Maintenant la résistance permet de résoudre les divergences et l'intensité est bornée à $\frac{U_0}{R}$ quand $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow +\infty$.

$$\frac{U_0 \left(\frac{1}{R} - \frac{j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)}{\left(\frac{1}{R} - \frac{j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega C}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2} = \frac{U_0}{R} = I$$

$$\frac{U_0 \left(\frac{1}{R} - \frac{j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)}{\left| \frac{1}{R} - \frac{j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right|^2 + \left(\frac{\omega C}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2} = \frac{U_0}{R} = I$$

$$\frac{U_0 \left(\frac{1}{R} - \frac{j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)}{\left| \frac{1}{R} - \frac{j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right|^2 + \left(\frac{\omega C}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2} = \frac{U_0}{R} = I$$

