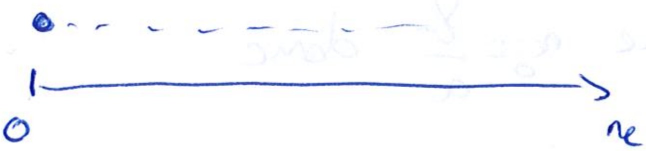
Systèmes Oscillants
Partiel 23/03/2022

I- Petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable



$$f(x) = -\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^3}$$

1) Il y a position d'équilibre si les forces s'annulent, ici, il n'y a qu'une force f. On cherche son zéro :

$$f(x_0) = 0 = -\frac{a}{x_0^2} + \frac{b}{x_0^3} \quad \text{avec } x_0 > 0$$

donc $x_0 a = b \Rightarrow x_0 = \frac{b}{a}$

La position d'équilibre est en $x_0 = \frac{b}{a}$

2) On sait que $-\vec{\text{grad}}\, U(x) = f(x)$ donc

$$U(x) = \int f(x) = -\frac{a}{x} + \frac{b}{2x^2} + C$$ où C est une constante

Pour que $U(x) \xrightarrow[+\infty]{} 0$ alors $C = 0$ donc

$$U(x) = -\frac{a}{x} + \frac{b}{2x^2}$$

3) par définition (construction), $f(x) = -U'(x)$

donc $U'(x_0) = \frac{a}{x_0^2} - \frac{b}{x_0^3} = -f(x_0) = 0$

- $U''(x) = -\frac{2a}{x^3} + \frac{3b}{x^4}$

La dérivée seconde en x_0 vaut $U'(x_0) = \frac{-2a}{x_0^3} + \frac{3b}{x_0^4}$

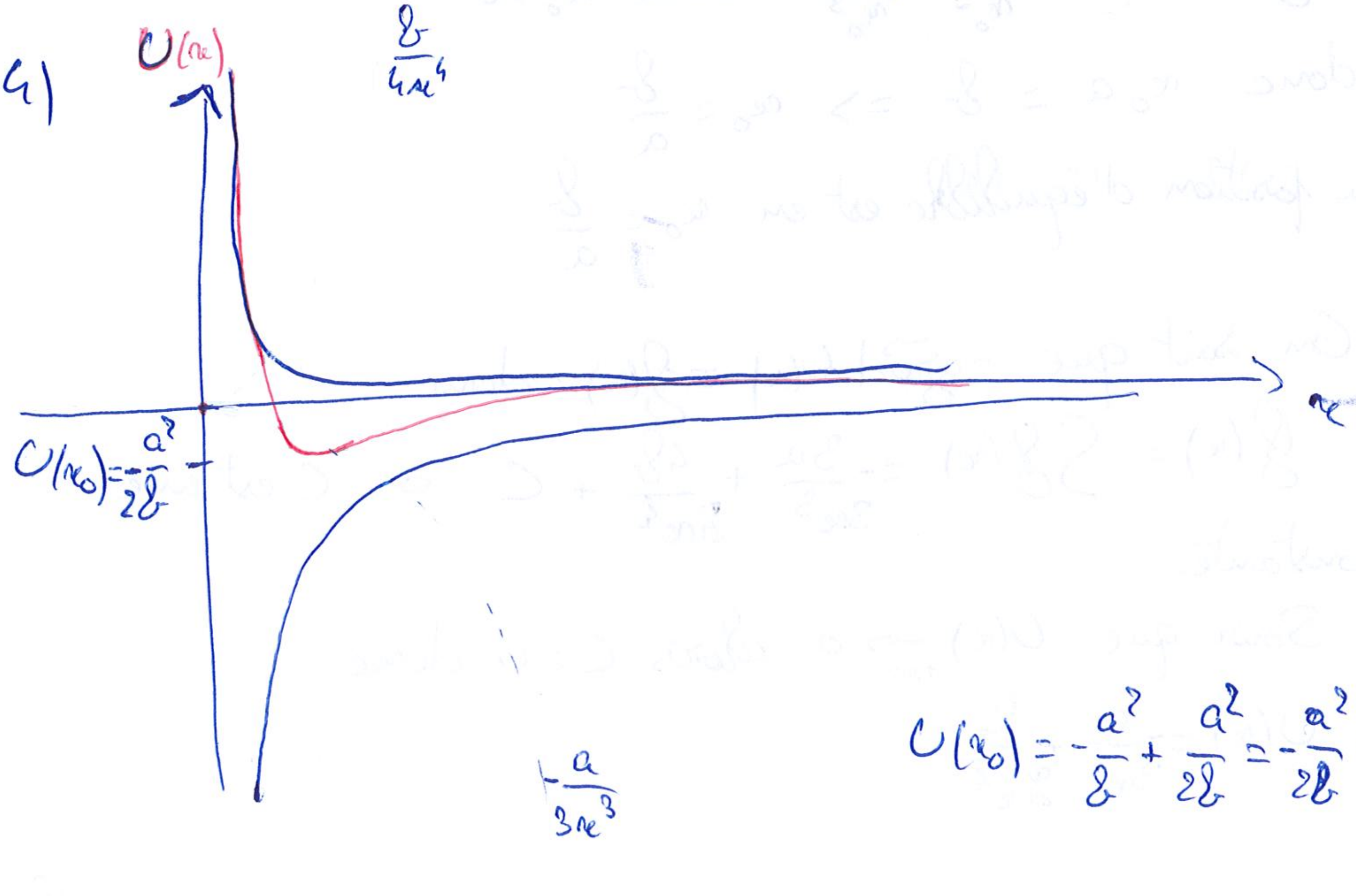
Soit $U''(x_0) = \frac{2}{x_0}\left(-\frac{a}{x_0^2} + \frac{b}{x_0^3}\right) + \frac{b}{x_0^4} = \frac{2}{x_0}(f(x_0)) + \frac{b}{x_0^4}$

$U''(x_0) = \frac{b}{x_0^4}$, on sait que $x_0 = \frac{b}{a}$ donc

$U''(x_0) = \frac{a^4}{b^3} > 0$

La position x_0 est donc un point d'équilibre stable car c'est un minimum local d

4)



$U(x_0) = -\frac{a^2}{b} + \frac{a^2}{2b} = -\frac{a^2}{2b} < 0$

5) On a :

$$U(x) \underset{x \mapsto x_0}{\simeq} U(x_0) + U'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} U''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$\simeq -\frac{a^2}{2b} + 0 + \frac{1}{2}\frac{a^4}{b^3}(x-x_0)^2$$

$$U(x) \underset{x \mapsto x_0}{\simeq} U_0 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 (x-x_0)^2$$

par identification $U_0 = -\frac{a^2}{2b}$ et $\omega_0^2 = \frac{a^4}{mb^3}$ donc

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{a^4}{mb^3}}$$

6) En appliquant le principe fondamental de la dynamique

$f(x) = m\ddot{x}$, avec

$f(x) = -U'(x) = -m\omega_0^2(x-x_0)$

On obtient :

$-m\omega_0^2(x-x_0) = m\ddot{x}$, en posant $\varepsilon = x - x_0$ on a :

$-m\omega_0^2 \varepsilon = m\ddot{\varepsilon}$ soit

$\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0$, on reconnait l'équation de l'oscillateur harmonique à 1 dimension sans amortissement

donc :

$\varepsilon(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

avec A et φ des constantes $\in \mathbb{R}$

7) Avec les conditions initiales :

$\mathcal{E}(t=0) = a$ et $\mathcal{E}'(t=0) = 0$ on a :

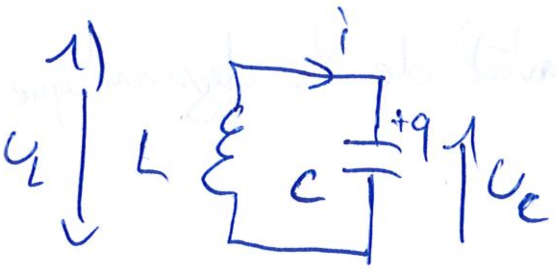
$A\cos(\varphi) = a$ et $-A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)\big|_{t=0} = 0$

donc $\varphi = 0$ et $A = a$

alors $\mathcal{E}(t) = a\cos(\omega_0 t)$.

II- Régime transitoire dans une maille LC

1)



On a dans la maille :

$u_C + u_L = 0$, de plus

$i = C\dfrac{du_C}{dt}$ et $u_L = L\dfrac{di}{dt}$

donc $u_C + L\dfrac{di}{dt} = 0$

si $\dfrac{q}{C} = u_C$ et $\dfrac{dq}{dt} = i$, on obtient

$\dfrac{q}{C} + L\dfrac{d^2q}{dt^2} = 0$, soit

$\ddot{q} + \dfrac{1}{LC}q = 0$, autrement $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$ avec $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$

2) Nous avons en jeu une bobine qui vérifie à ses bornes $u_L = L\frac{di}{dt}$, donc pour que la dérivé de $i(t)$ existe, il faut que $i(t)$ soit continu.

De plus aux bornes du condensateur nous avons $i(t) = C\frac{du_c}{dt} = \frac{dq}{dt}$, alors $q(t)$ doit aussi être continue.

3) On a :

$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$, ce qui est l'équation d'un oscillateur harmonique, donc

$q(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$,

on a :

$q(t=0) = q_0$ et $i(t=0) = \frac{dq}{dt} = 0$, alors

$A\cos(\varphi) = q_0$ et $-A\omega_0 \sin(\varphi) = 0$, donc

$\varphi = 0$ et $A = q_0$. Au final on a :

$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t)$, avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$i(t) = \frac{dq}{dt} = -q_0\omega_0 \sin(\omega_0 t)$.

4) On a l'énergie emmagasinée dans la bobine E_L et dans le condensateur E_c égalent à :

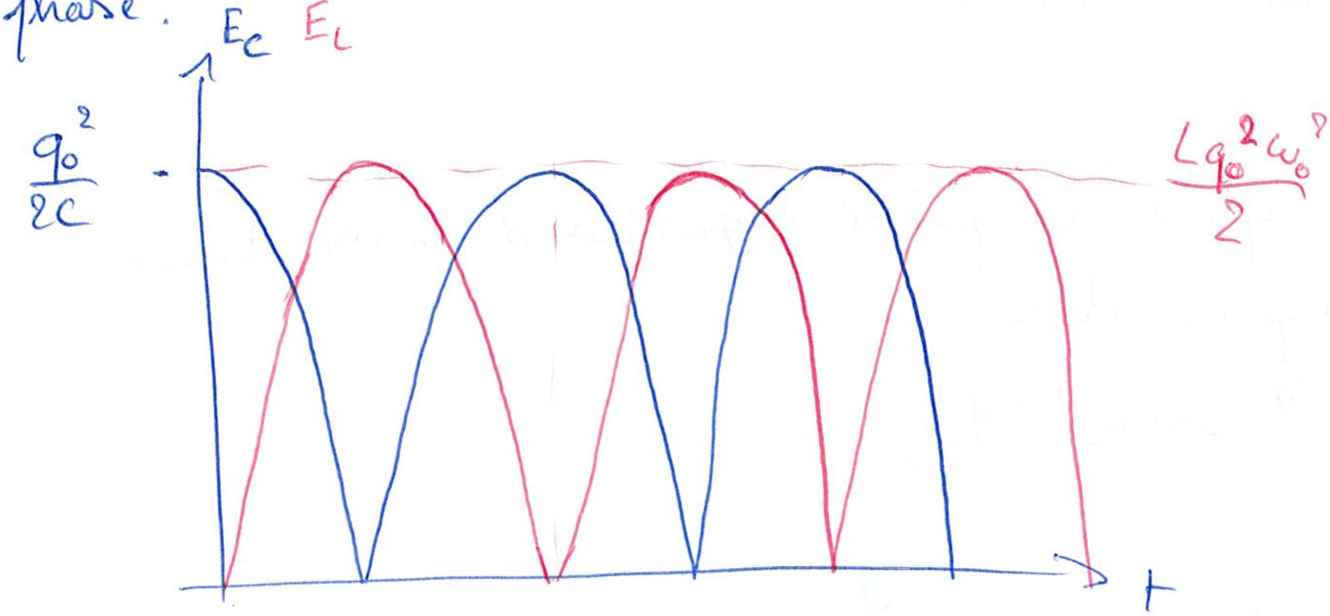
$E_L = \frac{1}{2}Li^2$ et $E_c = \frac{1}{2}Cu_c^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$

Soit :

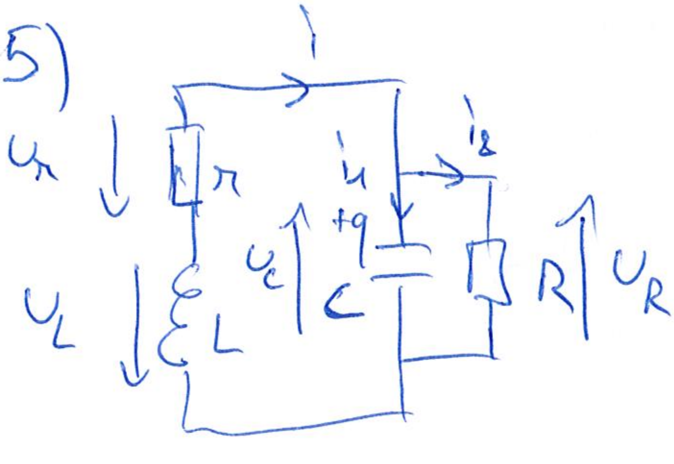
$$E_L = \frac{1}{2} L q_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

$$E_C = \frac{1}{2C} q_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

Les énergies évoluent donc en quadrature de phase.



5)



dans la maille CR :

$u_C = u_R \Rightarrow \frac{q}{C} = i_2 R$, en dérivant on a $\frac{dq}{dt} = RC \frac{di_2}{dt}$, soit $i_1 = RC \frac{di_2}{dt}$

dans la maille LrC

$u_r + u_L + u_C = 0 \Rightarrow ir + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$

6) On a suivant la loi des noeuds :

$$i = i_1 + i_2$$

donc $-\frac{q}{C} = (i_1+i_2)r + L\frac{d(i_1+i_2)}{dt}$ (maille LrC)

avec la maille RC on a :

$\frac{q}{C} = i_2 R$ et $i_1 = RC\frac{di_2}{dt}$, soit

$$-i_2 R = \left(RC\frac{di_2}{dt} + i_2\right)r + LRC\frac{d^2 i_2}{dt^2} + L\frac{di_2}{dt}\text{, soit}$$

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{r}{L}\right)\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{LC}\left(\frac{r}{R}+1\right)i_2 = 0$$

7) Le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle est

$$X^2 + \left(\frac{1}{RC}+\frac{r}{L}\right)X + \frac{1}{LC}\left(\frac{r}{R}+1\right) = 0$$

Soit le déterminant $\Delta = \left(\frac{1}{RC}+\frac{r}{L}\right)^2 - 4\left(\frac{r}{R}+1\right)\times\frac{1}{LC}$

$\Delta = 0$ si $\left(\frac{1}{RC}+\frac{r}{L}\right)^2 = 4\left(\frac{r}{R}+1\right)\times\frac{1}{LC}$

dans ce cas nous somme en régime critique, retour à l'équilibre le plus rapide possible, le courant i_2 à la forme :

$i_2(t) = e^{\lambda t}(A + Bt)$, avec λ, A et B des constantes de $\mathbb{R}$ 4 si $\Delta > 0$, soit $\left(\frac{1}{RC}+\frac{r}{L}\right)^2 > 4\left(\frac{r}{R}+1\right)\times\frac{1}{LC}$

dans ce cas le courant i_2 à la forme du régime apériodique :

$$i_2(t) = e^{-\lambda t}\left(Ae^{r_1 t}+Be^{r_2 t}\right) \text{ avec } r_1, r_2 \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}.$$

si $\Delta < 0$, $\left(\frac{1}{RC}+\frac{r}{L}\right)^2 < 4\left(\frac{r}{R}+1\right)\frac{1}{LC}$, on est en régime pseudo-périodique et $i_2(t)$ à la forme

$$i_2(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\Omega_0 t+\phi), \text{ avec } A, \Omega_0, \phi \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}$$

8) On obtient $\Delta = \left(\frac{1}{10^6\times 1.10^{-6}}+\frac{1}{1}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{10^6}+1\right)\times\frac{1}{1\times 1.10^{-6}}$

$$= 4-4\left(1+\frac{1}{1.10^{-6}}\right) = -\frac{4}{1.10^{-6}} = -4.10^6 < 0$$

On est en régime pseudo-périodique et

$$i_2 = Ae^{-\lambda t}\cos(\Omega_0 t+\phi)$$

$\Omega_0 = \sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$ avec $\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{RC}+\frac{r}{L}\right)$ et

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}\left(1+\frac{r}{R}\right)$$

$\lambda = 1$ et $\omega_0^2 = 1+10^6 \simeq 1.10^6 \,(\text{rad.s}^{-1})^2$

donc $\Omega_0 = \sqrt{1.10^6}$ et $\omega_0 = \sqrt{1+1.10^6} \simeq \Omega_0$

$Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} \simeq \frac{\sqrt{1.10^6}}{2} = 500 >> \frac{1}{2}$, on est très peu amorti.