Systèmes Oscillants

Interrogation du 23/03/2020

1) On a : $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_0\cos(\omega t)$

$F_0\cos(\omega t)$: provient de la force extérieure d'excitation c'est le régime forcé.

kx : provient de la force de rappel du système c'est le régime oscillant non-amorti

$\alpha\dot{x}$: provient du terme de pertes d'énergie comme un frottement visqueux (dépendant de la vitesse du système.
c'est le terme d'amortissement pour un régime oscillant amorti.

$m\ddot{x}$: provient directement du principe fondamental de la dynamique
c'est le terme d'oscillation.

$x, \dot{x}, \ddot{x}$: sont la position, la vitesse et l'accélération du système (à 1 dimension).

2) La forme canonique est : $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos(\omega t)$,
Nous avons : $\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$

par identification : ω_0, la pulsation propre du système est égale à $\sqrt{\frac{k}{m}}$.

3) La seconde forme générale est : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos(\omega t)$

donc $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$, par identification, $2\lambda = \frac{\alpha}{m}$

alors $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}$

4) L'équation homogène associée à l'équation (1) est

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

5) Les 3 régimes possibles sont donnés par :

$Q < \frac{1}{2}$: régime apériodique (sans oscillation)

$Q = \frac{1}{2}$: régime critique (sans oscillation et le plus rapidement éteint)

$Q > \frac{1}{2}$: régime pseudo-périodique (avec oscillations)

Si $Q \gg 1$ nous sommes dans un régime pseudo-périodique peu amorti, donc avec beaucoup d'oscillations.

6) La solution du régime transitoire en régime pseudo-périodique est de la forme :

$$x(t) = A e^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \varphi) \quad \text{avec}$$

$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$: la pseudo-période

A et φ : deux constantes à déterminer.

On a également : $\dot{x}(t) = -\lambda A e^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \varphi) - A\Omega e^{-\lambda t}\sin(\Omega t + \varphi)$

avec les conditions initiales :

$x(0) = A\cos(\varphi) = 0$

donc $\varphi = \frac{\pi}{2}$ [π] ou $A = 0$, nous prenons $\varphi = \frac{\pi}{2}$

alors :

$$x(t) = -A e^{-\lambda t} \sin(\Omega t)$$

et $$\dot{x}(t) = +\lambda A e^{-\lambda t} \sin(\Omega t) - A\Omega e^{-\lambda t}\cos(\Omega t)$$

pour $\dot{x}(0) = -A\,\Omega = v_0$ on a

$$A = -\frac{v_0}{\Omega}$$

Au final, la solution est :

$$x(t) = +\frac{v_0}{\Omega} e^{-\lambda t} \sin(\Omega t)$$

avec $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ et

$$\lambda = \frac{\alpha}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

7) On sait qu'il y a environ $1{,}5 \times Q$ oscillations donc il faut au moins attendre cette durée pour ne plus avoir d'oscillation. Le temps d'une oscillations est :

$$T_{osc} = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \quad \text{avec } \lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$$

donc il faut attendre

$$t_{min} = 1{,}5\,Q\,T_{osc} = \frac{1{,}5\,Q \times 2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{4Q^2}}} = \frac{3\pi Q}{\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

puisque $Q \gg 1$ on peut faire l'approximation suivante :

$$t_{min} = \frac{3\pi Q}{\omega_0}$$

8) En notation complexe, on a :

$$X = \underline{x}\, e^{j\omega t}$$

$$\dot{X} = j\omega \underline{x}\, e^{j\omega t}$$

$$\ddot{X} = -\omega^2 \underline{x}\, e^{j\omega t}$$

on suppose ici que $\underline{x}$ est indépendant du temps.

L'équation (1) devient en notation complexe :

$$\ddot{X} + \frac{\alpha}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}$$

d'où $$-\omega^2 \underline{x}\, e^{j\omega t} + 2\lambda j\omega \underline{x}\, e^{j\omega t} + \omega_0^2 \underline{x}\, e^{j\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}$$

alors :

$$\underline{x} = \frac{F_0}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\lambda j\omega)m}$$

9) $$A(\omega) = |\underline{x}| = \frac{F_0}{m} \times \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)^2}}$$

avec $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$

10) On a : $$A(\omega) = \frac{F_0}{m} \times \frac{1}{\sqrt{\omega_0^4 + \omega^4 + \omega_0^2\omega^2\left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)}}$$

puisque $Q \gg 1$ on peut faire l'approximation

$A(\omega) \simeq \frac{F_0}{m} \times \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$ il y a maximum pour $\omega = \omega_m \simeq \omega_0$

$A(\omega_0) \to \infty$ il y a résonnance qui à l'ordre 1 elle ne dépend pas de Q.

Pour plus de précision, on cherche quand $A(\omega)$ est maximum, donc quand :

$$U(\omega) = \sqrt{\omega_0^4+\omega^4+\omega_0^2\omega^2\left(\frac{1}{Q^2}-2\right)} \text{ est minimum.}$$

Cela revient à chercher quand $\frac{\partial U^2}{\partial \omega}=0$ et vérifier que $U(\omega_m)$ est bien un minimum.

$$\frac{\partial U^2}{\partial \omega} = 4\omega^3+2\omega\omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2}-2\right)$$
$$= \omega\left(4\omega^2+2\omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2}-2\right)\right)$$

$\frac{\partial U^2}{\partial \omega}=0$ si $\omega=0$ ou

$$\omega = \pm\sqrt{-\frac{\omega_0^2}{2}\left(\frac{1}{Q^2}-2\right)}$$

- Pour $\omega_m=0$, $U(\omega_m)$ est bien minimal et $U(0)=\omega_0^2$ car ω n'apparaît que sous une forme de carré dans $U(\omega)$ ($U(\omega)$ est paire)
- Pour $\omega_m = -\sqrt{-\frac{\omega_0^2}{2}\left(\frac{1}{Q^2}-2\right)}$ c'est une solution négative ce qui n'est pas physique.
- Il ne reste que $\omega_m = \sqrt{-\frac{\omega_0^2}{2}\left(\frac{1}{Q^2}-2\right)}$

(il faut chercher les variations de $U^2(\omega)$ autour de ω_m. cf annexe)

$U(\omega_m) = \omega_0^2\sqrt{1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{Q^2}-2\right)^2}$ comme $Q\gg1$

$\sqrt{1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{Q^2}-2\right)^2} \ll 1$ donc le plus petit minimum de $U(\omega)$ est pour $\omega_m=\sqrt{-\frac{\omega_0^2}{2}\left(\frac{1}{Q^2}-2\right)}$ ce qui est le maximum de $A(\omega)$

Annexe

variation de $U^2(\omega) = \omega_0^4+\omega^4+\omega_0^2\omega^2\left(\frac{1}{Q^2}-2\right)$

autour de $\omega_m = \sqrt{-\frac{\omega_0^2}{2}\left(\frac{1}{Q^2}-2\right)}$.

Soit $\frac{dU^2}{d\omega} = \omega\left(4\omega^2+2\omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2}-2\right)\right)$

alors $U^{2\prime}(\omega_m\pm\delta) = (\omega_m\pm\delta)\left(4(\omega_m\pm\delta)^2+2\omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2}-2\right)\right)$

$$=(\omega_m\pm\delta)\left(\pm 8\omega_m\delta+4\delta^2+\underbrace{4\omega_m^2+2\omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2}-2\right)}_{=0\ \text{par définition de}\ \omega_m}\right)$$

donc $U^{2\prime}(\omega_m\pm\delta) = \pm 8\omega_m^2\delta+4\omega_m\delta^2+8\omega_m\delta^2\pm 4\delta^3$

$$=\left[3\omega_m\delta \pm \left(2\omega_m^2+\delta^2\right)\right]4\delta$$

On voit que si la variation autour de ω_m est positive alors la dérivée $U^{2\prime}(\omega)$ sera positive et inversement.

	$-$	ω_m	$+$
$U^{2\prime}(\omega)$	$-$	0	$+$
$U^2(\omega)$	↘		↗

$U^2(\omega)$ accepte un minimum en ω_m