

Examen:

I - Cours : résonance d'amplitude 5pt

1.5pt 1) Suivant le principe fondamentale de la dynamique on a :

$$m \ddot{\vec{r}} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{amort} + \vec{F}_{ressort} + \vec{F}_{excitateur} \\ = (-\alpha \dot{\vec{r}} - k \vec{r} + F_{excitateur}) \vec{u}_r$$

$$\text{donc } \ddot{\vec{r}} + \frac{\alpha}{m} \dot{\vec{r}} + \frac{k}{m} \vec{r} = F_{excitateur}/m$$

$$\text{Si on pose : } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ Q = \sqrt{\frac{km}{\alpha}}$$

$$F_{excitateur} = m E_0 \cos(\omega t)$$

$$\text{on obtient } \ddot{\vec{r}} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = E_0 \cos(\omega t)$$

2pt 2) On passe en complexe :

$$X = \Re e^{j(\omega t + \varphi)} \Rightarrow \dot{X} = j\omega \Re e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega X \\ \ddot{X} = -\omega^2 \Re e^{j(\omega t + \varphi)} = -\omega^2 X$$

$$\frac{F_{exc}}{m} = E_0 e^{j\omega t}$$

donc l'équation devient :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = E_0 e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow X \left(j\omega_0 \omega + \omega_0^2 - \omega^2 \right) = E_0 e^{j\omega t}$$

$$\text{alors } \Re e^{j\varphi} \left(\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0 \omega}{Q} \right) = E_0$$

$$\text{donc } \underline{r} = \Re e^{j\varphi} = \frac{E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0 \omega}{Q}}$$

3) $H(\omega) = |x|$
 0,5 pt a) $H(\omega) = \left| \frac{E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0 \omega}{Q}} \right| = \frac{|E_0|}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0 \omega}{Q}\right)^2}}$

$$H(\omega) = \frac{|E_0|}{\sqrt{\omega_0^4 + \omega^4 + \omega_0^2 \omega^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)}}$$

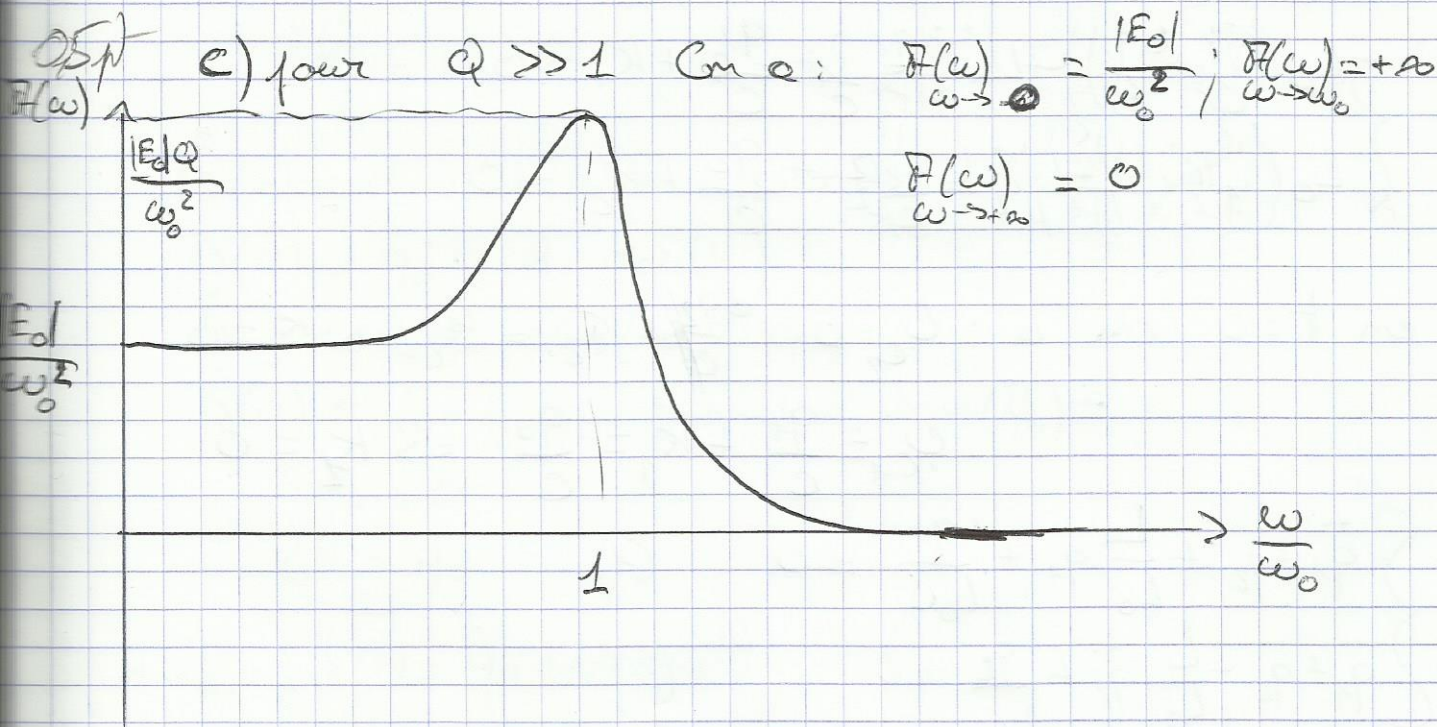
$$\frac{dH(\omega)}{d\omega} = - \frac{E_0 \left(4\omega^3 + 2\omega_0^2 \omega \left(\frac{1}{Q^2} - 2 \right) \right)}{2 \left(\omega_0^4 + \omega^4 + \omega_0^2 \omega^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 2 \right) \right)^{3/2}}$$

pour que'il existe une racine de $\frac{dH(\omega)}{d\omega}$ et donc
 qu'il y a résonance il faut que $\left(\frac{1}{Q^2} - 2\right) < 0$
 donc que $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. sinon il n'y a pas résonance

0,5 pt b) On a $4\omega^3 + 2\omega_0^2 \omega \left(\frac{1}{Q^2} - 2 \right) = 0$
 $\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{2} \left(\frac{1}{Q^2} + 2 \right)}$

alors $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

si $Q \gg 1$ alors on a $\omega = \omega_0$



II-Mallées LC couplées par une inductance 8,5 p

0,5 p 1) En a :

$$U_{L_0} = L_0 \frac{di_0}{dt} \quad \left| \quad i_1 = C \frac{dU_{C_1}}{dt} = \frac{dq_1}{dt}\right.$$

$$U_{L_1} = L \frac{di_1}{dt}$$

$$i_2 = C \frac{dU_{C_2}}{dt} = \frac{dq_2}{dt}$$

$$U_{L_2} = L \frac{di_2}{dt}$$

Si y a continuité des intensités et des tensions U_{C_1} et U_{C_2}
donc à $t=0$ on a $i_0 = i_1 = i_2 = 0$

1 p 2) En a :

$$U_{L_0} = U_{L_1} + U_{C_1} \Rightarrow L_0 \dot{i}_0 = L \dot{i}_1 + \frac{q_1}{C} + K_1$$

$$= U_{L_2} + U_{C_2} \Rightarrow L_0 \dot{i}_0 = L \dot{i}_2 + \frac{q_2}{C} + K_2$$

$$\text{avec } i_1 = \frac{dq_1}{dt} \text{ et } i_2 = \frac{dq_2}{dt}$$

$$i_0 + i_1 + i_2 = 0 \Rightarrow i_0 = -(i_1 + i_2) = -\left(\frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt}\right)$$

donc

$$L_0 \left(\frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt} \right) + L \frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{C} + K_1 = 0$$

$$\left(L_0 \left(\frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt} \right) + L \frac{dq_2}{dt} + \frac{q_2}{C} + K_2 = 0 \right.$$

$$\text{en } t=0 \text{ on a : } U_{C_2}=0 = \frac{q_2}{C} + K_2 = K_2 \Rightarrow K_2=0$$

$$U_{C_1} = \frac{q_1}{C} + K_1 = \frac{q_0}{C} \Rightarrow K_1=0$$

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \frac{L}{L_0} \ddot{q}_1 + \frac{q_1}{L_0 C} = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \frac{L}{L_0} \ddot{q}_2 + \frac{q_2}{L_0 C} = 0 & (2) \end{cases}$$

4) 3) En pose $S(t) = q_1(t) + q_2(t) \Rightarrow \ddot{S} = \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2$
 $D(t) = q_1(t) - q_2(t) \Rightarrow \ddot{D} = \ddot{q}_1 - \ddot{q}_2$

alors

$$\begin{cases} (1) + (2) = \ddot{S} \left(2 + \frac{1}{L_0}\right) + S \left(\frac{1}{L_0 C}\right) = 0 \\ (1) - (2) = \ddot{D} \left(\frac{1}{L_0}\right) + D \left(\frac{1}{L_0 C}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{S} + \frac{1}{(L+2L_0)C} S = 0 = \ddot{S} + \omega_+^2 S \\ \ddot{D} + \frac{1}{LC} D = 0 = \ddot{D} + \omega_-^2 D \end{cases}$$

5) 4) donc $\omega_+ = \frac{1}{\sqrt{(L+2L_0)C}}$ et $\omega_- = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

5) 5) $S(t) = R_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+)$

$$S(0) = q_0 = R_+ \cos(\varphi_+)$$

$$\dot{S} = -\omega_+ R_+ \sin(\omega_+ t + \varphi_+)$$

$$\dot{S}(0) = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 = 0 = -\omega_+ R_+ \sin(\varphi_+)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_+ = 0 \\ R_+ = q_0 \end{cases}$$

$$D(t) = R_- \cos(\omega_- t + \varphi_-)$$

$$D(0) = q_0 = R_- \cos(\varphi_-)$$

$$\dot{D} = -\omega_- R_- \sin(\omega_- t + \varphi_-)$$

$$\dot{D}(0) = \dot{q}_1 - \dot{q}_2 = 0 = -\omega_- R_- \sin(\varphi_-)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_- = 0 \\ R_- = q_0 \end{cases}$$

donc $\begin{cases} S(t) = q_0 \cos(\omega_+ t) \\ D(t) = q_0 \cos(\omega_- t) \end{cases}$

1) 6) $q_1(t) = \frac{1}{2}(S(t) + D(t))$

+ 0.54) $q_1(t) = \frac{q_0}{2} (\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t))$

$q_2(t) = \frac{1}{2}(S(t) - D(t))$

• $q_2(t) = \frac{q_0}{2} (\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t))$

• $i_1 = \frac{dq_1}{dt} = -\frac{q_0}{2} (\omega_+ \sin(\omega_+ t) + \omega_- \sin(\omega_- t))$

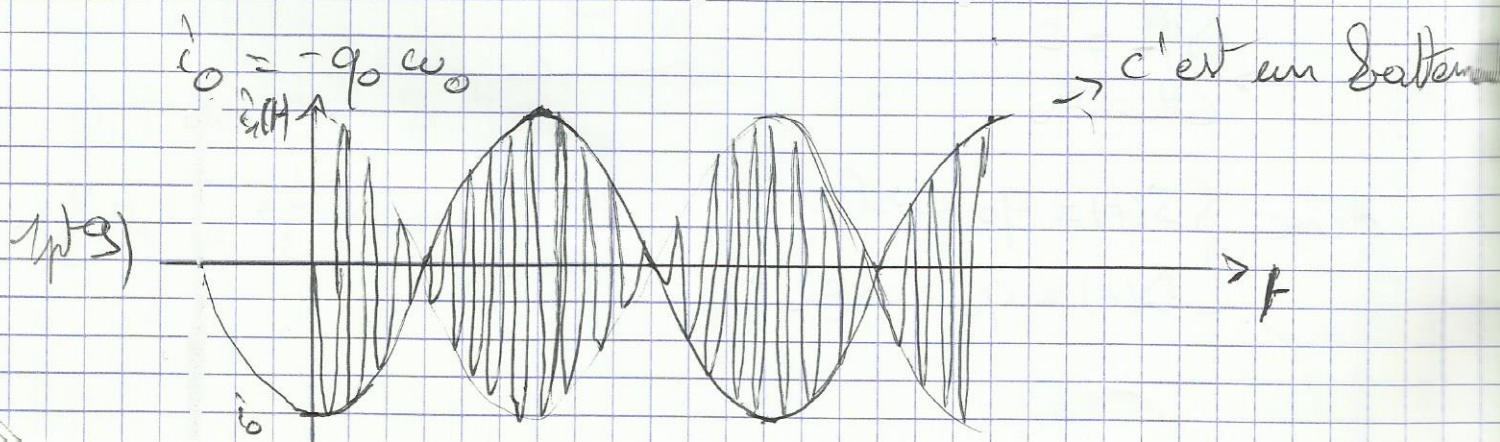
• $i_2 = \frac{dq_2}{dt} = -\frac{q_0}{2} (\omega_+ \sin(\omega_+ t) - \omega_- \sin(\omega_- t))$

1) 7) $\omega_+ = \frac{1}{\sqrt{(L+2L_0)C}} = \frac{1}{\sqrt{LC}\sqrt{1+2\varepsilon}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+2\varepsilon}} \approx \omega_0 - \omega_0 \varepsilon$
 $\approx \omega_0(1-\varepsilon)$

$\omega_- = \omega_0$, avec $\varepsilon = \frac{L_0}{L}$

1) 8) $i_1(t) \approx -\frac{q_0}{2} (\omega_0 \sin(\omega_0 t) + \omega_0(1-\varepsilon) \sin((1-\varepsilon)\omega_0 t))$
 $\approx -\frac{q_0}{2} (\omega_0 \sin(\frac{(2-\varepsilon)\omega_0 t}{2}) \cos(\frac{\varepsilon\omega_0 t}{2}) + \varepsilon\omega_0 \sin((1-\varepsilon)\omega_0 t))$

$\Rightarrow i_1(t) \approx -q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) \cos(\frac{\varepsilon\omega_0 t}{2})$



III - dimensionnalité et génération d'harmiques 7.5 pt

$$\text{0.5 pt 1) } [E_p] = [S] = \left[\frac{1}{3} \alpha r^3 \right] = [\alpha] \times [L]^3$$

$$\Rightarrow [\alpha] = \frac{[S]}{[L]^3} = \frac{[M] \times ([L][T]^{-1})^2}{[L]^3}$$

$$\text{donc } [\alpha] = \frac{[M]}{[L][T]^2} \quad \text{soit dans le SI: } \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\text{0.5 pt 2) } F_p = -\frac{E_p(r)}{dr} = -kr + \alpha r^2 \quad (F_p = -\vec{\text{grad}} E_p)$$

1 pt 3) Suivant le principe fondamental de la dynamique on a (suivant 0.1)

$$m \ddot{r} = -kr + \alpha r^2 \Rightarrow \ddot{r} + \frac{k}{m} r = \frac{\alpha}{m} r^2$$

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = \varepsilon r^2 \quad \text{avec } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ et } \varepsilon = \frac{\alpha}{m}$$

1 pt 4) La solution est:

$$r(t) = R \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\text{1 pt 5) } r(0) = r_0 = R \cos(\varphi)$$

$$\dot{r}(0) = -R \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{r}(0) = -R \omega_0 \sin(\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ R = r_0 \end{cases}$$

$$r(t) = r_0 \cos(\omega_0 t)$$

1 pt 6) Soit $x = r^{(0)} + r^{(1)}$, on a, avec $\ddot{x} = \ddot{r}^{(0)} + \ddot{r}^{(1)}$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x^2$$

$$\Rightarrow \ddot{r}^{(0)} + \ddot{r}^{(1)} + \omega_0^2 r^{(0)} + \omega_0^2 r^{(1)} = \varepsilon r^{(0)2} + \varepsilon r^{(1)2} + 2\varepsilon r^{(0)} r^{(1)}$$

en ne gardant que des termes d'ordre 1 et en utilisant la solution de 4), on trouve

$$\ddot{r}^{(1)} + \omega_0^2 r^{(1)} = \varepsilon r^{(0)2} \quad \longrightarrow \quad (\ddot{r} + \omega_0^2 r = 0)$$

15/7) La solution est la somme de l'équation homogène + la solution particulière.

$$e_p^{(1)} = A^{(1)} \cos(\omega_0 t + \phi^{(1)})$$

$e_p^{(1)}$ est de la forme de $\epsilon e^{2i\omega_0 t} = \epsilon \epsilon_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$
 $= \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0^2 (1 + \cos(2\omega_0 t))$