

Devoir maison

Systèmes oscillants

Energie potentielle et équilibre

On considère une masse ponctuelle astreinte à se déplacer sur une demi droite Ox et on repère sa position par son abscisse x (avec $x > 0$). On suppose que les forces subies sont conservatives et que l'énergie potentielle dont la résultante dérive peut s'écrire :

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{A}{x}$$

avec k et A constantes positives.

1. Montrer qu'il existe une position d'équilibre x_0 que l'on déterminera en fonction de k et A . Cette position d'équilibre est-elle stable ? Expliquer pourquoi.
2. Représenter graphiquement les fonctions $\frac{1}{2}kx^2$, $\frac{A}{x}$ et $U(x)$ en faisant bien apparaître la position d'équilibre x_0 .
3. Ecrire l'énergie potentielle au voisinage de la position d'équilibre (on écrira le développement de Taylor au second ordre au voisinage de x_0).
4. En déduire l'expression de la force équivalente (au premier ordre) subie au voisinage de x_0 .
5. Ecrire l'équation du mouvement correspondant et en déduire la période des petits mouvements autour de la position d'équilibre x_0 en fonction de k et de la masse m du point matériel.

On rappelle le développement de Taylor au second ordre d'une fonction $f(x)$ au voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$