

TD7-Electromagnétisme

Electromagnétisme en régime statique

Equations locales

Exercice 1 : Opérateurs vectoriels "nabla" et Laplacien, Relations locales et intégrales de l'électromagnétisme

L'opérateur vectoriel symbolique **nabla** $\vec{\nabla}$ s'écrit dans le système de coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$$

On rappelle que :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$$

L'opérateur scalaire symbolique **Laplacien** Δ s'écrit dans le système de coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2}$$

1. Vérifier les relations mnémotechniques suivantes :

$$\vec{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f ; \text{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} ; \vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

2. Définir l'opérateur Laplacien vectoriel $\vec{\Delta}$. Montrer que

$$\vec{\Delta} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$$

3. On considère un champ de vecteurs radial : $\vec{G} = \frac{A}{r^n} \vec{u}_r$ où n est un entier. Exprimer $\vec{G}$ dans le système de coordonnées cartésiennes.
A quelle condition a-t-on $\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = 0$? Citer des exemples de champs vectoriels satisfaisant cette relation.
4. Rappelez les 4 équations de Maxwell en régime statique.
5. Rappelez les relations intégrales de Stokes et Ostrogradski et retrouver les 4 relations intégrales des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à partir des équations de Maxwell sous leur forme locale.

Exercice 2 : Potentiel de Yukawa

L'atome d'hydrogène peut être modélisé par une charge élémentaire positive $q = +e$ placée en O représentant le noyau et une charge négative $-e$ représentant le nuage électronique occupant l'espace autour du noyau. Dans ce modèle, la charge de l'électron, non localisée, est représentée par la densité volumique de charge $\rho(r)$. $\rho(r)$ ne dépend que de la distance r au noyau. On se placera dans le système de coordonnées sphériques.

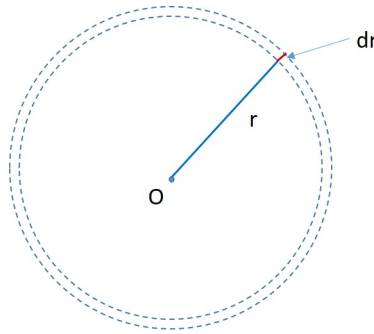


Figure 1

Yukawa proposa pour ce modèle un potentiel électrostatique de la forme :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} e^{-r/a}$$

2.1 Calcul de $\rho(r)$

1. Calculer à partir de $V(r)$ l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(r)$.
2. Rappelez la relation d'Ostrogradski et la forme intégrale du théorème de Gauss. En déduire l'expression de la forme locale du théorème de Gauss.
3. En utilisant la forme locale du théorème de Gauss, montrez que :

$$\rho(r) = \frac{-q}{4\pi a^2 r} e^{-r/a}, \quad a > 0$$

4. Etablir la relation entre le potentiel électrostatique $V(M)$ et la densité de charges $\rho(M)$ (équation de Poisson)
5. Retrouver l'expression de $\rho(r)$ à partir de l'équation de Poisson.
6. On considère un volume élémentaire $d\tau$ compris entre deux sphères de centre O et de rayon r et $r + dr$ (voir la figure 1). Montrez que $d\tau = 4\pi r^2 dr$. En déduire l'expression de la charge dq se trouvant entre ces deux sphères en fonction de $\rho(r)$, r et dr .
7. Mettre l'expression de dq sous la forme :

$$dq = q\mathcal{P}(r)dr$$

Que vaut $\mathcal{P}(r)$ quand $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow \infty$. Représenter graphiquement la fonction $\mathcal{P}(r)$. Pour quelle valeur de r est-elle maximale ?

8. Que représente la fonction $\mathcal{P}(r)$? Quelle est la dimension de a ? Que représente physiquement a et quel est son ordre de grandeur ?
9. Calculer la charge Q associée à la densité de charge $\rho(r)$. Le résultat était-il prévisible ? On donne $\int x e^{-x/a} dx = -a e^{-x/a} (a + x)$

On donne dans le système de coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} V(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 E_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta E_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}$$

Exercice 3 : Energie électrostatique d'ions en solution

3.1 Energie électrostatique

1. Rappeler l'expression de l'énergie électrostatique d'une charge électrostatique q placée dans un potentiel V .
2. Donner l'expression du travail W nécessaire pour former un doublet de deux charges q_1 et q_2 espacées de la distance r_{12} . En déduire l'expression de l'énergie électrostatique $\mathcal{E}_2$ de ces deux charges.
3. Donner l'expression de l'énergie électrostatique $\mathcal{E}_N$ de N charges q_i placées au potentiel V_i . Quelle est l'origine du facteur $1/2$?

3.2 Longueur de Bjerrum

On considère une solution de chlorure de sodium (NaCl) à la température T . Dans un liquide isolant, le champ et le potentiel électriques créés par une charge sont atténués de sorte qu'il est possible de remplacer ε_0 par $\varepsilon_0 \varepsilon_r$ où ε_r est la permittivité relative du milieu. L'énergie $\mathcal{E}_T$ associée à l'agitation des molécules et des ions est donnée par $\mathcal{E}_T \simeq k_B T$

1. Donnez l'expression de la longueur l_b au delà de laquelle l'énergie électrostatique d'une paire anion-cation en solution dans un liquide de permittivité relative ε_r est plus faible que l'énergie thermique $\mathcal{E}_T$.
2. Calculer la valeur de l_b pour l'eau ($\varepsilon_r = 80$) et l'huile alimentaire ($\varepsilon_r = 2.8$) à température ambiante. Que peut-on en conclure ?

On donne $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$, $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$