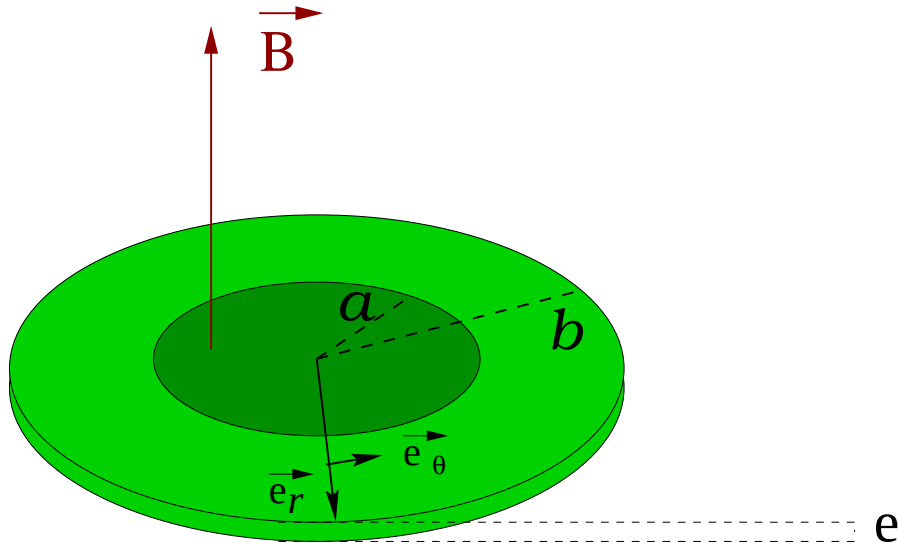


Electromagnétisme

TD 11 : Induction magnétique-Courants de foucault

Exercice 1 : Courants de Foucault dans un disque, cuisson par induction

Un disque conducteur mince de conductivité γ , d'axe (Oz) , de rayon b et d'épaisseur e , est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}(t) = B_m \cos(\omega t) \vec{e}_z$, confiné dans un cylindre d'axe Oz , de rayon a ($a < b$) et nul ailleurs. On négligera le champ $\vec{B}_{induit}$ créé par le courant induit. On se placera dans le système de coordonnées cylindriques r, θ, z .

1.1 Vecteur densité de courant $\vec{J}(\vec{r}, t)$

1. Rappeler la direction du champ magnétique $\vec{B}$ en tout point d'un plan de symétrie Π et de symétrie-inversion Π^* de la distribution de courants $\vec{J}$.
2. En vous appuyant sur le champ magnétique identifiez les plans de symétrie-inversion Π^* et de symétrie Π de la distribution de courants.
3. En tenant compte des symétries et des invariances, montrez que le vecteur densité de courant s'écrit $\vec{J} = J_\theta(r, t) \vec{u}_\theta$. On admettra que la distribution de courants ne dépend pas de z .

1.2 Champ électromoteur $\vec{E}_m(\vec{r}, t)$

1. Rappeler la relation entre $\vec{J}$ et $\vec{E}_m$. En déduire l'expression générale du champ électromoteur $\vec{E}_m$. On ne demande pas de calculer l'expression de $\vec{E}_m$.
2. Exprimez la circulation $\mathcal{C}$ de $\vec{E}_m$ le long d'un cercle d'axe Oz et de rayon r en fonction de sa ou ses composantes non nulles. Exprimez ensuite $\mathcal{C}$ en fonction du champ magnétique $\vec{B}$. On précisera la relation intégrale utilisée.
3. En déduire l'expression de $\vec{E}_m$ en tout point du disque. On distinguera les deux zones $0 < r < a$ et $a < r < b$.
4. Retrouver l'expression de $\vec{E}_m$ pour $r < a$ grâce à la relation de Maxwell-Faraday sous sa forme locale.

On donne :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{G} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial G_z}{\partial \theta} - \frac{\partial G_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial G_r}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rG_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial G_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

1.3 Puissance dissipée

1. Montrer que la puissance instantanée dissipée par unité de volume $d\tau$ en tout point du disque est donnée par l'expression $\frac{d\mathcal{P}}{d\tau}(t) = \gamma E_m^2$.
2. Calculer la puissance instantanée $\mathcal{P}(t)$ dissipée dans le tout le disque. On distinguera les zones $0 < r < a$ et $a < r < b$.
3. Calculer l'expression de la puissance moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}(t) dt$ dissipée par le disque entièrement plongé dans le champ magnétique ($a = b$). T est la période du champ magnétique.
4. Calculer la puissance pour un disque de cuivre conductivité $\gamma = 6 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ d'épaisseur 2 mm, de rayon $a = 10 \text{ cm}$ entièrement plongé dans un champ de valeur maximale $B_m = 0.1 \text{ T}$ vibrant à la fréquence 50 Hz. Comparer à celle dissipée dans un disque de même dimensions en fer ($\gamma = 9.9 \cdot 10^6 \text{ S.m}^{-1}$). Commenter.

On donne :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2}$$

Exercice 2 : Freinage par Induction

Cet exercice a pour but de modéliser le système de freinage magnétique par induction utilisé dans certains camions ou trains à grande vitesse. On considère une roue (disque) métallique conductrice d'axe Oz, de rayon R et d'épaisseur e (selon z). Cette roue, reliée au mouvement de l'axe des roues d'un train, est placée dans l'entrefer d'un électroaimant pouvant fournir un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$. Des balais conducteurs frottent sur la circonférence de la roue pour collecter le courant induit. On appelle γ la conductivité du conducteur.

- 2.0.1** La roue tourne autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire ω . Donner l'expression du champ électromoteur $\vec{E}_m$ en tout point de la roue. Faire un schéma et représenter les différents vecteurs en un point M.
- 2.0.2** En déduire l'expression du vecteur densité de courant $\vec{j}$. Comment appelle t-on ces courants ?
- 2.0.3** Pour un volume élémentaire $d\tau$ de conducteur, la force de Laplace élémentaire est $d\vec{F} = \vec{j}d\tau \wedge \vec{B}$. Expliciter cette force en fonction de γ , B et ω . En déduire le moment élémentaire :

$$d\vec{\mathcal{M}} = \vec{OM} \wedge d\vec{F}$$

- 2.0.4** En déduire le moment total $\vec{\mathcal{M}}$ subi par le disque. A t-on bien un processus de freinage ?
- 2.0.5** Quelle est l'expression de la puissance $\mathcal{P}$ totale dissipée par effet Joule. Sous quelle forme est transformée l'énergie cinétique de la roue ?