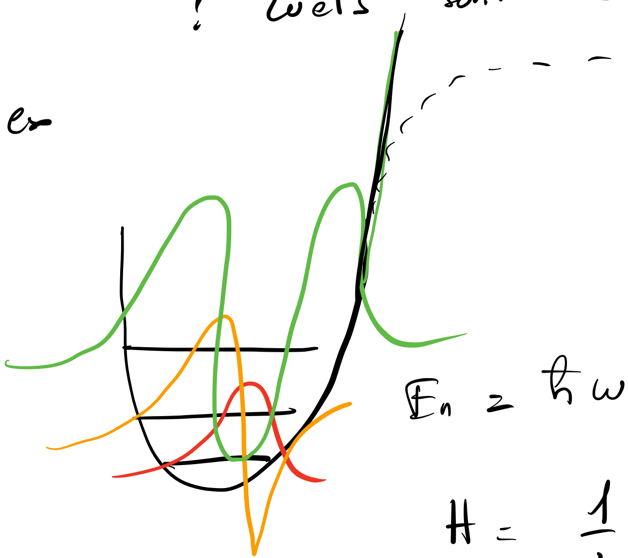
Pb : système entièrement caractérisé $|\Psi_n\rangle$, E_n
est soumis à une perturbation

? Quels sont les nouveaux états propres et
vecteur propres

ex



$$E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$H = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}\alpha x^4$$

ex Champ électrique 10 eV

taille $1\,\text{Å} = 10^{-10}$ m.

champ 10^{11} V/m.

Ts les champs externes seront faibles / à ce champ interne.

Formulat° du pb

On cherche $|\Psi\rangle$ et W / $\hat{H}|\Psi\rangle = W|\Psi\rangle$

avec $\hat{H} = \hat{H}_0 + \alpha\hat{H}_1$ $\quad \langle \hat{H}_0\rangle \sim \left|\begin{array}{l}\langle \hat{H}_1\rangle \\ \alpha \ll 1.\end{array}\right.$

dégénérescence du niveau d'énergie E_n.

$\hat{H}_0 |n,r\rangle = E_n |n,r\rangle$

On connait tous les états propres et énergies propres de $\hat{H}_0$

Developpement limité des solutions

$$|\Psi\rangle = |\Psi^{(0)}\rangle + \lambda |\Psi^{(1)}\rangle + \lambda^2 |\Psi^{(2)}\rangle + \dots$$

$$W = W^{(0)} + \lambda W^{(1)} + \lambda W^{(2)} + \dots$$

$$H|\Psi\rangle = W|\Psi\rangle$$

$$(H_0 + \lambda H_1)(\quad) = (W^{(0)} + \lambda W^{(1)} + \dots)(|\Psi^{(0)}\rangle + \lambda|\Psi^{(1)}\rangle \dots)$$

Identificat° des termes du DL

(i) λ^0 $\quad H_0 |\Psi^{(0)}\rangle = W^{(0)} |\Psi^{(0)}\rangle$

Ordre 0 $\left\{ \Rightarrow \begin{cases} |\Psi^{(0)}\rangle = |n, r\rangle \\ W^{(0)} = E_n. \end{cases} \right.$

(ii) λ^1 $\quad H_0|\Psi^{(1)}\rangle + H_1|\Psi^{(0)}\rangle = W_0|\Psi^{(1)}\rangle + W^{(1)}|\Psi^{(0)}\rangle$

(iii) λ^2 $\quad H_0|\Psi^{(2)}\rangle + H_1|\Psi^{(1)}\rangle = W_0|\Psi^{(2)}\rangle + W^{(1)}|\Psi^{(1)}\rangle + W^{(2)}|\Psi^{(0)}\rangle$

A] Ordre 0

$|\Psi^0\rangle$ vecteur propre de $\hat{H}_0$ et vp $W^{(0)} = E_n$

$$|\Psi^{(0)}\rangle = \sum_{r=1}^{g_n} C_r |n, r\rangle.$$ et g_n niveau de degenerescence de l'état n

$\in \mathcal{E}(n)$

B) Ordre 1 : non dégénéré

$$|\psi^{(0)}\rangle = |n\rangle \quad \text{et} \quad w^{(0)} = E_n.$$

$\langle n| \times (ii)$

$$\underbrace{\langle n|H_0|\psi^{(1)}\rangle}_{E_n \cancel{\langle n}|\psi^{(1)}\rangle} + \langle n|H_1|\psi^{(0)}\rangle = \langle n|w^{(0)}|\psi^{(1)}\rangle + \langle n|w^{(1)}|\psi^{(0)}\rangle$$

$$E_n \cancel{\langle n}|\psi^{(1)}\rangle + \text{———} = E_n \cancel{\langle n}|\psi^{(1)}\rangle + \underbrace{\text{———}}_{w^{(1)}\langle n|\psi^{(0)}\rangle = 1}$$

Donc $w^{(1)} = \langle n | H_1 | n \rangle$

$$\Delta E_n = \underbrace{E_n^{(1)}}_{w^{(0)} + d w^{(1)}} - \underbrace{E_n}_{w^{(0)}}$$

Déplacement en énergie.

$$\Delta E_n = d\, w^{(1)} = \langle n | d H_1 | n \rangle$$

État propre à l'ordre 1

$$|\psi^{(1)}\rangle = \langle n|\psi^{(1)}\rangle |n\rangle + \sum_{k \neq n} \langle k|\psi^{(1)}\rangle |k\rangle$$

$$\langle n|\psi^{(1)}\rangle = \langle \psi^{(0)}|\psi^{(1)}\rangle = 0$$

$\langle k|(ii)$

$$E_k \langle k|\psi^{(1)}\rangle + \langle k|H_1|\underbrace{\psi^{(0)}}_{|n\rangle}\rangle = E_n \langle k|\psi^{(1)}\rangle + w^{(1)} \underbrace{\cancel{\langle k|n\rangle}}_{0}$$

$$|\psi^{(1)}\rangle = \sum_{k \neq n} \frac{\langle k|H_1|n\rangle}{E_n - E_k} |k\rangle$$

et $\Psi = |\psi^{(0)}\rangle + \lambda |\psi^{(1)}\rangle$

$$|\psi\rangle = |n\rangle + \sum_{k\neq n} \frac{\langle k|\lambda H_1|n\rangle}{E_n - E_k} |k\rangle$$

A l'ordre 2

$\langle n| \times (iii)$ $\quad \underbrace{\langle n|\hat{H}_0}_{E_n\langle n|}|\psi^{(2)}\rangle + \langle n|H_1|\psi^{(1)}\rangle = E_n \langle n|\cancel{\psi^{(2)}}\rangle + w^{(1)} \overbrace{\langle n|\cancel{\psi^{(1)}}\rangle}^{0} + w^{(2)} \underbrace{\langle n|n\rangle}_{1}$

$E_n \langle n|\cancel{\psi^{(2)}}\rangle$

$$w^{(2)} = \sum_{k\neq n} \frac{|\langle k|H_1|n\rangle|^2}{E_n - E_k}.$$

$$\Delta E_n^{(2)} = \lambda w^{(1)} + \lambda^2 w^{(2)}$$

$$\Delta E_n^{(2)} = \langle n|\lambda H_1|n\rangle + \sum_{k\neq n} \frac{|\langle n|\lambda H_1|k\rangle|^2}{E_n - E_k}.$$

Ordre 1 dégénéré

Soit $(|n,r\rangle)_{r=1\dots p_n}$ une base orthonormée de $\mathcal{E}(n)$

$$|\psi^{(0)}_{n,q}\rangle = \sum_{r=1}^{p_n} C^n_{qr} |n,r\rangle. \qquad q = 1\dots p_n$$

état propre à l'ordre 0 $\in \mathcal{E}(n)$

Obj determine C^n_{qr} et $w^{(1)}$

$\langle n,r| \times (ii) \qquad E_n \cancel{\langle n,r|}\psi_q^{(1)}\rangle + \langle n,r|\hat{H}_1|\psi_q^{(0)}\rangle = E_n \cancel{\langle n,r|}\psi_q^{(1)}\rangle +$

$W_q^{(1)}\langle n,r|\psi_q^{(0)}\rangle$

$$\sum_{r'=1}^{p_n} C_{q\,r'}^{n} \langle n,r|H_1|n r'\rangle = W_q^{(1)} C_{q\,r}^{n} \qquad \forall r\, r' \in [1,p_n]$$

$$\sum_{r'=1}^{p_n} C_{q\,r'}^{n} \left(\langle n,r|H_1|n r'\rangle - W^{(1)}\delta_{rr'}\right) = 0$$

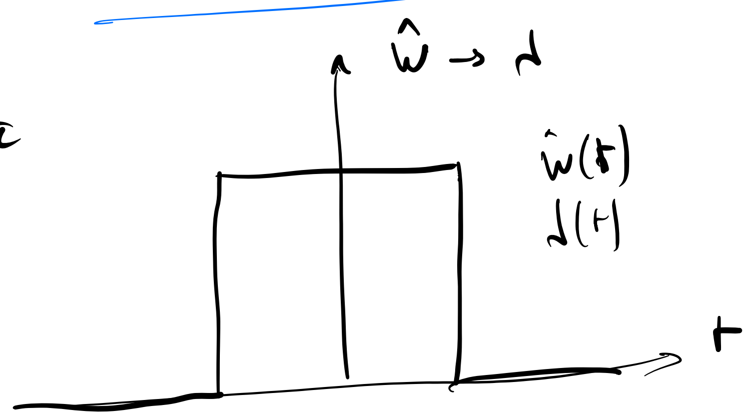
Matrice à diagonaliser pour trouver $W_q^{(1)}$

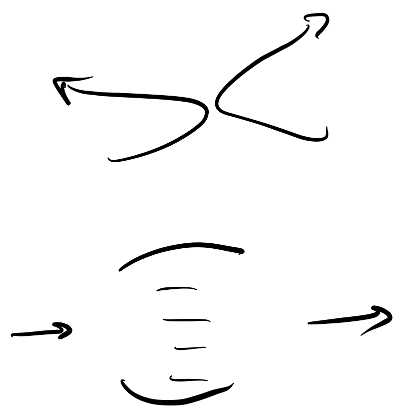
$$\begin{pmatrix} \langle n,1|H_1|n,1\rangle & \cdots & \langle n,p_n|H_1|n,1\rangle \\ \vdots & \ddots & \\ \langle n,1|H_1|n\,p_n\rangle & \cdots & \langle n,p_n|H_1|n\,p_n\rangle \end{pmatrix}$$

II Perturbations dépendante du temps

$\hat{W} \to \lambda$

etc





* Formulat° du problème

$$\begin{cases} \hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1(t) \\ \hat{H}_0 |n\rangle = E_n |n\rangle \end{cases} \Longleftarrow \quad i\hbar \frac{\partial |n\rangle}{\partial t} = \hat{H}_0 |n\rangle$$

$|n\rangle$ base OM

$|\Psi(t)\rangle$ l'état à l'instant t

$\hookrightarrow P_{n\to m}(t) = |\langle m|\Psi(t)\rangle|^2$

* <u>Resolution</u>

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n \gamma_n(t)\, e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} |n\rangle$$

$\downarrow$ eq° de Schrodinger $H|n\rangle = E_n |n\rangle$

$$i\hbar \sum_n \left(\left(\dot{\gamma}_n(t) - \cancel{\frac{i}{\hbar} E_n \gamma_n(t)}\right) e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} |n\rangle \right) = \sum_n \gamma_n\, e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} (\cancel{\hat{H}_0} + \hat{H}_1(t)) |n\rangle$$

$e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} |n\rangle$

$\hookrightarrow$ eq° de Sch à l'ordre 0

$$i\hbar \sum_n \dot{\gamma}_n(t)\, e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} |n\rangle = \sum_n \gamma_n(t)\, e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} \hat{H}_1(t) |n\rangle$$

$$\dot{\gamma}_k = -\frac{i}{\hbar} \sum_n \gamma_n(t)\, e^{-i\frac{(E_n - E_k)t}{\hbar}} \langle k | \hat{H}_1(t) | n \rangle$$

* Perturbation

$\hat{H}_1 \to \lambda \hat{H}_1$ et λ "petit"

$$\gamma_k(t) = \gamma_k^{(0)}(t) + \lambda\, \gamma_k^{(1)}(t) + \lambda^2 \; ----$$

(a) $i\hbar\, \dot{\gamma}_k^{(0)}(t) = 0$

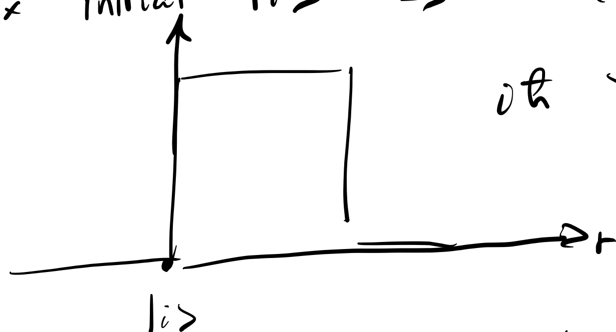
(b) $i\hbar\, \dot{\gamma}_k^{(1)}(t) = \sum_n \gamma_n^{(0)}(t)\, e^{-i\frac{(E_n - E_k)t}{\hbar}} \langle k | H_1 | n \rangle$

(c) $i\hbar\, \dot{\gamma}_k^{(k)}(t) = \sum_n \gamma_n^{(k-1)}(t)$ — — ————

résolution itérative

Ex initial $|i\rangle \Rightarrow \gamma_k(0) = \delta_{k,i}$

$$i\hbar\, \dot{\gamma}_f^{(1)}(t) = e^{-i\frac{(E_i - E_f)t}{\hbar}} \langle f | H_1 | i \rangle$$



$$\gamma_f^{(1)}(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{-i}{\hbar} e^{-i\frac{(E_i - E_f)t'}{\hbar}} \langle f | \hat{H}_1 | i \rangle \, dt'$$

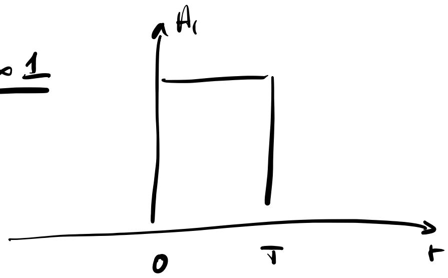
$$\gamma_f(t) = \lambda\, \gamma_f^{(1)}(t)$$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{-i}{\hbar} e^{-i\frac{(E_i - E_f)t'}{\hbar}} \langle f | \lambda \hat{H}_1 | i \rangle \, dt'$$

$$P_{i\to f}(t) = \left| \langle f | \psi(t) \rangle \right|^2$$

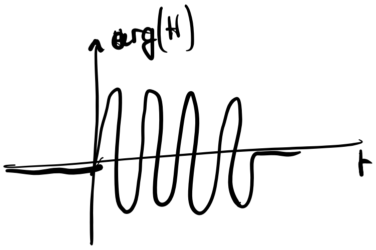
$$= \left| \gamma_f(t) \right|^2$$

Ex 1



$$P_{i\to f}(t \geq T) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \langle f | dH_1 | i \rangle \right|^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$$

Ex 2



$$P_{i\to f}(t \geq T) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \langle f | dH_1 | i \rangle \right|^2 \frac{\sin^2\left((\omega - \omega_0)\frac{T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\right)^2}$$