

CONCEPTION DE SYSTEMES OPTIQUES

EXAMEN - DURÉE : 3 H

CALCULATRICE AUTORISÉE

+ 1 FEUILLE A4 RECTO-VERSO DE NOTES PERSONNELLES

TOUS AUTRES DOCUMENTS INTERDITS

CONNECTIONS INTERNET INTERDITES

Cet examen est constitué d'un QCM, d'un problème, et d'un exercice, qui peuvent être traités indépendamment, et doivent être rendues sur des **copies séparées**.

On rappelle en ANNEXE quelques formules utiles (écart normal aberrant d'un miroir, formules de variations des coefficients d'aberrations du 3^e ordre lorsqu'on déplace la pupille d'un système optique, polynômes de Zernike, relations de Nijboer).

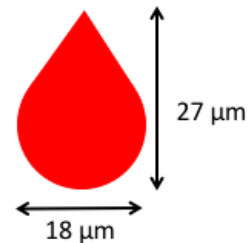
Questionnaires à choix multiples (temps conseillé : 15 min)

À chacune des propositions ci-dessous, choisissez **une réponse** parmi celles qui vous sont proposées – dans tous les cas une seule d'entre elles est correcte. Remplissez le tableau donné en annexe. Une bonne réponse rapporte **+1**, tandis qu'une mauvaise vaut **-0,25** et l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève aucun point. La note finale à ce QCM ne pourra être négative.

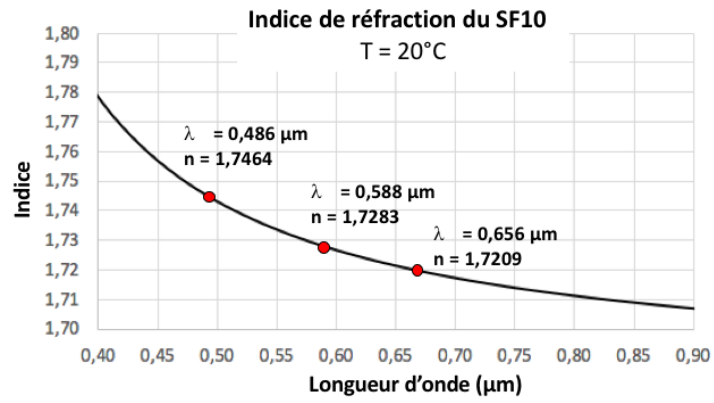
1. Un objectif photographique travaille en conjugaison infini-foyer, au nombre d'ouverture **N = 5,6**. On met en évidence, pour un point objet dans le champ, une tache en forme d'aigrette, dont les dimensions sont $27\ \mu\text{m} \times 18\ \mu\text{m}$ (cf. ci-contre).

On peut en déduire que cet objet présente un écart normal décrit, dans la base de Seidel, sous la forme :

- a. $\Delta(u, \varphi) = 0,4\ \mu\text{m} \times u^2 \times \cos 2\varphi$
- b. $\Delta(u, \varphi) = 0,8\ \mu\text{m} \times u^3 \times \cos \varphi$
- c. $\Delta(u, \varphi) = 1,6\ \mu\text{m} \times u^4$
- d. $\Delta(u, \varphi) = 2,4\ \mu\text{m} \times u^3 \times \cos 3\varphi$
- e. $\Delta(u, \varphi) = 3,2\ \mu\text{m} \times u^3 \times \cos \varphi$



2. La courbure de champ est une aberration qui se caractérise par le fait que
- a. les images ne se forment pas dans le même plan selon la direction des rayons dans la pupille.
 - b. les objets situés à des distances différentes du dispositif optique ne forment pas des images dans le même plan.
 - c. la surface d'onde aberrante présente une courbure sphérique.
 - d. les images se forment sur une surface courbe plutôt qu'un plan.
 - e. les images se forment dans un plan perpendiculaire à l'axe optique distinct du plan image paraxial.
3. L'indice du SF10 est donné, dans le visible, sur le graphe ci-dessous à trois longueurs d'onde dans la gamme spectrale d'intérêt. Quelle est la constringence ν de ce verre ?



- a. $\nu \leq 15$
- b. $\nu \simeq 30$
- c. $\nu \simeq 40$
- d. $\nu \simeq 70$
- e. $\nu \geq 90$

Problème : Correcteur d'ouverture de Schmidt (temps conseillé : 1h45)

Inspiré par les travaux de Schwarzschild en 1905 sur l'asphérisation des miroirs des télescopes en vue de corriger les aberrations du 3^{ème} ordre de Seidel, Schmidt propose en 1931 la célèbre solution dite de la « lame de Schmidt », qui consiste à placer une lame de verre de puissance nulle mais asphérisée judicieusement sur l'une de ses faces, en avant du miroir primaire du télescope. L'idée de Schmidt a ouvert de nouvelles perspectives dans la conception des télescopes. De nombreuses variantes de sa fameuse lame ont vu le jour, conduisant aux solutions modernes à trois miroirs qui équipent les télescopes spatiaux d'observation de l'univers lointain, tels le James Web Telescope lancé le 25 décembre 2021, ou d'observation terrestre, tels ceux des satellites Pléiades.

I. Correction de l'aberration sphérique du 3^{ème} ordre d'un miroir sphérique

On considère un miroir sphérique concave ouvert à $f/3$, de rayon de courbure $R = 2$ m, travaillant en conjugaison infini-foyer. La source de lumière est monochromatique dans cette partie, de longueur d'onde λ . La lame de Schmidt est réalisée en verre d'indice $n = 1.5$ à cette longueur d'onde. Elle est positionnée près du centre de courbure du miroir. L'une de ses faces est plane, tournée vers l'infini. On cherche à déterminer le profil d'asphérisation de sa seconde face permettant de corriger l'aberration sphérique du 3^{ème} ordre du miroir.

1. Pour un point objet sur l'axe, exprimez l'écart normal aberrant $\Delta_M(u)$ introduit par le miroir et mesuré par rapport à la sphère de référence centrée au foyer paraxial du miroir. On note $u = h/h_{max}$ la hauteur sur le miroir d'un rayon lumineux, normalisée en bord de miroir.
2. Évaluez l'amplitude $\Delta_{M,max}$ de l'écart normal en bord de pupille, pour une mise au point au foyer paraxial. On donnera le résultat en μm .
3. On note $\Delta_L(u)$ l'écart normal aberrant introduit par la lame. Comment s'exprime l'écart normal introduit par l'ensemble (lame + télescope) en fonction de $\Delta_M(u)$ et $\Delta_L(u)$?
4. En déduire les variations du profil d'épaisseur $e(u)$ de la lame qui permet de corriger l'aberration sphérique du 3^{ème} ordre de Seidel du miroir (mise au point au foyer paraxial). Que vaut l'épaisseur de la lame au bord si l'épaisseur au centre vaut $e_0 = 10$ mm ?

De telles variations d'épaisseur sont réalisées par érosion ionique. Afin de minimiser la durée d'érosion, il est préférable d'asphériser la lame afin de corriger l'aberration sphérique du 3^{ème} ordre de Zernike du miroir (mise au point au meilleur foyer).

5. Exprimez les variations du profil d'épaisseur $e^*(u)$ de la lame dans ce cas. De combien a-t-on réduit l'amplitude d'érosion nécessaire, par rapport au cas précédent ?
6. Faites un schéma en coupe de la lame pour cette érosion optimale, dans un plan méridien. Pour quelle valeur de h l'épaisseur de la lame est-elle minimale ?

II. Aberrations chromatiques introduites par la lame de Schmidt

La lame de Schmidt précédente est éclairée par une source de spectre large dans le domaine visible. On considère en particulier trois longueurs d'onde de ce spectre, $\lambda_R = 656$ nm, $\lambda_J = 587$ nm et $\lambda_B = 486$ nm. La constringence du verre de la lame est $v = 64$.

1. Expliquez pourquoi, dans la configuration ci-dessus, le chromatisme longitudinal **paraxial** introduit par la lame de Schmidt est nul.
2. Expliquez pourquoi, dans cette configuration, le chromatisme latéral **paraxial** introduit par la lame de Schmidt est également nul.

3. Au 3^{ème} ordre, l'aberration sphérique introduite par la lame de Schmidt dépend de la longueur d'onde via l'indice de réfraction du verre, $n(\lambda)$. C'est ce qu'on appelle le phénomène de sphéro-chromatisme.

- On note $\Delta_{L,\lambda}^*(u)$ l'écart normal d'aberration sphérique du 3^{ème} ordre introduite par la lame d'épaisseur $e^*(u)$, à la longueur d'onde λ . Exprimez $\Delta_{L,\lambda}^*(u)$ en fonction de $e^*(u)$ et de $n(\lambda)$.
- En déduire une relation entre $\Delta_{L,\lambda}^*(u)$, $\Delta_{L,\lambda_J}^*(u)$, $n(\lambda)$ et $n(\lambda_J)$.
- On note $\Delta_{sph-chr}^*(u) = \Delta_{L,\lambda_B}^*(u) - \Delta_{L,\lambda_R}^*(u)$ l'écart normal de sphéro-chromatisme. Montrez que

$$\Delta_{sph-chr}^*(u) = \frac{\Delta_{L,\lambda_J}^*(u)}{v} = \frac{\Delta_{M,max}}{v} (u^4 - u^2).$$

où $v = \frac{n(\lambda_B) - n(\lambda_R)}{n(\lambda_J) - 1}$ est la constringence du verre de la lame.

- Évaluez la dimension transverse de la tache de sphéro-chromatisme dans le plan de mise au point du meilleur foyer à λ_R . Comparez à la dimension de la tache d'Airy à λ_R .

III. Aberrations de champ du 3^{ème} ordre du télescope

1. La lame de Schmidt, seule, introduit-elle des aberrations de champ ? Justifiez votre réponse.

On s'intéresse maintenant aux aberrations de champ du télescope avec sa lame de Schmidt, placée au centre de courbure du miroir. Les bords de la lame constituent la pupille de l'ensemble.

- Quelles aberrations de champ sont nulles dans ce système ? Quelle(s) aberration(s) subsiste(nt) ? Justifiez votre réponse.
- Évaluez la dimension transverse de la réponse percussionnelle dans le plan focal paraxial du télescope, à 1° hors d'axe. Comparez à la tache d'Airy.
- Proposez une solution pour résoudre ce problème.

On s'intéresse dans la suite à l'impact d'un défaut de positionnement de la lame de Schmidt autour du centre de courbure du miroir.

5. On note a et b les coefficients classiques d'aberration sphérique et de coma du 3^{ème} ordre de Seidel, définis comme en cours, et reliés à l'écart normal Δ par

$$\Delta = -\frac{1}{4} a \alpha'^4 \text{ (aberration sphérique du 3^{ème} ordre)}$$

$$\Delta = b y' \alpha'^3 \cos \varphi \text{ (coma du 3^{ème} ordre)}$$

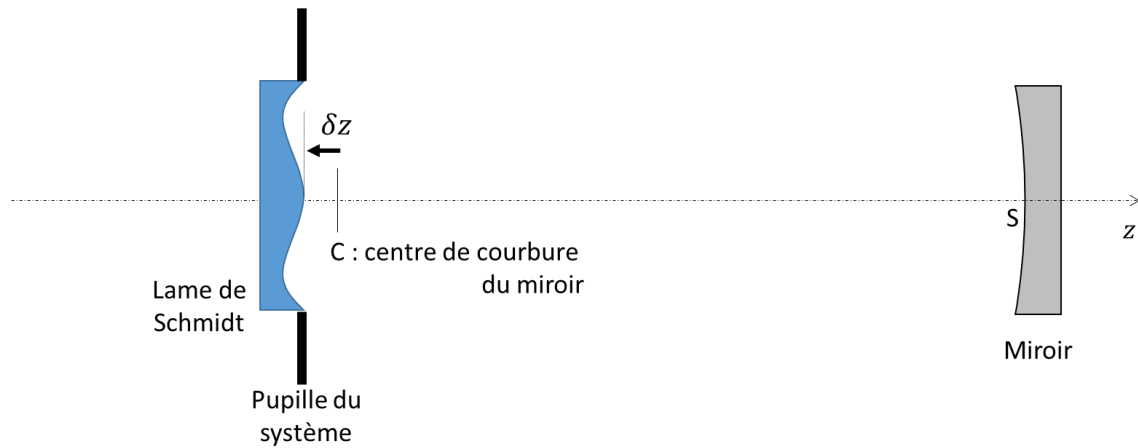
En vous aidant des expressions données en annexe pour l'écart normal Δ , exprimez a et b pour un miroir de conicité ε portant la pupille, en fonction de sa focale f' et de ε . Le miroir travaille en conjugaison infini-foyer.

6. Exprimez le coefficient b de coma du miroir de conicité ε lorsque la pupille d'entrée est située à une distance z_p du miroir. Montrer en particulier que b varie linéairement avec z_p .

7. On note $\delta z = z_p - 2f'$ l'écart le long de l'axe du télescope entre la position de la lame de Schmidt (pupille d'entrée du système) et le centre de courbure du miroir (cf. figure ci-dessous). Exprimez b en fonction de δz .

8. En déduire qu'il est possible de corriger la coma du 3^{ème} ordre introduite par le défaut de positionnement δz de la pupille en asphérisant le miroir avec une constante de conicité ε que l'on exprimera en fonction de $\delta z/(2f')$. Évaluez cette constante ε pour un défaut $\delta z = -10\text{mm}$. Quelle est la forme du miroir ?

Note : en pratique il est plus intéressant de reporter cette asphérisation supplémentaire sur la lame de Schmidt (qui est déjà asphérisée comme on l'a vu dans la partie I) et de conserver la forme sphérique pour le miroir (plus facile à réaliser).



Exercice : Etude d'un dispositif d'imagerie (temps conseillé : 1h)

On s'intéresse à un dispositif d'imagerie qui travaille dans le domaine visible, sur la plage [400 nm ; 800 nm]. Il réalise l'image d'un objet biologique sur un capteur CMOS noir et blanc, constitué de 2600×3400 pixels adjacents de dimensions $c = 5 \mu\text{m}$. Le dispositif est réglé de sorte à réaliser un grandissement transverse $|G_y| = 5$.

Dans l'espace-image, l'ouverture numérique du système optique est $\sin \alpha'_m = 0,10$.

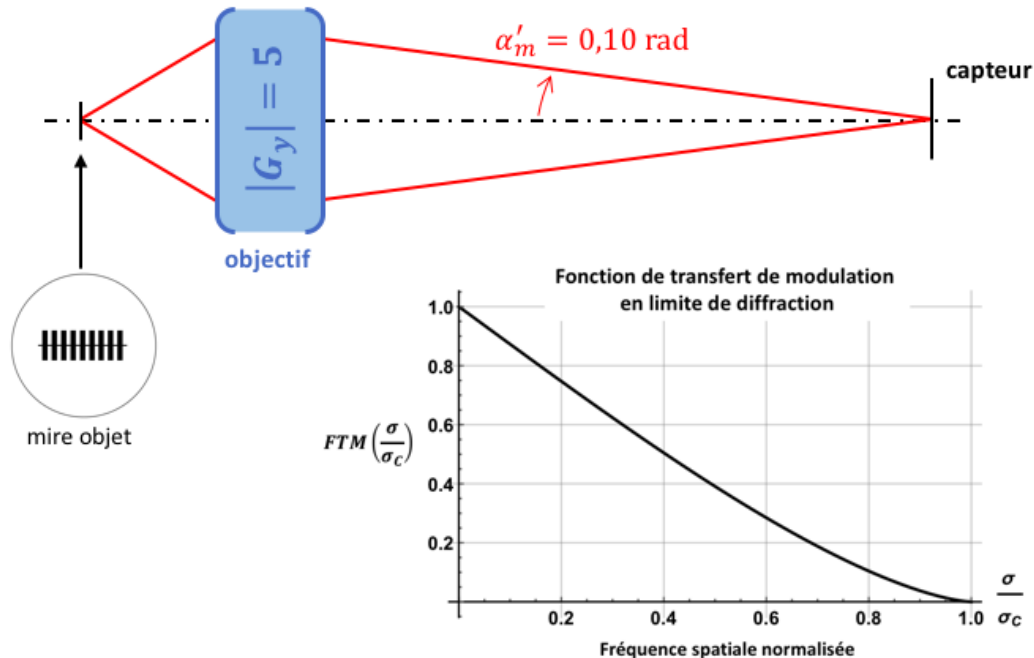


Figure 1 : Schéma de principe du dispositif étudié ; profil de la fonction de transfert de modulation d'un système à pupille circulaire en limite de diffraction (en fréquence spatiale normalisée).

On étudie les caractéristiques de l'objectif au centre de la gamme spectrale d'intérêt, à $\lambda_0 = 0,6 \mu\text{m}$. L'écart normal aberrant, décomposé sur la base de Seidel pour une mise au point au foyer paraxial, est :

$$\begin{aligned} \text{sur l'axe :} & \quad \Delta_0(u, \varphi) = 2\lambda_0 u^4 \\ \text{au bord du champ :} & \quad \Delta_1(u, \varphi) = 2\lambda_0 u^4 + \lambda_0 u^3 \cos \varphi + \lambda_0 u^2 \cos 2\varphi \end{aligned}$$

1. La mesure de l'écart normal aberrant de l'objectif a été réalisée à l'aide d'un analyseur de front d'onde de type Shack – Hartmann, dans les conditions de fonctionnement du système étudié.
 - a. Rappelez quel est le principe de fonctionnement de cet analyseur, et comment la mesure est réalisée.
 - b. Y a-t-il des aberrations du système optique dont cette mesure du front d'onde ne puisse rendre compte ? Justifiez précisément votre réponse.
2. Analyse du front d'onde
 - a. Quelles sont les différentes aberrations mises en évidence dans la décomposition du front d'onde ?
 - b. Donnez les coefficients de la décomposition du front d'onde sur la base de Zernike pour un point objet au bord du champ et une mise au point au meilleur foyer.
 - c. Quelle est l'aberration dont l'impact est le plus fort sur la qualité d'imagerie de l'objectif ? Expliquez.
 - d. Le système optique est-il en limite de diffraction sur l'axe ? et dans le champ ?
 - e. Que deviennent les différentes aberrations si l'ouverture numérique du dispositif est divisée par deux ?

- Précisez les coefficients des différentes aberrations dans la décomposition de Zernike, sur l'axe et dans le champ. Vous pourrez vous limiter aux termes associés aux aberrations du 3^{ème} ordre.
- Le système optique est-il alors en limite de diffraction ?
- Sera-t-il nécessaire de changer le plan de mise au point, par rapport au réglage à pleine ouverture ?
- Peut-on mettre en évidence de nouvelles aberrations dans ces conditions ?

3. Fonction de transfert optique

L'analyse est faite ici à pleine ouverture, pour un point objet sur l'axe. Les fréquences spatiales sont mesurées dans le plan-image.

- Rappelez la définition de la fonction de transfert optique.
 - Quelle est la fréquence de coupure du système optique, à la longueur d'onde centrale d'analyse ? Vous donnerez votre réponse en mm^{-1} , pour une fréquence spatiale mesurée dans le plan-image.
 - Justifiez que le capteur limite la gamme des fréquences spatiales utiles. Quelle est cette plage de fréquences ?
 - Justifiez que, parmi les différentes fonctions de transfert reproduites en figure 2, la seule susceptible de correspondre au système optique étudié ici est la courbe B.
4. La mise au point du dispositif d'imagerie est réglée en imageant une mire de traits régulièrement espacés, de période $p = 5 \mu\text{m}$, placée dans le plan objet visé (cf. figure 1). La mise au point est faite sur le centre de la mire, de sorte que l'on peut considérer qu'elle est sur l'axe. On ne considèrera, pour l'analyse qui suit, que la fréquence fondamentale de la mire.
- Quel serait le contraste de l'image de la mire obtenue avec un système optique en limite de diffraction, à pleine ouverture ?
 - Quel est le contraste de l'image de la mire pour le système optique étudié ?
 - L'utilisateur décide de diaphragmer le système optique et réduire l'ouverture numérique par deux. Cela lui permet-il d'améliorer le contraste de l'image de la mire observée ? Expliquez en détail votre réponse, en vous appuyant sur les résultats de la question 2.e.
 - Comment peut-on prendre en compte la contribution du capteur dans le dispositif d'imagerie ? Cela va-t-il notablement modifier les résultats précédents ?

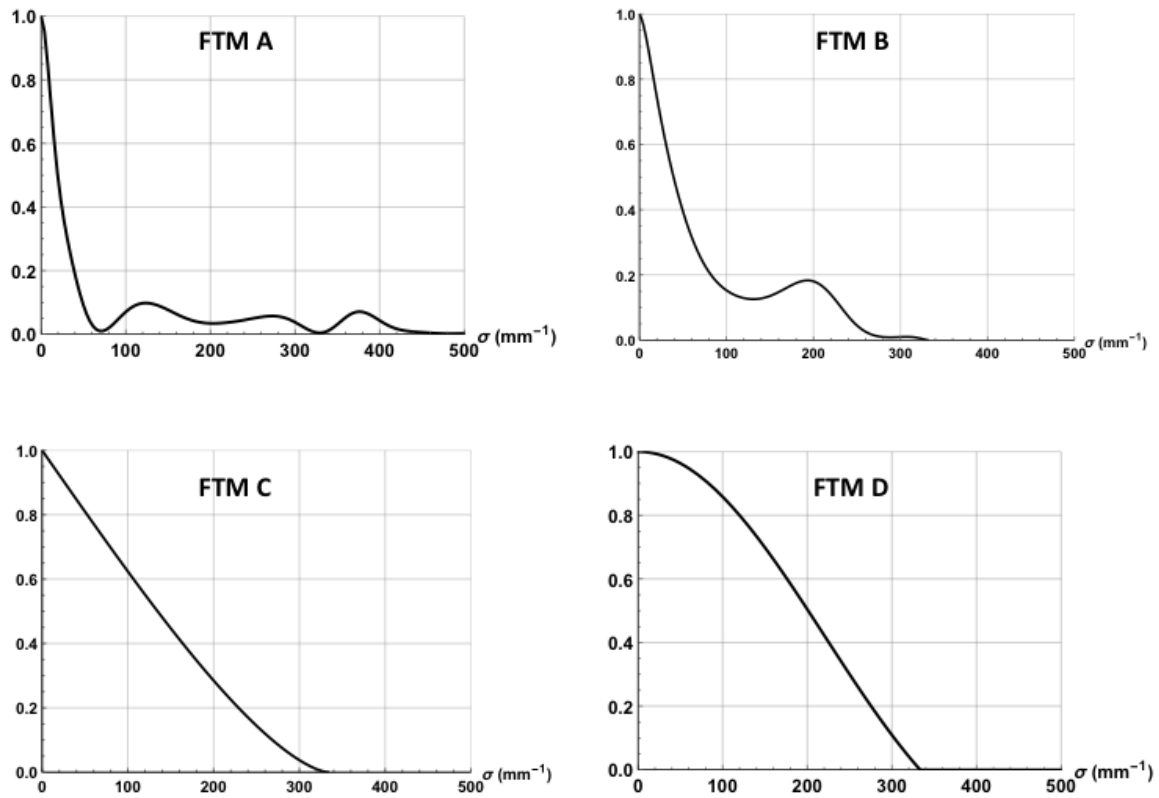


Figure 2 : Profils de différentes fonctions de transfert de modulation, en fonction des fréquences spatiales mesurées dans le plan-image ; une seule d'entre elles correspond réellement au système optique étudié (cf. 3.d)

ANNEXE

I. Ecart normal aberrant d'un miroir

Pour un miroir de rayon de courbure R et de constante de conicité ε , on rappelle les expressions suivantes pour l'écart normal aberrant, et pour une mise au point dans le plan paraxial :

- Aberration sphérique du 3^{ème} ordre :

$$\Delta = \frac{h^4}{4R} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{z'} \right)^2 + \varepsilon \frac{h^4}{4R^3}$$

- Coma du 3^{ème} ordre (pupille sur le dioptré) :

$$\Delta = \frac{h^3 y'}{R z'} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{z'} \right) \cos \varphi$$

Dans ces expressions, h et φ sont la hauteur et l'angle d'azimut du point d'impact du rayon lumineux sur le dioptré ; z et z' sont les positions de l'objet et de l'image paraxiale le long de l'axe, référencées au sommet du dioptré ; y' est la hauteur de l'image paraxiale.

II. Formules de déplacement de pupille

On rappelle les formules de variation des coefficients d'aberrations du 3^e ordre d'un système optique, lorsqu'on déplace la pupille d'une position {1} à une position {2}. Ici, $p'_i = \overline{A'P'_i}$ désigne la distance algébrique entre l'image paraxiale A' et la pupille de sortie P'_i du système lorsque la pupille est à la position {i}.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 = a_1 \\ b_2 = b_1 + a_1 \left(\frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p'_1} \right) \\ C_2 = C_1 + 8b_1 \left(\frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p'_1} \right) + 4a_1 \left(\frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p'_1} \right)^2 \\ A_2 = A_1 - 4b_1 \left(\frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p'_1} \right) - 2a_1 \left(\frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p'_1} \right)^2 \\ D_2 = D_1 + \frac{C_1 - A_1}{2} \left(\frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p'_1} \right) + 3b_1 \left(\frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p'_1} \right)^2 + a_1 \left(\frac{1}{p'_2} - \frac{1}{p'_1} \right)^3 \end{array} \right.$$

III. Définition des 9 premiers polynômes de Zernike

i	n	m	$Z_n^m(u, \varphi)$
0	0	0	1
1	1	1	$2u \cos \varphi$
2	1	-1	$2u \sin \varphi$
3	2	0	$\sqrt{3}(2u^2 - 1)$
4	2	2	$\sqrt{6} u^2 \cos 2\varphi$
5	2	-2	$\sqrt{6} u^2 \sin 2\varphi$
6	3	1	$\sqrt{8} (3u^3 - 2u) \cos \varphi$
7	3	-1	$\sqrt{8} (3u^3 - 2u) \sin \varphi$
8	4	0	$\sqrt{5} (6u^4 - 6u^2 + 1)$

Dans ce tableau, u et φ représentent la hauteur (normalisée au bord de la pupille) et l'angle d'azimut du point d'impact d'un rayon lumineux dans la pupille du système optique.

IV. Rappel des relations de Nijboër

A l'ordre 3, les aberrations transverses dx' et dy' sont liées à l'écart normal $\Delta(\alpha', \varphi)$ par les relations de Nijboër :

$$\begin{aligned} dx' &= \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha'} \cos \varphi - \frac{1}{\alpha'} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} \sin \varphi \\ dy' &= \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha'} \sin \varphi + \frac{1}{\alpha'} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} \cos \varphi \end{aligned}$$

où α' est l'angle d'ouverture et φ l'angle d'azimuth.

NOM Prénom :

QUESTION						NOTE		
1	A	B	C	D	E	+1	Ø	$-\frac{1}{4}$
2	A	B	C	D	E	+1	Ø	$-\frac{1}{4}$
3	A	B	C	D	E	+1	Ø	$-\frac{1}{4}$