TD-1-MODES DE RUPTURE - Correction

I.1. Dans un repère cylindrique $(O,\ \vec{e}_r,\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e}_z)$ le tenseur des contraintes de la sollicitation de traction-torsion s'écrit : $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{pmatrix}$. Cherchons les contraintes principales σ_I, σ_{II} et σ_{III}, il vient :

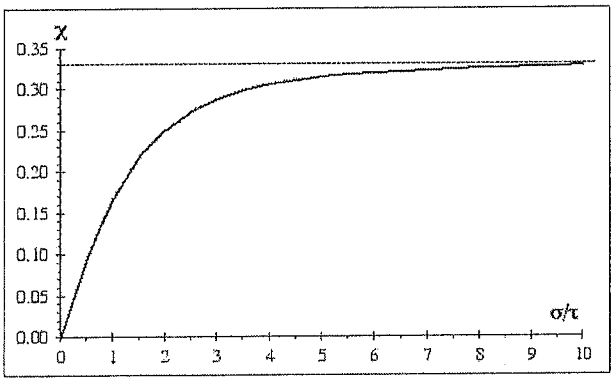
$$|\underline{\underline{\sigma}} - \lambda \underline{\underline{I}}| = \lambda(\lambda^2 - \sigma\lambda - \tau^2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma_I = 0 \quad \sigma_{II} = \frac{\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2} \quad \sigma_{III} = \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$$

et l'on obtient les expressions de la pression isostatique et de la contrainte équivalente de Von Mises :

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}} = \sigma/3 \quad \text{et} \quad \sigma_{Eq.V.M.} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2\right]} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

d'où l'expression du taux de triaxialité :

$$\chi = \frac{\sigma}{3\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}} \quad \text{en posant } x = \frac{\sigma}{\tau} \text{ il vient :} \quad \chi = \frac{x}{3\sqrt{x^2 + 3}}$$



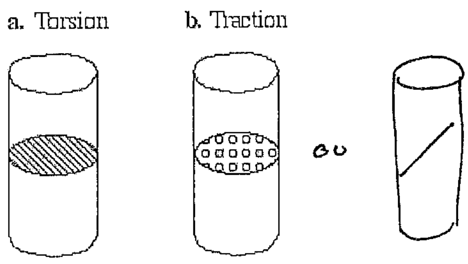
D'où la représentation graphique de la figure ci-contre. Le taux de triaxialité limite est donné lorsque x tend vers l'infini c'est-à-dire lorsque l'on est en traction pure, et l'on retrouve la valeur limite : $\chi = 1/3$.

I.2. Matériaux ductile : les modes de rupture sont pilotés par le cisaillement et/ou le taux de triaxialité :

a. Torsion pure. Dans ce cas, $\sigma = 0$ donc $x = 0$ et $\chi = 0$, il n'y aura pas de cupule et la rupture s'effectuera par cisaillement ;

b. Traction pure. Dans ce cas, $\tau = 0$ donc $x \to \infty$ et $\chi \to 0,33$, on aura une croissance des cupules sous l'influence de la triaxialité ;

c. Traction-torsion tout dépend du rapport σ/τ donc de la valeur du taux de triaxialité.



I.3 Dans le cas d'un **matériau fragile** le mode de rupture est piloté par la plus grande contrainte principale, la rupture a lieu sur la facette normale à la plus grande contrainte principale, dans notre cas, σ_{III}. Il faut donc déterminer les axes principaux : $\underline{\underline{\sigma}}.\vec{U}_i = \lambda_i.\vec{U}_i$. Après calcul, on obtient les vecteurs unitaires propres suivants :

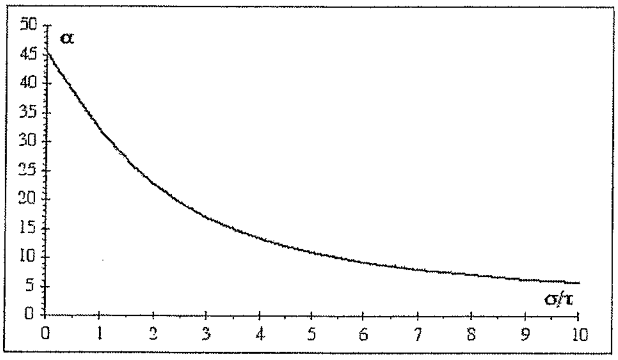
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{U}_I & = & \vec{e}_r \\ \vec{U}_{II} & = & \frac{1}{\sqrt{\tau^2+\sigma_{II}^2}}(\tau\vec{e}_\theta + \sigma_{II}\vec{e}_z) \\ \vec{U}_{III} & = & \frac{1}{\sqrt{\tau^2+\sigma_{III}^2}}(\tau\vec{e}_\theta + \sigma_{III}\vec{e}_z) \end{array} \right.$$

Afin de déterminer l'orientation de la facette où aura lieu la rupture, calculons l'angle α entre la direction de la plus grande contrainte principale c'est-à-dire $\vec{U}_{III}$ et la direction de traction $\vec{e}_z$, il vient :

$$\cos\alpha = \vec{U}_{III}.\vec{e}_z = \frac{\sigma_{III}}{\sqrt{\tau^2+\sigma_{III}^2}} = \frac{\frac{\sigma+\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}}{2}}{\sqrt{\tau^2+\left(\frac{\sigma+\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}}{2}\right)^2}} = \frac{1+\sqrt{1+4\frac{\tau^2}{\sigma^2}}}{\sqrt{4\frac{\tau^2}{\sigma^2}+\left(1+\sqrt{1+4\frac{\tau^2}{\sigma^2}}\right)^2}}$$

$$\text{en posant} \quad x=\frac{\sigma}{\tau} \quad \text{il vient :} \quad \cos\alpha = \frac{1+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{\sqrt{\frac{4}{x^2}+\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right)^2}}$$

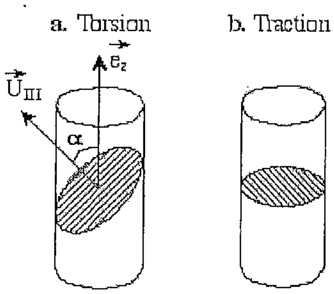
On peut alors représenter les variations de l'angle α en fonction du rapport $x=\sigma/\tau$ on obtient :



a. Torsion pure. Dans ce cas, $\sigma=0$ donc $x=0$ et $\sigma_{III}\to\tau$, on obtient donc $\cos\alpha = 1/\sqrt{2}$ et $\alpha=45°$. La rupture s'effectuera sur une facette à 45 ° par rapport à l'axe de l'éprouvette ;

b. Traction pure. Dans ce cas, $\tau=0$ donc $x\to\infty$ d'où $\cos\alpha=1$ et $\alpha=0$. La rupture s'effectuera sur la facette normale par rapport à l'axe de traction ;

c. Traction-torsion l'angle α dépend du rapport σ/τ selon le graphe de la figure ci-dessus.



II.1. La forme générale du tenseur des déformations en déformation plane est $\underline{\underline{\varepsilon}}_{\mathrm{DP}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

la loi de HOOKE généralisée permet d'écrire :

$$\sigma_{xx}=2\mu\varepsilon_{xx}+\lambda(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}) \quad \sigma_{yy}=2\mu\varepsilon_{yy}+\lambda(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}) \quad \sigma_{zz}=\lambda(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}) \quad \tau_{xy}=2\mu\gamma_{xy} \quad \tau_{xz}=\tau_{yz}=0$$

D'où le tenseur des contraintes en déformation plane : $\underline{\underline{\sigma}}_{\mathrm{DP}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$. On peut, de plus, trouver une relation entre les contraintes, en effet, $\sigma_{xx}+\sigma_{yy} = 2\frac{\mu+\lambda}{\lambda}\sigma_{zz} = \frac{1}{\nu}\sigma_{zz}$.