IOGS Bordeaux
Mécanique Quantique 2A
2024-2025

TD#3 : Un atome pour les compter tous
CORRECTION

A. Hamiltonien

B. Hamiltonien en référentiel tournant : résonance magnétique

8/

$$\begin{aligned}\hat{H}_T &= \frac{\hbar\delta}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{\hbar\delta}{2}\hat{\sigma}_x \\ &= \frac{\hbar}{2}\sqrt{\delta^2+4\Omega_R^2}\left[\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2+4\Omega_R^2}}\hat{\sigma}_z + \frac{2\Omega_R}{\sqrt{\delta^2+4\Omega_R^2}}\hat{\sigma}_x\right] \\ &= \frac{eB_{eff}}{2m}\left[\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2+4\Omega_R^2}}\hat{\sigma}_z + \frac{2\Omega_R}{\sqrt{\delta^2+4\Omega_R^2}}\hat{\sigma}_x\right]\end{aligned}$$

$B_{eff} = \frac{m}{e}\sqrt{\delta^2+4\Omega_R^2}$

C. Comptage de photons

9/

$$\hat{H}_T = \frac{\hbar\delta}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{\hbar\Omega_R}{2}(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) \tag{1}$$

Quand on ajoute le champ quantifié, la conservation de l'énergie impose

$$\hat{H}_T = \frac{\hbar\delta}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{\hbar\Omega_R}{2}(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger)$$

Nouvelle base : $\{|-,N\rangle, |+,N-1\rangle\}$. N : nombre de photons dans la cavité.

$\delta \gg \Omega$: régime perturbatif.

10/ Hamiltonien perturbatif :

$$\hat{H}_p = \hbar\Omega(\hat{\sigma}_+ a + \hat{\sigma}_- a^\dagger)$$

Théorie des perturbations :

$$E_i = E_i^0 + \langle i| \hat{H}_p |i\rangle + \sum_{j\neq i} \frac{| \langle j| \hat{H}_p |i\rangle |^2}{E_i^0 - E_j^0}$$

$|i\rangle = \{|-, N\rangle, |+, N-1\rangle\}$.

Premier ordre :

$$\begin{aligned} E^1_{|-,N\rangle} &= \frac{\hbar\Omega_R}{2} \langle -, N| \hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger |-, N\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E^1_{|+,N-1\rangle} &= \frac{\hbar\Omega_R}{2} \langle +, N-1| \hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger |+, N-1\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Second ordre :

$$\begin{aligned} E^2_{|-,N\rangle} &= \frac{\hbar^2\Omega_R^2}{4} \frac{| \langle +, N-1| \hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger |-, N\rangle |^2}{E^0_{|-,N\rangle} - E^0_{|+,N-1\rangle}} \\ &= \frac{\hbar^2\Omega_R^2}{4} \frac{| \langle +, N-1| \hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger |-, N\rangle |^2}{N\hbar\omega - \hbar\omega_0 - (N-1)\hbar\omega} \\ &= \frac{\hbar^2\Omega_R^2}{4} \frac{| \langle +, N-1| \hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger |-, N\rangle |^2}{\hbar(\omega - \omega_0)} \\ &= -\frac{\hbar\Omega_R^2}{4\delta} N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E^2_{|+,N-1\rangle} &= \frac{\hbar^2\Omega_R^2}{4} \frac{| \langle -, N| \hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger |+, N-1\rangle |^2}{E^0_{|+,N-1\rangle} - E^0_{|-,N\rangle}} \\ &= \frac{\hbar^2\Omega_R^2}{4} \frac{| \langle -, N| \hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger |+, N-1\rangle |^2}{\hbar\omega_0 + \hbar\omega(N-1) - N\hbar\omega} \\ &= \frac{\hbar^2\Omega_R^2}{4} \frac{| \langle -, N| \hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger |+, N-1\rangle |^2}{\hbar(\omega_0 - \omega)} \\ &= \frac{\hbar\Omega_R^2}{4\delta} N \end{aligned}$$

$\Delta E = \frac{\hbar\Omega_R^2}{2\delta} N$

11/ Il suffit de mesurer la différence d'énergie entre un atome préparé dans l'état $|-, N\rangle$

envoyé dans la cavité et son énergie à la sortie de la cavité.