TD3 - Correction

II. Modes de rupture en mode I et en mode III

II.1. MODE III

II.1.a. Pour calculer la contrainte équivalente de VON MISES il faut exprimer les contraintes dans le repère principale ou utiliser la formulation générale :

$$\sigma_{\text{Eq.(VM)}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2+(\sigma_{yy}-\sigma_{zz})^2+(\sigma_{zz}-\sigma_{xx})^2+6\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2\right)\right]}$$

Or en mode III, $\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=\tau_{xy}=0$ d'où :

$$\sigma_{\text{Eq.(VM)}} = \sqrt{3\left(\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2\right)} = \sqrt{3\frac{K_{III}^2}{2\pi r}\left[\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]} = \sqrt{3\frac{K_{III}^2}{2\pi r}} \qquad \text{indépendant de } \theta$$

II.1.b. La trace du tenseur des contraintes est nulle donc la triaxialité aussi. La surface de rupture, plane, ne présente pas de cupule. L'épaisseur n'a pas d'influence sur la rupture en mode III.

II.2. MODE I   Pour $\theta = 0$.

Déformation plane : DP

$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}=\sigma$ et $\sigma_{zz}=\nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})$

Donc $\sigma_{zz}=2\nu\sigma$ et $\tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$

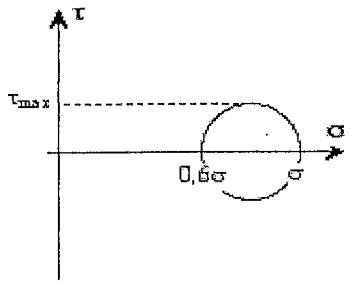
D'où l'expression du tenseur des contraintes en déformation plane ($\theta=0$) :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{\text{DP}} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 2\nu\sigma \end{pmatrix} \Longrightarrow \sigma_m = \frac{2(1+\nu)\sigma}{3}$$

$\sigma_{\text{Eq.(DP)}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[2\sigma^2(1-2\nu)^2\right]} = \sigma(1-2\nu) \Longrightarrow$

$\sigma_{\text{Eq.(DP)}} \approx 0,4\sigma$ (si $\nu=0,3$)

$\chi_{\text{(DP)}} = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \approx 2,17$ (si $\nu=0,3$)



Le cisaillement maximal correspond au rayon du cercle de MOHR c'est-à-dire que $\tau_{\max}=0,2\sigma$

<u>**Conclusion**</u> : en déformation plane, la triaxialité est forte et le cisaillement maximal faible. La rupture est plane car le cisaillement est faible et le taux ce croissance des cavités est élevé sous l'influence de la triaxialité χ.

Contraintes planes : CP

$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\frac{K_I}{2\pi r}=\sigma$ et $\sigma_{zz}=0$

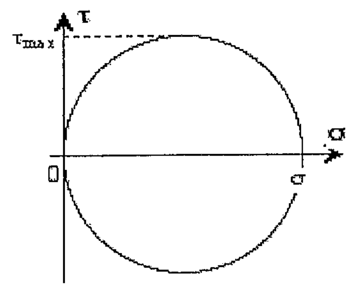
$\tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$

D'où l'expression du tenseur des contraintes en contraintes planes ($\theta=0$) :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{\text{CP}} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \sigma_m = \frac{2\sigma}{3}$$

$\sigma_{\text{Eq.(CP)}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[2\sigma^2\right]} = \sigma$

$\chi_{\text{(CP)}} = \frac{2}{3} \approx 0,67$



Le cisaillement maximal correspond au rayon du cercle de MOHR c'est-à-dire que $\tau_{\max}=0,5\sigma$

<u>**Conclusion**</u> : en contraintes planes, la triaxialité est faible et le cisaillement maximal élevé. La rupture est inclinée sur les bords sous l'influence du fort cisaillement (levres de cisaillement à 45°).

De plus, pour un même chargement, lorsque le matériau atteind la plasticité dans un état de contraintes planes (CP), c'est-à-dire lorsque $\sigma_{\text{Eq.(CP)}}=\sigma=R_e$ si R_e est la limite d'élasticité du matériau, la contrainte pouvant provoquer l'écoulement plastique en déformation plane n'est que de $0,4\sigma$. La plasticité apparaît sur les bords de l'élément de volume et est bloquée à cœur du matériau.

II.2.c Si la vitesse d'avancée de la fissure est proportionnelle aux taux de croissance de cavité, elle dépend de la triaxilité suivant la loi de RICE et Tracey. Le rapport des taux de croissance des cavités dans le modèle de RICE et TRACEY pour une déformation plastique équivalente identique et indépendante de la triaxialité correspond au rapport des vitesses d'avancée de fissure, il vient :

$$\frac{\left.\frac{dR}{R}\right)_{\mathrm{DP}}}{\left.\frac{dR}{R}\right)_{\mathrm{CP}}} = \frac{V_{\text{cœur}}}{V_{\text{bord}}} = \frac{0,28\exp(\frac{3}{2}\chi_{(\mathrm{DP})}).d\varepsilon_{\mathrm{Eq.p.(DP)}}}{0,28\exp(\frac{3}{2}\chi_{(\mathrm{CP})}).d\varepsilon_{\mathrm{Eq.p.(CP)}}} = \frac{\exp(\frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)})}{\exp(1)} = \exp\frac{3\nu}{1-2\nu} \approx 9,5$$

Le taux de croissance en volume des cavités donc selon l'hypothèse, la vitesse d'avancée de la fissure, est environ 10 fois plus élevé en déformation plane qu'en contraintes planes c'est-à-dire à cœur qu'aux bords.