

M2 – Comportement mécanique et endommagement des matériaux

EXAMEN -Durée 3h

Documents non autorisés

REDIGER LES PARTIES A, B et C SUR TROIS COPIES SEPARÉES

PARTIE A

On étudie le comportement d'un composite avec des fibres de verre et une matrice en polymère. Les fibres sont toutes dirigées dans la même direction 1 (Fig 1.a) : composite unidirectionnel. Le matériau est sous forme de plaque, d'épaisseur e .

Dans le plan de la plaque, le comportement du composite peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_{12} = \gamma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} = \sigma_6 \end{pmatrix}$$

σ_j et ε_i étant respectivement les composantes du tenseur des contraintes et des déformations dans le repère fixe $(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$, et S_{ij} les coefficients en notation de Voigt du tenseur des complaisances. Le comportement dans le plan perpendiculaire aux fibres est indépendant de la direction. La matrice des complaisances est symétrique.

On rappelle : $S_{11} = \frac{1}{E_1}$ $S_{22} = \frac{1}{E_2}$ $S_{12} = \frac{-\nu_{12}}{E_1}$ $S_{21} = \frac{-\nu_{21}}{E_2}$

1. Nommer le type de symétrie de ce matériau.
2. Définir ce que représentent ν_{12}, ν_{21}
3. On réalise un essai de traction simple dans la direction 1 (direction des fibres). Pour une contrainte de traction de 10 MPa, on mesure une extension relative de $\Delta L/L_0 = 2,5 \cdot 10^{-4}$ et une contraction dans la largeur $\Delta b/b_0 = -0,75 \cdot 10^{-3}$. En déduire les valeurs de certaines complaisances.
4. On réalise un essai de traction simple dans la direction 2 (direction transverses aux fibres). Pour une contrainte de traction de 10 MPa, on mesure une extension relative $\Delta b/b_0 = 1,25 \cdot 10^{-3}$. En déduire toutes les valeurs des complaisances, puis E_1, E_2, ν_{12} et ν_{21} .

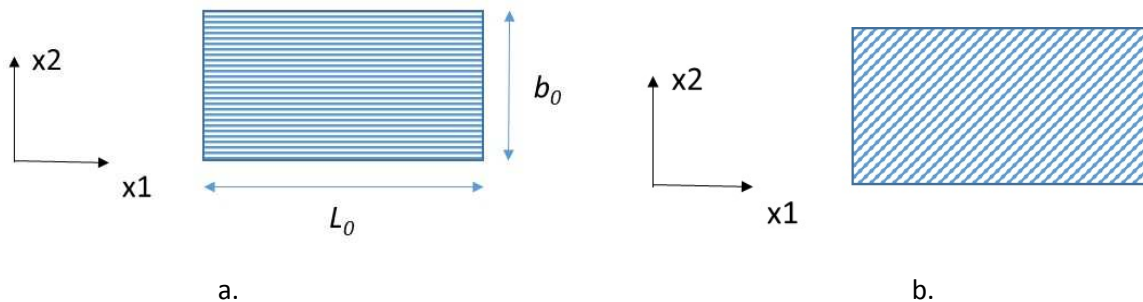


figure 1. Schéma de la plaque de composite à fibres unidirectionnelles a. Repère dans le repère de symétrie du matériau ; b. repère hors axes de symétrie. Les lignes bleues représentent les fibres.

5. Soit une plaque avec la direction des fibres à 45° de la longueur de la plaque (Fig 1.b). Dessiner la déformée de cette plaque sous l'effet d'une traction dans la direction 1. Ecrire schématiquement la matrice de complaisance du matériau dans le repère (x_1, x_2) en précisant les termes nuls. Expliquer.

On considère maintenant le comportement viscoélastique de la matrice que l'on écrit en unidimensionnel :

$$\dot{\epsilon}_m = \frac{\dot{\sigma}_m}{E_m} + \frac{\sigma_m}{\eta_m}. \text{ Le comportement des fibres est : } \dot{\epsilon}_f = \frac{\dot{\sigma}_f}{E_f}.$$

6. Le composite est sollicité dans la direction des fibres (direction 1 de la Fig.1.a). Dans ce cas, si f est la fraction volumique de fibres, on a : $\sigma = f\sigma_f + (1-f)\sigma_m$ $\epsilon = \epsilon_f = \epsilon_m$ avec σ, ϵ la contrainte et la déformation dans le composite. Le composite est soumis à une contrainte instantanée σ_0 . Exprimer σ_f, σ_m en fonction des propriétés des matériaux.

7. La contrainte est maintenue. De quel essai s'agit-il ? Quelle est la relation entre les vitesses de déformation dans les fibres et la matrice ? Déterminer l'évolution de la contrainte dans la matrice.

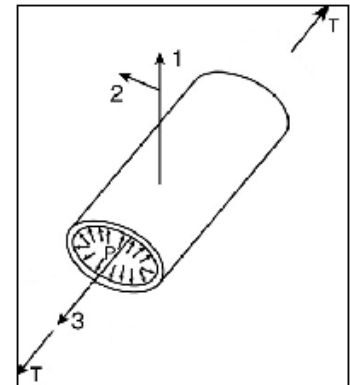
PARTIE B

PLASTICITE MACROSCOPIQUE

Dans de nombreuses applications industrielles, des composants tubulaires sont soumis à des sollicitations de pression interne et de traction ou compression (réservoirs, cuves de réacteurs, gaines de combustibles pour l'industrie nucléaire, ...).

On cherche à caractériser le comportement plastique multiaxial d'un matériau pour ce type de sollicitation en effectuant des essais de traction/compression - pression interne sur une éprouvette tubulaire.

Figure 1 : représentation schématique des directions de sollicitation dans un essai de traction/compression – pression interne. 1: direction radiale, 2: direction circonférentielle, 3 : direction axiale.

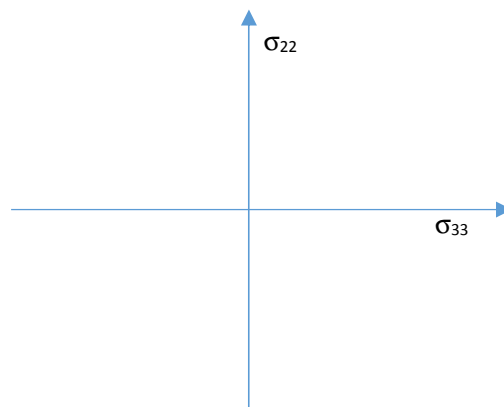


Dans un repère cylindrique (Figure 1), le chargement appliqué s'exprime par le tenseur de contraintes suivant:

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

avec σ_{33} la contrainte de traction/compression et σ_{22} la contrainte circonférentielle induite par la pression interne.

- 1 Représenter dans un graphe σ_{22} en fonction de σ_{33} les domaines d'élasticité complets prévus par les critères de von Mises et de Tresca pour un matériau ayant une limite d'élasticité en traction égale à σ_0 .



- 2 Représenter dans ce même graphe l'espace accessible à des essais de traction/compression (selon σ_{33}) – pression interne (selon σ_{22}).

On suppose pour la suite que le matériau vérifie le critère de plasticité de von Mises. On suppose par ailleurs que le comportement de ce matériau peut être décrit par un modèle d'écrouissage isotrope, $dR = H \cdot dp$, avec dR , l'incrément d'écrouissage isotrope, H , le module d'écrouissage du matériau et dp le taux de déformation plastique cumulée.

On cherche alors à connaître l'état de déformation plastique du matériau lorsque celui-ci aura été soumis à l'état de contrainte suivant : $\sigma_{33} = 0,5\sigma_{22} = \sigma_0$. Plusieurs chemins sont considérés dans l'espace des contraintes pour atteindre cet état final, que l'on nommera C .

- 3 On considère tout d'abord le cas d'un chargement correspondant à celui d'un tube fin, bouché à ses extrémités. Dans ce cas, le chargement reste proportionnel pendant toute la durée du chargement, c'est-à-dire $\sigma_{33} = 0,5\sigma_{22}$ à chaque instant.
- 3.1 Exprimer le déviateur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^D$ puis la contrainte équivalente de von Mises σ^{eq} en fonction de σ_{22} . Déduire alors du critère de plasticité de von Mises la valeur de σ_{22} (en fonction de σ_0) pour laquelle le matériau plastifie pour la première fois.
- 3.2 On augmente la pression jusqu'à atteindre $\sigma_{22} = 2\sigma_0$ (tout en gardant $\sigma_{33} = 0,5\sigma_{22}$). Calculer alors la déformation plastique obtenue à la fin du chargement. Pour ce faire, utiliser les relations précédentes et exprimer en plus :
- la normale au domaine d'élasticité au niveau du point de chargement, $\underline{\underline{n}}_f$
 - la condition de cohérence $\dot{f} = 0$
 - le taux de déformation plastique cumulé dp
 - le taux de déformation plastique $\underline{\underline{d\varepsilon}}^p$
 - la déformation plastique lorsque $\sigma_{22} = 2\sigma_0$
- 3.3 Représenter ce qu'est devenu le nouveau domaine d'élasticité de von Mises à la fin du chargement précédent.
- 3.4 Représenter dans l'espace des déformations plastiques, ε_{22}^p fonction de ε_{33}^p , l'évolution de la déformation plastique au cours du trajet de chargement, depuis l'état initial jusqu'à l'état final C.
- 4 On considère désormais que l'état final de chargement $\sigma_{33} = 0,5\sigma_{22} = \sigma_0$ va être atteint au moyen de deux chargements successifs :
- 4.1 D'abord une traction simple selon la direction 3, jusqu'à atteindre le point A pour lequel $\sigma_{33} = \sigma_0$ (et $\sigma_{22} = 0$ pendant tout le trajet), puis un maintien constant de cette contrainte axiale σ_{33} tandis que la contrainte circonférentielle σ_{22} augmente de 0 à $2\sigma_0$.
- 4.1.1 Que peut-on dire alors de la taille du domaine d'élasticité à la fin de ce chargement ? Sera-t-elle différente de celle obtenue à la suite d'un trajet proportionnel où $\sigma_{33} = 0,5\sigma_{22}$ tout au long du trajet (question 3.3) ?
- 4.1.2 Sans procéder à aucun calcul, indiquer (en le justifiant) si la quantité de déformation plastique cumulée sera différente ou non de celle calculée en 3.3 ? Même question (toujours sans calcul) pour le tenseur de déformation plastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$. Dessinez, dans l'espace des déformations plastiques de la question 3.4, l'évolution attendue de la déformation plastique au cours de ce trajet de chargement. Repérez dans ce graphe le point A et le point C pour ce trajet de chargement séquentiel. Indiquez notamment la direction de l'écoulement plastique au point A par une flèche.
- 4.2 D'abord une augmentation de la contrainte circonférentielle jusqu'à atteindre le point B pour lequel $\sigma_{22} = 2\sigma_0$ (et $\sigma_{33} = 0$ pendant tout le trajet), puis un maintien constant de cette contrainte circonférentielle σ_{22} tandis que la contrainte axiale σ_{33} augmente de 0 à σ_0 .
- 4.2.1 Mêmes questions qu'en 4.1.1.
- 4.2.2 Mêmes questions qu'en 4.1.2. Repérer le point B et la direction de l'écoulement plastique dans le graphe ε_{22}^p fonction de ε_{33}^p de la question 3.4.
- 5 Que peut-on conclure sur l'influence du trajet de chargement sur l'état de déformation plastique ?

PARTIE C : MECANISMES D'ENDOMMAGEMENT ET DE RUPTURE

Question de cours (5 min) :

Question à choix multiple : Quels paramètres peut-on déduire d'une courbe de Wöhler ?

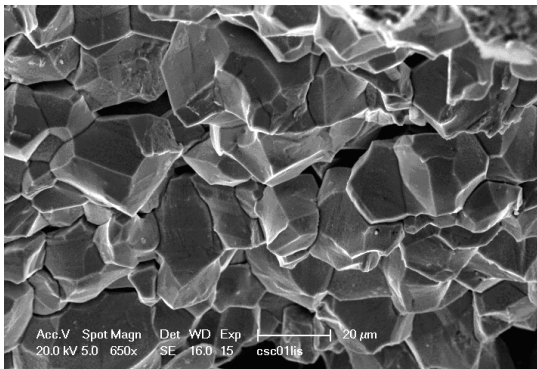
- A. La durée de vie du matériau en fonction du nombre de cycle appliqué
- B. La durée de vie du matériau en fonction de la taille de la fissure
- C. La durée de vie du matériau en fonction de la contrainte appliquée
- D. La contrainte appliquée au matériau
- E. La limite d'endurance

Justifier vos réponses en traçant une courbe de Wohler.

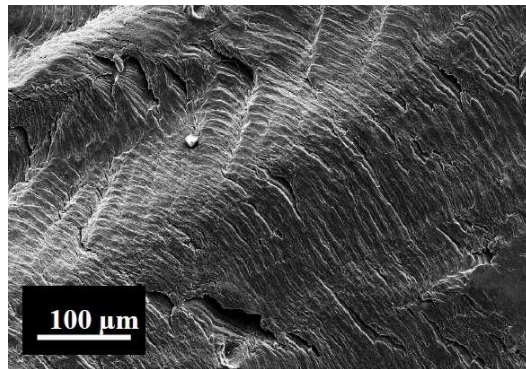
Exercice 1 : Fractographie (20 min)

Les figures suivantes sont issues d'observations de surfaces de rupture de différents matériaux sollicités dans différentes conditions. Il s'agit de déterminer le scénario de rupture.

1- Pour les cas a et b, les ruptures sont-elles fragiles ou ductiles (expliquer) ? De quels matériaux peut-il s'agir? Quel type de sollicitation et/ou environnement peut conduire à ces ruptures ?



(a)



(b)

2- Cette vis a rompu après une sollicitation en fatigue.

Quel faciès correspond à la sollicitation en flexion plane et celui en flexion plane alternée ? Justifier

Situer les zones d'amorçage, les zones de propagation en fatigue et les zones de rupture finale sur la figure (c).



(c)



(d)

3- Commenter le faciès de cet acier Fe-2.8%Si rompu en traction à 50°C

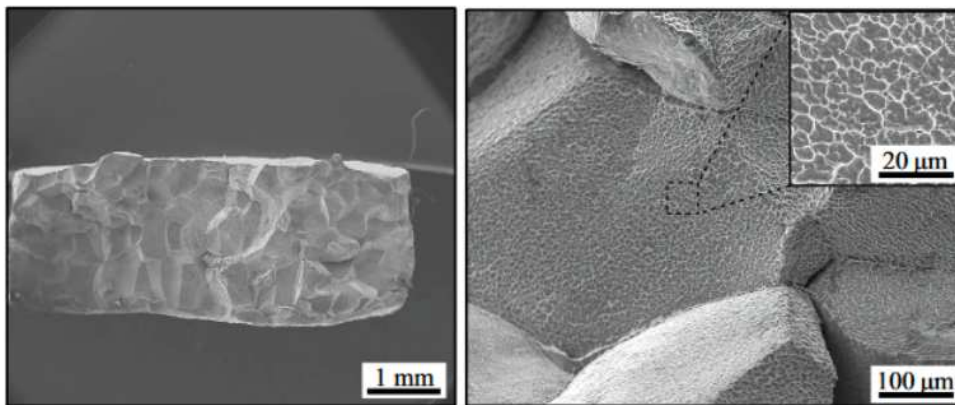


Fig. 3. Typical fracture morphology of fracture surface of as-cast strip tensile tested at 50 °C.

Exercice 2 : Modes de rupture (35 min)

On donne les expressions des champs de contraintes en bout d'une fissure pour les modes I, II et III :

$$\text{Mode I : } \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \begin{Bmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\text{Mode II : } \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \cdot [2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}] \\ \cos \frac{\theta}{2} \cdot [1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}] \\ \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\text{Mode III : } \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix}$$

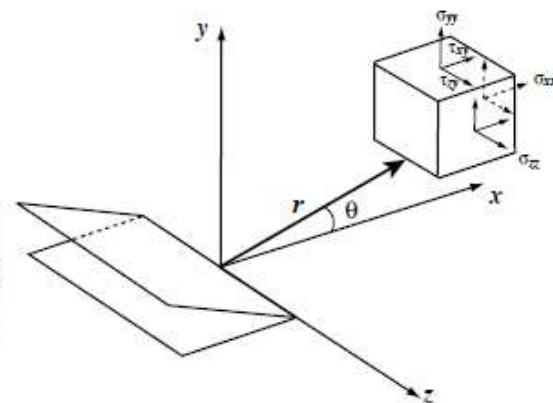


Fig. 5 - Repère en pointe de la fissure

1.1. Rappeler ce qu'est la ténacité d'un matériau. Quelle est la différence entre ténacité et facteur d'intensité de contraintes.

1.2. Pour chacun des modes de rupture, exprimer les composantes du tenseur des contraintes à cœur et en surface. Démontrer, pour le mode I, la relation $\sigma_{zz} = 2\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ en élasticité. On rappelle que $2(\mu + \lambda)/\lambda = 1/\nu$.

1.3. Pour $\theta = 0$, calculer, dans chaque cas, le taux de triaxialité en contrainte plane (CP) et en déformation plane (DP). On donne $\nu = 1/3$. En s'aidant aussi des cercles de Mohr, déterminer les modes de rupture (plan et faciès de rupture) en CP et en DP dans le cas d'une fonte à graphite sphéroïdal puis d'un matériau céramique.

1.4. Déterminer pour chaque mode, à cœur de l'éprouvette, la taille de la zone plastique au sens de Mises pour $\theta = 0^\circ$. Commenter la sévérité des modes d'ouverture de fissure vis-à-vis de la rupture.