TD#2 : Un atome pour les compter tous

Rq : Les questions marquées d'une * (ex **2*/**)sont à faire en préparation de la séance de TD.

Dans le cadre de ce TD, nous allons nous intéresser au comportement d'un système à 2 niveaux soumis à un champ électromagnétique oscillant. Le formalisme que nous allons développer est très général. Il permet par exemple de décrire le comportement d'un dipole électrique ($\hat{\mathbf{D}}$) ou d'un moment magnétique (ex : le spin $\hat{\mathbf{S}}$) en présence respectivement d'un champ électrique ($\mathbf{E}(t)$) ou magnétique ($\mathbf{B}(t)$) oscillant.

Notation

Interaction dipolaire électrique	Interaction dipolaire magnétique
Ex : Atome de Rydberg dans un champ Electrique	Ex : Resonance magnétique de spin
Base atomique ($\lvert - \rangle$, $\lvert + \rangle$)	Base atomique ($\lvert - \rangle$, $\lvert + \rangle$)
Energie 0 et $E = \hbar\omega_0$ respectivement	Energies dégénérées à champ nul
Champ : $\mathbf{E} = E_0(\cos(\omega t)\mathbf{u}_x + \sin(\omega t)\mathbf{u}_y)$	Champ : $\mathbf{B} = B_0\mathbf{u}_z + b_1(\cos(\omega t)\mathbf{u}_x + \sin(\omega t)\mathbf{u}_y)]$
E_0 : Amplitude du champ électrique oscillant	B_0 : Amplitude de l'offset de champ magnétique induisant la levée de dégénérescence $E_L = \hbar\omega_L = \hbar\gamma_0 B_0$ par effet Zeeman (sera vu au TD3)
ω : Pulsation du champ électrique	ω : Pulsation du champ magnétique
	b_1 : Amplitude du champ oscillant

Pour poser le formalisme et les équations maitresses, on utilisera le vocabulaire de la résonance magnétique d'un spin 1/2 (parties A et B). Dans la partie C, on s'intéressera à un exemple où un champ électrique oscillant se couple à deux états possédant une transition dipolaire électrique (prix Nobel 2012). Ces deux situations physiques sont formellement équivalentes, il s'agit d'un système à deux niveaux couplé à une champ électromagnétique.

A. Hamiltonien du système de l'interaction dipolaire magnétique

1*/ Quelle est la dimension de la matrice qui décrit l'hamiltonien d'interaction $\hat{H}_{int} = \frac{2\mu_b}{\hbar}.\mathbf{B}.\hat{\mathbf{S}}$. *On ne cherchera pas à expliciter les éléments de la matrice*. Exprimez l'hamiltonien d'interaction en fonction de $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$.

On définit $\hat{S}_+ = \hbar\lvert+\rangle\langle-\rvert = \hat{S}_x + i\hat{S}_y$ (opérateur montant), $\hat{S}_- = \hbar\lvert-\rangle\langle+\rvert = \hat{S}_x - i\hat{S}_y$ (opérateur descendant) et on rappel que $[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z$.

2*/ Donnez la forme des matrices de l'opérateur de spin $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$ dans la base $(|-\rangle, |+\rangle)$.

En renormalisant l'opérateur de moment cinétique de spin on obtient les matrices de Pauli $(\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z) = 2(\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)/\hbar$.
Les matrices de Pauli vérifient les relations de commutation :

$$[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = 2i\hat{\sigma}_z, \qquad [\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z] = 2i\hat{\sigma}_x, \qquad [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x] = 2i\hat{\sigma}_y, \tag{1}$$

On pose $\hat{\sigma}_\pm = \hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y$.

3*/ Montrer que l'on a les relations de commutateurs $[\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_\pm] = \pm 2\hat{\sigma}_\pm$ et $[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = 4\hat{\sigma}_z$.

4*/ Etablissez l'expression de $\hat{H}$ en fonction de $\hat{\sigma_z}$, $\hat{\sigma_+}$, $\hat{\sigma_-}$, ω_L et $\Omega_R = \mu_b b_1/\hbar$ la pulsation de Rabi.

B. Hamiltonien en référentiel tournant : Résonance magnétique

Soit $\hat{U}$ un opérateur unitaire, c'est à dire tel que $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{\mathbb{1}}$.
On rappelle l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = \hat{H}|\Psi\rangle \tag{2}$$

5/ Démontrez que si $|\Psi\rangle$ est solution de l'équation 2 alors $U|\Psi\rangle$ est solution d'une équation de Schrödinger pour un hamiltonien $\hat{H}_T$ que l'on déterminera.

6/ Déterminez l'Hamiltonien $\hat{H}_T$ pour l'opérateur de transformation unitaire $\hat{U} = e^{i\frac{\omega}{2}\hat{\sigma}_z t}$. L'hamiltonien que vous venez d'obtenir est l'hamiltonien dans le référentiel tournant.

Indication : On utilisera la relation $\hat{\sigma'}_\pm = \hat{U}\hat{\sigma}_\pm\hat{U}^\dagger = \hat{\sigma}_\pm e^{\pm i\omega t}$

7/ Montrez que cet hamiltonien prend la forme :

$$\hat{H}_T = \frac{\hbar\delta}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\Omega_R\hat{\sigma}_x \tag{3}$$

avec $\delta = \omega_L - \omega$.

8/ Dans le référentiel tournant, le spin précesse autour d'un champ magnétique $\mathbf{B}_{eff}$ dont on précisera l'amplitude et la direction.

C. Comptage de photons

Dans cette partie on s'intéresse à un atome possédant un moment dipolaire électrique fort placé dans une cavité optique. Par analogie du formalisme, on retrouve, pour l'atome, l'hamiltonien (3) où $\delta = \omega_0 - \omega$ est le désaccord entre la fréquence du champ oscillant et celle du dipole atomique.

9/ En se rappelant les rôles des opérateurs a (annihilation) et $a^\dagger$ (création), intuitez la forme de l'Hamiltonien du système total $\{$Atome+Champ de la cavité$\}$. On peut obtenir cet hamiltonien dans le cadre plus général de la quantification du champ. Donnez la base des états propres du système total en l'absence d'interaction

On se place dans le cas d'un champ oscillant fortement hors résonance ($\delta \gg \Omega$).

10/ En utilisant les résultats du cours sur les méthodes d'approximations indépendantes du temps, calculer le déplacement d'énergie des états propres du système total à l'ordre 1 et à l'ordre 2.

Indication : On rappel les action de a et $a^\dagger$:

$$a|N\rangle = \sqrt{N}|N-1\rangle$$
$$a^\dagger|N\rangle = \sqrt{N+1}|N+1\rangle$$

11/ Comment utiliser ce résultat pour mesurer le nombre de photons d'une cavité optique. La mise en place d'un système expérimental réalisant ce type de mesure a valu le prix Nobel à Serge Haroche (2012). La manipulation de systèmes à deux niveaux appelés "qubit" (pour Quantum bit) est aujourd'hui au cœur des problématiques de l'information et du calcul quantique.