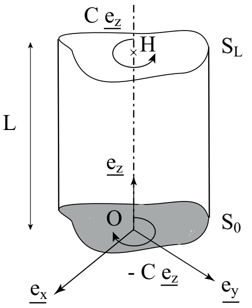
Correction TD 8 - Torsion de poutre avec gauchissement de section

1 Mise en équations

Question 1.1 :



L'équilibre global conduit à $\underline{M}_O + C\underline{e}_z = \underline{0}$ soit $\underline{M}_O = -C\underline{e}_z$. On modélise l'action mécanique en O. On ne peut pas ici modéliser l'action mécanique en O par un encastrement car cela revient à imposer un déplacement sur tous les points de la surface ce qui n'est pas équivalent.

Question 1.2 : • Admissibilité cinématique (CA) : le champ de déplacement $\underline{U}$ est régulier.

• Admissibilité statique (SA) :

- ⋄ equlibre local : $\underline{\mathrm{Div}}\ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$,
- ⋄ sur la surface latérale : $\underline{\underline{\sigma}}\ \underline{n} = \underline{0}$ où $\underline{n}$ est le vecteur local sortant de la surface,
- ⋄ sur la surface supérieure : $\displaystyle\iint_{S_L} \underline{\underline{\sigma}}\ \underline{e}_z dS = \underline{0}$ et $\displaystyle\iint_{S_L} \underline{HM} \wedge \underline{\underline{\sigma}}\ \underline{e}_z dS = C\underline{e}_z$,
- ⋄ sur la surface inférieure : $\displaystyle\iint_{S_0} \underline{\underline{\sigma}}\ \underline{e}_z dS = \underline{0}$ et $\displaystyle\iint_{S_0} \underline{OM} \wedge \underline{\underline{\sigma}}\ (-\underline{e}_z) dS = -C\underline{e}_z$.

• Relation de comportement (RdC) : Loi de Hooke : $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda\ Tr(\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{1}}\ +\ 2\mu\ \underline{\underline{\varepsilon}}$.

Question 1.3 : Il faut supprimer les mouvements de corps rigides. Ce n'est pas le cas ici. La solution en déplacement sera vrai aux mouvements de corps rigide près.

2 Approche en déplacement

Question 2.1.1 : Il faut que la fonction φ soit régulière, c'est-à-dire continue, dérivable un grand nombre de fois.

Question 2.1.2 :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\alpha}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - y \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + x \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - y & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + x & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{\sigma}} = \alpha\mu\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - y \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + x \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - y & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + x & 0 \end{bmatrix}$$

Question 2.1.3 : L'équilibre global donne :

$$\underline{\mathrm{Div}}\underline{\underline{\sigma}} = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Delta\varphi(x,y) = 0} \tag{1}$$

La condition $\underline{\underline{\sigma}}\ \underline{n} = \underline{0}$ sur la surface latérale donne avec $\underline{n} = n_x\underline{e}_x + n_y\underline{e}_y$:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ n_x\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right) + n_y\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow n_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + n_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + n_y x - n_x y = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{grad}\ \varphi \cdot \underline{n} + (\underline{X} \wedge \underline{n}) \cdot \underline{e}_z = 0} \tag{2}$$

Résultante sur S_0 et S_L : $\iint\limits_{S_L} \underline{\underline{\sigma}}\ \underline{e}_z dS = \underline{0} \Rightarrow \boxed{\iint\limits_{S_L} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right) dS \underline{e}_x + \iint\limits_{S_L} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right) dS \underline{e}_y = \underline{0}}$

Moment sur S_0 et S_L :

$$\iint\limits_{S_L} \underline{X} \wedge \underline{\underline{\sigma}}\ \underline{e}_z dS = C\underline{e}_z \Rightarrow \iint\limits_{S_L} (x\underline{e}_x + y\underline{e}_y) \wedge \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right) \underline{e}_x + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right) \underline{e}_y\right) dS = \frac{C}{\alpha\mu}\underline{e}_z$$

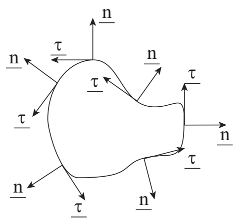
$$\iint\limits_{S_L} \left(x^2 + y^2\right) dS + \iint\limits_{S_L} x\frac{\partial \varphi}{\partial y} - y\frac{\partial \varphi}{\partial x} dS = J$$

Sachant que le premier terme représente la somme de moments quadratique que l'on va nommer $I_x = \iint\limits_{S_L} y^2 dS$ et $I_y = \iint\limits_{S_L} x^2 dS$, on a :

$$\boxed{I_x + I_y + \iint\limits_{S_L} \left(\underline{X} \wedge \underline{grad}\ \varphi\right) \cdot \underline{e}_z dS = J} \tag{3}$$

Question 2.1.4 : On a : $\boxed{\underline{\tau} = \underline{\underline{\sigma}}\ \underline{e}_z = \mu\alpha \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right) \underline{e}_x + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right) \underline{e}_y\right] = \frac{C}{J}\left(\underline{grad}\ \varphi + \underline{e}_z \wedge \underline{X}\right)}$

Il n'y a pas de composante sur $\underline{e}_z$ pour $\underline{\tau}$. Donc $\underline{\tau}$ appartient toujours au plan de la section située à la cote z. Maintenant, en regardant plus précisément sur le bord libre d'une section, on a aussi $\underline{\underline{\sigma}}\ \underline{n} = \underline{0}$, en particulier $\underline{e}_z \cdot \underline{\underline{\sigma}}\ \underline{n} = 0 \Rightarrow (\underline{\underline{\sigma}}\ \underline{n})^T\ \underline{e}_z = 0 \Rightarrow \underline{n}^T\ \underline{\underline{\sigma}}\ \underline{e}_z = 0 \Rightarrow \underline{n} \cdot \underline{\tau} = 0$ et en utilisant le fait que $\underline{\underline{\sigma}}$ est symétrique.



En tout point du bord libre, on a une ligne de cisaillement puisque $\underline{\tau} \cdot \underline{n} = 0$.

Question 2.2.1 : La représentation du bord de la section S est une ellipse de forme $s(x, y)$, vérifiant l'équation 1 trivialement :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow s(x, y) = 0 \quad \text{avec} \quad s(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

La normale sortante unitaire à cette surface à pour expression :

$$\underline{n} = \frac{\underline{\text{grad}}\ s(x, y)}{||\underline{\text{grad}}\ s(x, y)||} \Rightarrow \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}} \left(\frac{x}{a^2}\underline{e}_x + \frac{y}{b^2}\underline{e}_y\right) \tag{4}$$

Du coup, on essaye de vérifier l'équation 2.

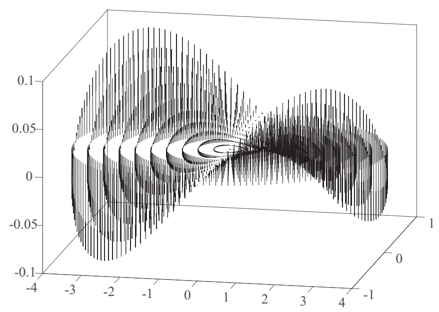
$$\underline{grad}\ \varphi \cdot \underline{n} + (\underline{X} \wedge \underline{n}) \cdot \underline{e}_z = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}} \left(\frac{2x}{a^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{2y}{b^2}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{2y}{b^2}x - \frac{2x}{a^2}y\right) = 0$$

$$\frac{2x}{a^2}ky + \frac{2y}{b^2}kx + \frac{2y}{b^2}x - \frac{2x}{a^2}y = 0 \Leftrightarrow \boxed{k = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}}$$

Maintenant, on essaye de vérifier l'équation 3.

$$I_x + I_y + \iint\limits_{S_L} \left(\underline{X} \wedge \underline{grad}\ \varphi\right) \cdot \underline{e}_z dS = J \Leftrightarrow I_x + I_y + k(I_y - I_x) = J \Leftrightarrow \boxed{J = \pi\frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}}$$

Question 2.2.2 : On a donc $\underline{U} = \alpha(z\underline{e}_z \wedge \underline{OM} + kxy\underline{e}_z)$. La partie $z\underline{e}_z \wedge \underline{OM}$ représente la composante dans le plan $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ alors que la partie $kxy\underline{e}_z$ représente la composante hors-plan selon $\underline{e}_z$. Voici une représentation de la composante hors plan, c'est ce type de déplacement qu'on appelle gauchissement de section :



Question 2.2.3 : On recalcule l'état de contrainte :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \alpha\mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & y(k-1) \\ 0 & 0 & x(k+1) \\ y(k-1) & x(k+1) & 0 \end{bmatrix}$$

On a le vecteur de cisaillement : $\underline{\tau} = \frac{C}{J}((k-1)y\underline{e}_x + (k+1)x\underline{e}_y)$. L'expression des lignes de cisaillement suivent la relation $\underline{\tau} \wedge \underline{dM} = \underline{0} \Leftrightarrow -(k-1)ydy + (k+1)xdx = 0$, soit après intégration et en remplaçant k par sa valeur $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = cte}$. Les lignes de cisaillements sont donc des ellipses à l'intérieur même de la section.

Question 2.3.1 : Dans ce cas particulier, on a $a = b$ par conséquent $k = 0$ du coup $\underline{U} = \alpha z\underline{e}_z \wedge \underline{OM}$, il n'y pas de composante hors plan donc pas de gauchissement, la section en forme disque reste un disque au cours du déplacement.

Question 2.3.2 : On trouve $J = \dfrac{\pi d^4}{32}$, résultat classique du moment quadratique de torsion.

Question 2.3.3 : On recalcule l'état de contrainte :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \alpha\mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

On a le vecteur de cisaillement : $\underline{\tau} = \frac{C}{J}(-y\underline{e}_x + x\underline{e}_y)$. L'expression des lignes de cisaillement suivent la relation $\underline{\tau} \wedge \underline{dM} = \underline{0} \Leftrightarrow ydy + xdx = 0$, soit après intégration et en ramplaçant k par sa valeur $\boxed{x^2 + y^2 = cte}$. Les lignes de cisaillements sont donc des cercles à l'intérieur même de la section.

3 Approche en contraintes

Question 3.1.1 & 3.1.2 & 3.1.3 : L'état de contrainte s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \alpha\mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \\ 0 & 0 & -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y} & -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}$$

On suppose que ψ est suffisament régulière. Il faut respecter l'équilibre :

$$\underline{\text{Div}}\ \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sur la surface latérale : $\underline{\underline{\sigma}}\ \underline{n} = \underline{0}$ où $\underline{n}$ est le vecteur local sortant de la surface. On a donc :

$$\underline{\underline{\sigma}}\ \underline{n} = \underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n_x \dfrac{\partial \psi}{\partial y} - n_y \dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\underline{n} \wedge \underline{\text{grad}}\ \psi = \underline{0}} \tag{5}$$

Par conséquent, on a $\underline{t} \cdot \underline{\text{grad}}\ \psi = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \psi = cte$ sur la surface latérale et en particulier sur le contour (cercle) qui forme les S_0 et S_L.
La résultante sur S_0 et S_L donne :

$$\iint_{S_L} \underline{\underline{\sigma}}\ \underline{e}_z dS = \underline{0} \Rightarrow \iint_{S_L} \underline{e}_z \wedge \underline{\text{grad}}\ \psi dS = \underline{0} \Rightarrow \underline{e}_z \wedge \iint_{S_L} \underline{\text{grad}}\ \psi dS = \underline{0} \Rightarrow \oint_L \psi \underline{n} dl = \underline{0}$$

Comme le contour L de cette surface est un cercle et qu'il est fermé et que ψ est constante sur ce cercle (elle sort de l'intégrale). On a donc cette relation est toujours vérifiée.
Le moment sur S_0 et S_L donne :

$$\iint_{S_L} \underline{X} \wedge \underline{\underline{\sigma}}\ \underline{e}_z dS = C\underline{e}_z \Rightarrow \iint_{S_L} \underline{X} \wedge (\underline{e}_z \wedge \underline{\text{grad}}\ \psi) dS = J\underline{e}_z \Rightarrow \iint_{S_L} (\underline{X} \cdot \underline{\text{grad}}\ \psi)\underline{e}_z - (\underline{X} \cdot \underline{e}_z)\underline{\text{grad}}\ \psi dS = J\underline{e}_z$$

Comme $\underline{X}$ appartient au plan $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$,

$$\boxed{\iint_{S_L} \underline{X} \cdot \underline{\text{grad}}\ \psi dS = J} \tag{6}$$

Question 3.2.1 : On suppose que $\psi(x, y) = Ax^2 + By^2 + D$. On a du coup $\underline{\text{grad}}\psi = 2Ax\underline{e}_x + 2By\underline{e}_y$. En utilisant la relation 5 et la définition de $\underline{n}$ avec la relation 4, on a :

$$\underline{n} \wedge \underline{\text{grad}}\ \psi = \underline{0} \Leftrightarrow \frac{2x}{a^2} 2By - \frac{2y}{b^2} 2Ax = 0 \Leftrightarrow \boxed{b^2 B - a^2 A = 0}$$

En utilisant la relation 6, on a :

$$\iint_{S_L} \underline{X} \cdot \underline{\text{grad}}\ \psi dS = J \Leftrightarrow 2A \iint_{S_L} x^2 dS + 2B \iint_{S_L} y^2 dS = J \Leftrightarrow \boxed{A + B = \frac{2J}{\pi ab(a^2 + b^2)}}$$

Les deux équations ainsi obtenues conduisent à la solution :

$$\boxed{A = \frac{2Jb}{\pi a(a^2 + b^2)^2}} \qquad \boxed{B = \frac{2Ja}{\pi b(a^2 + b^2)^2}}$$

Question 3.2.2 : L'état de contrainte s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \alpha\mu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2By \\ 0 & 0 & -2Ax \\ 2By & -2Ax & 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur de cisaillement s'écrit : $\underline{\tau} = \underline{\underline{\sigma}}\ \underline{e}_z = \alpha\mu(2By\underline{e}_x - 2Ax\underline{e}_y) = \frac{C}{J}(2By\underline{e}_x - 2Ax\underline{e}_y)$.

Les lignes de cisaillement suivent $\underline{dM} \wedge \underline{\tau} = \underline{0} \Leftrightarrow 2Bydy + 2Axdx = 0$ soit

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cte}$$

Ce sont des ellipses ; on retrouve le résultat de l'approche en déplacement.

Question 3.2.2 : Par définition, les lignes de niveau sont telles que $\psi = cte$. En injectant, on retouve

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cte}$$

Les lignes de niveau sont aussi les lignes de cisaillement.