# Correction TD 6 - Équilibre des milieux continus

## 1 Vitesse de rotation maximale d'un disque

**Question 1.1 :**

$$\underline{\mathrm{Div}}\ \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = \underline{0}$$

**Question 1.2 :**

Pour le contact sans frottement
en $z = h$, on a $\underline{\underline{\sigma}}\ \underline{e}_z \wedge\ \underline{e}_z = \underline{0}$,
en $z = -h$, on a $\underline{\underline{\sigma}}\ (-\underline{e}_z) \wedge\ \underline{e}_z = \underline{0}$,

Pour la surface latérale libre
en $r = a$, on a $\underline{\underline{\sigma}}\ \underline{e}_r = \underline{0}$.

**Question 1.3 :** Il faut développer le calcul avec l'expression en cylindrique, c'est assez immédiat :

$$\underline{\mathrm{rot}}\ \underline{U} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\underline{e}_r + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\underline{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\underline{e}_z = \underline{0}$$

**Question 1.4 :**

$$\underline{\underline{\mathbb{G}rad}}\ \underline{U} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\frac{u_r}{r} & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}\right) \end{bmatrix}$$

La seule composante non nulle de $\underline{\mathrm{Div}}\ \underline{\underline{\sigma}}$ est la composante issue de $\sigma_{rr}$, ce qui conduit à :

$$(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2}\right) + \rho\Omega^2 r = 0$$

**Question 1.5 :** Les fonctions $r$ et $1/r$ sont des fonctions solutions évidentes de l'équation homogène. La résolution de l'équation complète conduit à :

$$u_r(r) = Ar + \frac{B}{r} - \frac{\rho\Omega^2}{8(\lambda+2\mu)}r^3.$$

**Question 1.6 :** Or le champ de déplacement $u_r$ ne peut pas physiquement diverger en $r = 0$ imposant ainsi obligatoiremeent $B = 0$. On peut alors rééc rire la solution :

$$\underline{U} = \left(\frac{C}{2}r - \frac{\rho\Omega^2}{8(\lambda+2\mu)}r^3\right)\underline{e}_r.$$

**Question 1.7 :**

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} -\frac{3\rho\Omega^2}{8(\lambda+2\mu)}r^2 + \frac{C}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\rho\Omega^2}{8(\lambda+2\mu)}r^2 + \frac{C}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -\frac{\rho\Omega^2 r^2}{8}\left(3+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right)+(\lambda+\mu)C & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\rho\Omega^2 r^2}{8}\left(1+\frac{3\lambda}{\lambda+2\mu}\right)+(\lambda+\mu)C & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4\lambda\rho\Omega^2 r^2}{8(\lambda+2\mu)}+\lambda C \end{bmatrix}$$

**Question 1.8 :** Sur la surface latérale su disque, il n'y a pas de contrainte. On a donc en $r = a$, $\underline{\underline{\sigma}}\ \underline{e}_r = \underline{0}$ qui conduit à :

$$C = \frac{\rho\Omega^2 a^2}{8(\lambda+\mu)}\left(3+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right) = \frac{5\rho\Omega^2 a^2}{24\lambda}$$

**Question 1.9 :** Il faut avant tout déterminer :

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_{rr} = \frac{\rho\Omega^2}{12}(5a^2-5r^2) \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{\rho\Omega^2}{12}(5a^2-3r^2) \\ \sigma_{zz} = \frac{\rho\Omega^2}{24}(5a^2-4r^2) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sigma_{\theta\theta}-\sigma_{rr} = \frac{\rho\Omega^2 r^2}{6} \\ \sigma_{\theta\theta}-\sigma_{zz} = \frac{\rho\Omega^2}{24}(5a^2-2r^2) \\ \sigma_{rr}-\sigma_{zz} = \frac{\rho\Omega^2}{24}(5a^2-2r^2) \end{array}\right.$$

Comme $0 < r < a$, le maximum ne peut être que $\frac{5\rho\Omega^2 a^2}{24}$. On a donc le critère de Tresca où $R_e$ est la limite élastique du matériau : $\Omega < \sqrt{\frac{24R_e}{5\rho a^2}}$

**Question 1.10 :** La pression est obtenue par la définition

$$p(r) = -\frac{1}{3}Tr(\underline{\underline{\sigma}}) = -\frac{\rho\Omega^2}{72}(25a^2-20r^2)$$

**Question 1.11 :** On peut donc construire le tenseur déviatorique :

$$\underline{\underline{\sigma}}_D = \frac{\rho\Omega^2}{72}\begin{bmatrix} 5a^2-10r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 5a^2+2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -10a^2+8r^2 \end{bmatrix}$$

La contrainte équivalente de Von Mises va être maximale en $r = 0$, soit

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{3}{2}\underline{\underline{\sigma}}_D : \underline{\underline{\sigma}}_D} = \frac{\rho\Omega^2 a^2}{72}\sqrt{\frac{3\times 150}{2}} = \frac{5\rho\Omega^2 a^2}{24}$$

**Question 1.12 :** Pour calculer l'action mécanique exercé par les contacts, il faut d'abord calculer le vecteur contrainte en $z = h$ :

$$\underline{\underline{\sigma}}\ \underline{e}_z = \frac{\rho\Omega^2}{24}(5a^2-4r^2)\underline{e}_z$$

On peut alors calculer la force exercée :

$$\underline{F} = \int_0^{2\pi}\int_0^a \underline{\underline{\sigma}}\ \underline{e}_z r dr d\theta = \pi\frac{1}{8}\rho\Omega^2 a^4 \underline{e}_z$$

On peut alors calculer le moment exercé :

$$\underline{M} = \int_0^{2\pi}\int_0^a r\underline{e}_r \wedge \underline{\underline{\sigma}}\ \underline{e}_z r dr d\theta = \pi\frac{13}{180}\rho\Omega^2 a^5 \underline{e}_\theta$$

La présence de ce moment indique que le disque va se creuser au cours de la rotation.