Correction TD 5 - problèmes élémentaires des milieux continus

1 Équilibre d'une sphère

Question 1.1 :

$$\underline{\underline{\mathbb{G}rad}}\ \underline{U} = -\frac{\rho g}{\lambda + 2\mu}\begin{bmatrix} \frac{R}{3} - \frac{z}{5} & 0 & -\frac{x}{5} \\ 0 & \frac{R}{3} - \frac{z}{5} & -\frac{y}{5} \\ -\frac{x}{5} & -\frac{y}{5} & \frac{R}{3} - \frac{3z}{5} \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{\varepsilon}} = -\frac{\rho g}{\lambda + 2\mu}\begin{bmatrix} \frac{R}{3} - \frac{z}{5} & 0 & -\frac{x}{5} \\ 0 & \frac{R}{3} - \frac{z}{5} & -\frac{y}{5} \\ -\frac{x}{5} & -\frac{y}{5} & \frac{R}{3} - \frac{3z}{5} \end{bmatrix}$$

De plus on a :

$$Tr(\underline{\underline{\varepsilon}}) = R - z$$

Question 1.2 :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -\frac{\rho g}{\lambda + 2\mu}\begin{bmatrix} \lambda(R-z) + 2\mu\left(\frac{R}{3} - \frac{z}{5}\right) & 0 & -2\mu\frac{x}{5} \\ 0 & \lambda(R-z) + 2\mu\left(\frac{R}{3} - \frac{z}{5}\right) & -2\mu\frac{y}{5} \\ -2\mu\frac{x}{5} & -2\mu\frac{y}{5} & \lambda(R-z) + 2\mu\left(\frac{R}{3} - \frac{3z}{5}\right) \end{bmatrix}$$

Question 1.3 : On calcule d'abord : $\underline{\text{Div}}\ \underline{\underline{\sigma}}$.

$$\underline{\text{Div}}\underline{\underline{\sigma}} = -\frac{\rho g}{\lambda + 2\mu}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\mu\frac{1}{5} - 2\mu\frac{1}{5} - \lambda - 2\mu\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g \end{bmatrix}$$

On retrouve que $\underline{\text{Div}}\ \underline{\underline{\sigma}}$ est égale aux forces volumiques exercées sur la sphère. Ici, c'est la force de pesanteur soit $\underline{\text{Div}}\ \underline{\underline{\sigma}} - \rho g \underline{e}_z = \underline{0}$.

Question 1.4 : L'accroissement de volume Ω suit la relation $\Omega = \det \underline{\underline{F}}\ \Omega_0$ avec $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\mathbb{G}rad}}\ \underline{U}$.

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} -\frac{\rho g}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{R}{3} - \frac{z}{5}\right) + 1 & 0 & \frac{\rho g}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{x}{5}\right) \\ 0 & -\frac{\rho g}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{R}{3} - \frac{z}{5}\right) + 1 & \frac{\rho g}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{y}{5}\right) \\ \frac{\rho g}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{x}{5}\right) & \frac{\rho g}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{y}{5}\right) & -\frac{\rho g}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{R}{3} - \frac{3z}{5}\right) + 1 \end{bmatrix}$$

Ce qui donne un résultat assez lourd que l'on a même pas envie d'essayer de simplifier...

$$\begin{aligned} \det \underline{\underline{F}} = &\left(-\frac{\rho g}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{R}{3} - \frac{z}{5}\right) + 1\right)^2 \left(-\frac{\rho g}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{R}{3} - \frac{3z}{5}\right) + 1\right) \\ &- \left(\frac{\rho g}{\lambda + 2\mu}\right)^2 \left(\frac{x}{5}\right)^2 \left(-\frac{\rho g}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{R}{3} - \frac{z}{5}\right) + 1\right) \\ &- \left(\frac{\rho g}{\lambda + 2\mu}\right)^2 \left(\frac{xy}{5^2}\right) \left(-\frac{\rho g}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{R}{3} - \frac{z}{5}\right) + 1\right) \end{aligned}$$

2 Compression-confinement d'un cylindre creux

Question 2.1 : On écrit les équations de liaisons (CA) : encastrement en bas du cylindre $\underline{u}(r, z = 0) = \underline{0}$ et dépalcement imposé en haut du cylindre $\underline{u}(r, z = H) = -u_0\underline{e}_z$.

On écrit des les équations d'équilibre (SA) :
◇ sur la surface latérale extérieure en $r = r_1$: $\underline{\underline{\sigma}}\ \underline{e}_r = -p_1\underline{e}_r$,
◇ sur la surface latérale intérieure en $r = r_0$: $\underline{\underline{\sigma}}(-\underline{e}_r) = p_0\underline{e}_r$,
◇ équilibre local : $\underline{\text{Div}}\ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$.

On écrit la relation de comportement, c'est la loi de Hooke : $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda\ Tr(\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{1}}\ +\ 2\mu\ \underline{\underline{\varepsilon}}$.

Question 2.2 :

$$\underline{\underline{\mathbb{G}rad}}\ \underline{U} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Question 2.3 :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} (\lambda+2\mu)\dfrac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\left(\dfrac{u_r}{r} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda+2\mu)\dfrac{u_r}{r} + \lambda\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial r} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+2\mu)\dfrac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial r} + \dfrac{u_r}{r}\right) \end{bmatrix}$$

Question 2.4 : On calcule l'équilibre local en projection sur $\underline{e}_z$.

$$\left(\underline{\text{Div}}\ \underline{\underline{\sigma}}\right)\cdot\underline{e}_z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0$$

La résolution de cette équation associée aux conditions CA conduit à :

$$u_z = -\frac{u_0}{H}z.$$

Question 2.5 : On calcule l'équilibre local en projection sur $\underline{e}_r$.

$$\left(\underline{\text{Div}}\ \underline{\underline{\sigma}}\right)\cdot\underline{e}_r = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 0$$

La solution type $u_r(r) = Ar + \dfrac{B}{r}$ proposé par l'énoncé fonctionne. Il faut utiliser les conditions SA pour trouver A et B.

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}\ \underline{e}_r = -p_1\underline{e}_r \\ \underline{\underline{\sigma}}(-\underline{e}_r) = p_0\underline{e}_r \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sigma_{rr}(r = r_1) = -p_1 \\ \sigma_{rr}(r = r_0) = -p_0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (\lambda+2\mu)\left(A - \dfrac{B}{{r_1}^2}\right) + \lambda\left(A + \dfrac{B}{{r_1}^2} - \dfrac{u_0}{H}\right) = -p_1 \\ (\lambda+2\mu)\left(A - \dfrac{B}{{r_0}^2}\right) + \lambda\left(A + \dfrac{B}{{r_0}^2} - \dfrac{u_0}{H}\right) = -p_0 \end{array}\right.$$

Ce qui conduit à,

$$A = -\frac{1}{2(\lambda+\mu)}\left(\frac{(p_1 - p_0){r_0}^2}{{r_1}^2 - {r_0}^2} - \lambda\frac{u_0}{H} + p_1\right) \qquad B = -\frac{(p_1 - p_0)(r_1 r_0)^2}{2\mu({r_1}^2 - {r_0}^2)}$$

Question 2.6 :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} A - \dfrac{B}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & A + \dfrac{B}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{u_0}{H} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 2(\lambda+\mu)A - 2\mu\dfrac{B}{r^2} - \lambda\dfrac{u_0}{H} & 0 & 0 \\ 0 & 2(\lambda+\mu)A + 2\mu\dfrac{B}{r^2} - \lambda\dfrac{u_0}{H} & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda+2\mu)\dfrac{u_0}{H} + 2\lambda A \end{bmatrix}$$

Question 2.7 : On veut que $u_r = 0 \quad \forall r$. D'après l'expression de u_r, cela implique $A = B = 0$. D'après l'expression de B, pour avoir $B = 0$, il faut $p_1 = p_0 = p$. D'ailleurs, pour maintenant vérifier $A = 0$, il faut aussi imposer la relation $-\lambda\dfrac{u_0}{H} + p = 0$, ce qui revient à :

$$p = \lambda\frac{u_0}{H}$$

Question 2.8 : Pour annuler la contraitne verticale, il faut :

$$\sigma_{zz} = 0 \Rightarrow -(\lambda+2\mu)\frac{u_0}{H} + 2\lambda A = 0,$$

soit la relation

$$-(\lambda+2\mu)\frac{u_0}{H} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(\frac{(p_1-p_0){r_0}^2}{{r_1}^2-{r_0}^2} - \lambda\frac{u_0}{H} + p_1\right) = 0.$$