

Les vecteurs et la géométrie

Mélanie Guenais, mise à jour par Pierre Pansu

28 novembre 2023

Objectifs des programmes (extraits)

Aménagement des programmes de seconde 2019, géométrie :

Les objectifs de cette partie sont les suivants :

- *consolider les notions sur les configurations géométriques abordées au collège et prolonger leur étude ;*
- *introduire les vecteurs du plan comme outil permettant d'étudier des problèmes issus des mathématiques et des autres disciplines, en particulier de la physique ;*
- *poursuivre l'étude de la géométrie repérée, qui relie nombres, calculs algébriques, fonctions et géométrie et constitue un outil utile à d'autres disciplines. En particulier, introduire la notion d'ensemble de points du plan décrit par une équation, en explicitant le cas des équations de droites.*

Qu'en pensez-vous ?

La définition proposée des vecteurs (= translations) permet d'introduire rapidement l'addition de deux vecteurs, moins aisément la multiplication d'un vecteur par un nombre réel. Cette introduction est faite en liaison avec la géométrie plane repérée.

Les vecteurs, un enjeu de l'enseignement du cycle terminal

En première, extrait des programmes de spécialité 2018 :

En première, on poursuit l'étude de la géométrie plane en introduisant de nouveaux outils. L'enseignement est organisé autour des objectifs suivants :

- *donner de nouveaux outils efficaces en vue de la résolution de problèmes géométriques, du point de vue métrique (produit scalaire) ;*
- *enrichir la géométrie repérée de manière à pouvoir traiter des problèmes faisant intervenir l'orthogonalité.*

Les élèves doivent conserver une pratique du calcul vectoriel en géométrie non repérée.

Qu'en pensez-vous ?

- Un nouvel outil pour la géométrie, utile ? performant ? ...
- Un concept fondamental pour l'algèbre linéaire... pour les études supérieures : de quoi a-t-on vraiment besoin ?

Représentations et significations : vecteur ou représentant de vecteur ?

Première représentation : une flèche

Ses caractéristiques : direction, sens, longueur.

Plusieurs significations :

- dynamique : déplacement dans l'espace (glissement ou translation)
- physique : force exercée sur un objet ponctuel.

Une différence à noter : vecteur ou représentant ?

La force s'exerce en un point, et peut varier d'un point à l'autre. On peut en tirer la notion d'origine du vecteur. Dans ce cas, la représentation graphique sous la forme \overrightarrow{AB} est le représentant du vecteur d'origine A.

Le vecteur est en fait une classe d'équivalence...

Le vecteur du point de vue dynamique

Une définition dynamique par les translations :

Le vecteur "est" une application de l'espace dans lui-même (une transformation).

Propriété-définition : *Pour tous points A et B , il existe une unique translation envoyant A sur B . On lui associe un vecteur qu'on note \overrightarrow{AB} .*

Les intérêts principaux :

- Présentation géométrique et intuitive de l'objet,
- Compréhension de l'indépendance du choix de l'origine,
- Relation de Chasles explicite.

Quelles difficultés ?

- Choisir une définition univoque
- Comprendre la multiplication par un scalaire

Le vecteur du point de vue géométrique

Une définition géométrique par les bipoints ou les segments :

Un vecteur est une classe d'équivalence de couples de points pour une relation d'équivalence adéquate (laquelle?).

Propriété : *La relation liant deux segments de même direction, sens et longueur est une relation d'équivalence sur l'ensemble des segments.*

Les intérêts principaux :

- Présentation géométrique (physique) et intuitive,
- Définition intrinsèque à partir des caractéristiques des segments,
- Multiplication par les scalaires en lien avec les représentations des nombres négatifs.

Quelles difficultés ?

- Définir précisément le sens (et montrer la transitivité de la propriété associée)
- Indépendance du choix de l'extrémité.
- Comprendre l'addition de deux vecteurs.

Le point de vue de l'algèbre linéaire

Le vecteur élément d'un espace vectoriel

En fait, le vecteur est un objet beaucoup plus vaste que son représentant dans le plan. Il s'agit d'identifier des propriétés d'un ensemble qui forme un espace vectoriel.

Rappel : un ensemble forme un espace vectoriel si...

Exemples : \mathbb{R}^2 ; \mathbb{R}^n , l'ensemble des matrices, des fonctions, des polynômes,...

Les notions essentielles à retenir :

- Les vecteurs forment un groupe commutatif muni d'une loi externe
- Le plan est un espace affine de dimension 2, l'espace est un espace affine de dimension 3
- Un espace affine muni d'une origine est associé à un espace vectoriel.
- On peut définir des opérations sur les vecteurs qui donnent un sens à certaines opérations sur les points :

$$B = A + \overrightarrow{AB}$$

Et les coordonnées ? Le point de vue analytique

Le vecteur du lycée : une construction affine

Les vecteurs introduits au lycée viennent de l'espace affine (ils sont définis à partir des points). Dans le supérieur, les espaces affines découlent des espaces vectoriels... (point+vecteur).

Avantage de l'usage des coordonnées

- Compatibilité naturelle avec les opérations sur les vecteurs.
- Du point de vue théorique, on met en évidence l'isomorphisme canonique du plan vectoriel avec \mathbb{R}^2 (est-ce vraiment un avantage ?)

Le principal danger : la perte de sens

- Réduction d'un problème géométrique au calcul analytique.
- Confusion entre coordonnées d'un point et celle du vecteur.
- Dépendance des coordonnées du repère choisi. (Statut de la définition des coordonnées ?)

Translations et propriétés du parallélogramme.

- Comment définir une translation ?
- Quels problèmes découlent de la définition de l'égalité de vecteurs à l'aide du parallélogramme ?
- Quelles sont les deux propriétés caractéristiques du parallélogramme indispensables pour mettre en lien les différents points de vue ?

Définir la somme de deux vecteurs

- Le sens du "+" pour des vecteurs : pourquoi ce choix ?
- Quelle définition choisir ?
- Comment justifier la commutativité ?
- Compatibilité avec les coordonnées : propriété ?
- Et la relation de Chasles, quel statut ? propriété ou définition ?
- Quid du sens de $A + B$?

Conséquences de la définition de l'addition vectorielle :

Deux cas particuliers de vecteurs à définir :

- Le vecteur nul $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
- Le vecteur $-\overrightarrow{AB}$.

Définir le produit d'un vecteur par un réel.

- Quel sens donner à la multiplication d'un vecteur par un scalaire ?
Définitions possibles ?
- Lien avec la colinéarité des vecteurs et les propriétés de parallélisme ou d'alignement.
- Compatibilité avec les coordonnées, quelles propriétés ?
- Retour sur Thalès.
- Quid du sens de λA ?
- Pourquoi et comment définir les homothéties dans ce cadre ? et les symétries centrales ?

Les propriétés des transformations affines

Lesquelles mettre en valeur ?

Pourquoi ne pas avoir redéfini les symétries axiales, les rotations, les projections ?

Le point de vue métrique : le produit scalaire.

C'est le principal enjeu de la classe de première.

Objectif principal : caractériser l'orthogonalité.

Un objet riche et complexe pour le supérieur : forme bilinéaire symétrique définie positive.

Les bases : un oubli malheureux des nouveaux programmes

Repère ou base ? Quel lien ? Pourquoi est-ce important ? Que faut-il enseigner aux élèves à ce sujet ? Quand ?

Quels registres à relier ? comment ?

- Registre géométrique
- Registre vectoriel (calcul vectoriel)
- Registre cartésien (calcul analytique)

Les écueils

Une fois faits les changements de registres, il reste à faire des calculs vectoriels, ou (le plus souvent) analytiques... mais quelle méthodologie ?

La figure, une clé pour la compréhension !

Ne jamais perdre de vue qu'une bonne vision géométrique est indispensable à la maîtrise des propriétés vectorielles... il est nécessaire de repenser le rôle essentiel de la figure dans les démarches d'activités.

La puissance du calcul vectoriel, ou pas ? Quelles configurations choisir ?

- Propriété de la droite des médianes dans un trapèze
- Concours des médianes, centre de gravité d'un triangle.
- Concours des hauteurs
- Concours des bissectrices
- Droite d'Euler dans un triangle
- Loi des sinus

Objectifs de la séance :

Pour les propriétés présentées :

- Expliciter 2 démonstrations au moins pour chaque propriété, dont l'une utilise les vecteurs et l'autre non.
- Analyser ces démonstrations et discuter de leur pertinence pour montrer l'efficacité de l'utilisation des vecteurs.
- Quels sont les savoir-faire mis en jeu concernant la notion de vecteur ?

Pour les activités proposées dans les manuels :

- Estimer la fréquence des activités dans chacun des registres. Identifier ceux qui demandent explicitement de réaliser une figure. Commenter.
- Parmi les activités (au sens large : exercices, problèmes,...), choisir quelques-unes qui vous paraissent les plus représentatives de la multiplicité des registres possibles. Argumentez vos choix, et adapter si besoin les énoncés en motivant les modifications proposées.
- Proposez pour ces activités plusieurs résolutions possibles dans différents registres, et analysez la pertinence de l'usage des outils vectoriels ou analytiques.