Nombres réels

Pierre Pansu, Université Paris-Saclay

2 décembre 2022

Insuffisance des rationnels en géométrie

Théorème

Le rapport de la longueur de la diagonale d'un carré à la longueur d'un côté n'est pas rationnel.

Théorème

Le rapport de la longueur de la diagonale d'un carré à la longueur d'un côté n'est pas rationnel.

Exercice

Démonstration arithmétique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Détails

Insuffisance des rationnels en géométrie

Théorème

Le rapport de la longueur de la diagonale d'un carré à la longueur d'un côté n'est pas rationnel.

Exercice

Démonstration arithmétique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Détails

Exercice

Démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ *par pliage de papier.*

Détails

Insuffisance des rationnels en géométrie

Théorème

Le rapport de la longueur de la diagonale d'un carré à la longueur d'un côté n'est pas rationnel.

Exercice

Démonstration arithmétique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. ▸ Détails

Exercice

Démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ *par pliage de papier.* ▸ Détails

Les réels doivent correspondre aux points d'une droite, il y en a davantage que de rationnels.

Calcul approché de $\sqrt{2}$ par décatomie. La solution positive de $x^2 = 2$ est un développement décimal illimité.

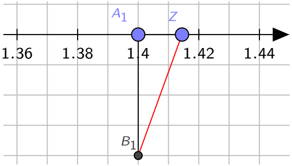
Calcul approché de $\sqrt{2}$ par décatomie. La solution positive de $x^2 = 2$ est un développement décimal illimité.

Parenthèse. On peut aller plus vite en remarquant que la pente de l'hypoténuse du triangle rectangle $A_k B_k Z$ est proche de $2x_k$.

Exercice

Donner une valeur approchée de l'abscisse de Z en fonction de celle, x_k, de A_k.

Solution



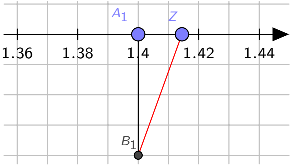
Calcul approché de $\sqrt{2}$ par décatomie. La solution positive de $x^2 = 2$ est un développement décimal illimité.

Parenthèse. On peut aller plus vite en remarquant que la pente de l'hypoténuse du triangle rectangle $A_k B_k Z$ est proche de $2x_k$.

Exercice

Donner une valeur approchée de l'abscisse de Z en fonction de celle, x_k, de A_k.

Solution



Calcul approché de $\sqrt{4}$ par décatomie. La solution de $x^2 = 4$ est un développement décimal illimité de la forme 1,9999999....

Exercice

Démontrer que la distance de 1,999... à 2 est inférieure à tout rationnel strictement positif ϵ, $|2-1{,}9999....| < \epsilon$.

Solution

Exercice

Démontrer que la distance de 1,999... à 2 est inférieure à tout rationnel strictement positif ϵ, $|2-1{,}9999....| < \epsilon$.

Solution

Par conséquent, pour la géométrie, on doit identifier 1,9999... et 2.

Définition

Un nombre réel, c'est un développement décimal illimité, avec la convention qu'un développement décimal qui se termine par des 9 est égal à un nombre décimal.

Par exemple, $1{,}59999... = 1{,}60000....$

Exercice

Démontrer que la distance de 1,999... à 2 est inférieure à tout rationnel strictement positif ϵ, $|2-1{,}9999....| < \epsilon$.

Solution

Par conséquent, pour la géométrie, on doit identifier 1,9999... et 2.

Définition

Un nombre réel, c'est un développement décimal illimité, avec la convention qu'un développement décimal qui se termine par des 9 est égal à un nombre décimal.

Par exemple, $1{,}59999... = 1{,}60000....$

Définition

Un minorant d'un ensemble de réels X*, c'est un réel* M *tel que* $\forall x \in X,\ x \geq M$*. La borne inférieure de* X*, c'est le plus grand de ses minorants.*

Exercice

Démontrer que la distance de 1,999... à 2 est inférieure à tout rationnel strictement positif ϵ, $|2 - 1{,}9999....| < \epsilon$.

Solution

Par conséquent, pour la géométrie, on doit identifier 1,9999... et 2.

Définition

Un nombre réel, c'est un développement décimal illimité, avec la convention qu'un développement décimal qui se termine par des 9 est égal à un nombre décimal.

Par exemple, $1{,}59999... = 1{,}60000....$

Définition

Un minorant d'un ensemble de réels X*, c'est un réel* M *tel que* $\forall x \in X$, $x \geq M$*. La borne inférieure de* X*, c'est le plus grand de ses minorants.*

Théorème

Tout ensemble non vide, minoré, de réels possède une borne inférieure.

Détails

Au passage, on a rencontré le

Théorème (Axiome d'Archimède)

Soient $0 < x < y$ *deux réels strictement positifs. Il existe un entier naturel* n *tel que* $y \leq nx$.

Au passage, on a rencontré le

Théorème (Axiome d'Archimède)

Soient $0 < x < y$ deux réels strictement positifs. Il existe un entier naturel n tel que $y \leq nx$.

Théorème

Dans tout intervalle ouvert non vide $]a, b[$, où $a < b \in \mathbb{R}$, il y a des rationnels.

On dit que $\mathbb{Q}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$.

Exercice

Démontrer ces deux propriétés (on utilisera seulement la définition des réels comme des développement décimaux illimités).

Solution

Au passage, on a rencontré le

Théorème (Axiome d'Archimède)

Soient $0 < x < y$ *deux réels strictement positifs. Il existe un entier naturel* n *tel que* $y \leq nx$.

Théorème

Dans tout intervalle ouvert non vide $]a, b[$, *où* $a < b \in \mathbb{R}$, *il y a des rationnels.*

On dit que $\mathbb{Q}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$.

Exercice

Démontrer ces deux propriétés (on utilisera seulement la définition des réels comme des développement décimaux illimités).

Solution

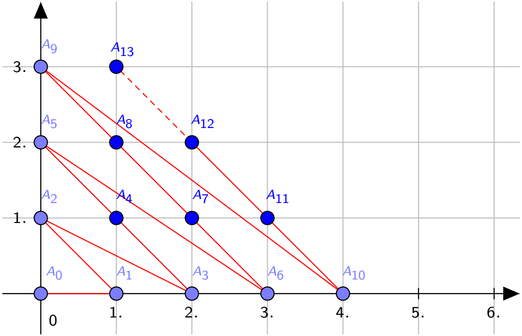
Théorème

$\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

Définition

Un ensemble X est dénombrable s'il existe une application surjective $\mathbb{N} \to X$.

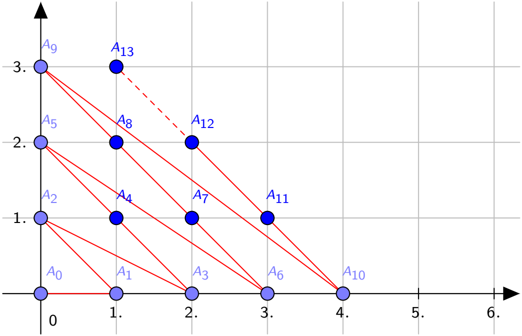
Par exemple, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.



Définition

Un ensemble X est dénombrable s'il existe une application surjective $\mathbb{N} \to X$.

Par exemple, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.



Il en résulte que $\mathbb{Q}$ est dénombrable

Théorème (G. Cantor 1891)

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Théorème (G. Cantor 1891)

$\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

Démonstration

Par l'absurde, supposons que $[0,1]$ est dénombrable. Alors il existe une suite $x_1, x_2, \ldots$ telle que $\forall y \in [0,1[$, $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_k = y$.

Théorème (G. Cantor 1891)

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration

Par l'absurde, supposons que $[0,1]$ est dénombrable. Alors il existe une suite $x_1, x_2, \ldots$ telle que $\forall y \in [0,1[$, $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_k = y$.
On note

$$x_k = 0, \overline{a_{k,1}a_{k,2}\ldots}.$$

(développement avec des 9 si x_k est décimal non nul). On pose $b_j = 9 - a_{j,j}$, et

$$y = 0, \overline{b_1 b_2 \ldots}.$$

Théorème (G. Cantor 1891)

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration

Par l'absurde, supposons que $[0,1]$ est dénombrable. Alors il existe une suite $x_1, x_2, \ldots$ telle que $\forall y \in [0,1[$, $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_k = y$.
On note

$$x_k = 0, \overline{a_{k,1} a_{k,2} \ldots}.$$

(développement avec des 9 si x_k est décimal non nul). On pose $b_j = 9 - a_{j,j}$, et

$$y = 0, \overline{b_1 b_2 \ldots}.$$

Alors, pour tout k, le k-ème chiffre de y (qui vaut $9 - a_{k,k}$) diffère de celui de x_k (qui vaut $a_{k,k}$), donc $y \neq x_k$. Contradiction.

Théorème (G. Cantor 1891)

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration

Par l'absurde, supposons que $[0,1]$ est dénombrable. Alors il existe une suite $x_1, x_2, \ldots$ telle que $\forall y \in [0,1[$, $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_k = y$.
On note

$$x_k = 0, \overline{a_{k,1} a_{k,2} \ldots}.$$

(développement avec des 9 si x_k est décimal non nul). On pose $b_j = 9 - a_{j,j}$, et

$$y = 0, \overline{b_1 b_2 \ldots}.$$

Alors, pour tout k, le k-ème chiffre de y (qui vaut $9 - a_{k,k}$) diffère de celui de x_k (qui vaut $a_{k,k}$), donc $y \neq x_k$. Contradiction.

Il en résulte que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable non plus.

Question. Parmi les développement décimaux illimités, comment reconnaître ceux des rationnels ?

Question. Parmi les développement décimaux illimités, comment reconnaître ceux des rationnels ?

Théorème

Un développement décimal illimité représente un rationnel si et seulement si il est périodique à partir d'un certain rang.

Question. Parmi les développement décimaux illimités, comment reconnaître ceux des rationnels ?

Théorème

Un développement décimal illimité représente un rationnel si et seulement si il est périodique à partir d'un certain rang.

Exercice

Soit $x = 3,\overline{142857}\,\overline{142857}\,\overline{142}\ldots$ *le rationnel dont le développement décimal, après* 3,, *est périodique de période* 142857*. Écrire* x *sous forme de fraction irréductible.*

▸ Solution

Question. Parmi les développement décimaux illimités, comment reconnaître ceux des rationnels ?

Théorème

Un développement décimal illimité représente un rationnel si et seulement si il est périodique à partir d'un certain rang.

Exercice

Soit $x = 3,\overline{142857}\,\overline{142857}\,\overline{142}\ldots$ *le rationnel dont le développement décimal, après* 3,, *est périodique de période* 142857*. Écrire* x *sous forme de fraction irréductible.*

▸ Solution

Exercice

Soit $x = \frac{5}{13}$*. Quel est son développement décimal illimité ?*

▸ Solution

Démonstration de développement décimal périodique $\implies$ rationnel

Si $p = b_1 \dots b_k$ est la période et $y = a_0, a_1 \dots a_\ell$ est la partie non périodique, de sorte que

$$x = a_0, a_1 \dots a_\ell b_1 \dots b_k b_1 \dots b_k \dots,$$

alors

$$\begin{aligned} x &= y + 10^{-\ell}(p.10^{-k} + p.10^{-2k} + \cdots) \\ &= y + 10^{-\ell-k} p \frac{1}{1 - 10^{-k}} \\ &= y + 10^{-\ell} \frac{p}{10^k - 1} \end{aligned}$$

est rationnel.

Démonstration de rationnel $\implies$ développement décimal périodique

Soit $x = \frac{p}{q}$. Il s'agit de trouver des entiers $k > \ell$ tels que $10^k - 10^\ell$ soit un multiple de q. En effet, si $10^k - 10^\ell = mq$, et si $mp = (10^{k-\ell} - 1)s + r$ est la division euclidienne de mp par $10^{k-\ell} - 1$, alors

$$x = \frac{mp}{10^k - 10^\ell} = 10^{-\ell}(s + \frac{r}{10^{k-\ell} - 1})$$

a un développement décimal périodique à partir du rang au plus ℓ, dont une période, de longueur $k - \ell$ est r.

Démonstration de rationnel $\implies$ développement décimal périodique

Soit $x = \frac{p}{q}$. Il s'agit de trouver des entiers $k > \ell$ tels que $10^k - 10^\ell$ soit un multiple de q. En effet, si $10^k - 10^\ell = mq$, et si $mp = (10^{k-\ell} - 1)s + r$ est la division euclidienne de mp par $10^{k-\ell} - 1$, alors

$$x = \frac{mp}{10^k - 10^\ell} = 10^{-\ell}(s + \frac{r}{10^{k-\ell} - 1})$$

a un développement décimal périodique à partir du rang au plus ℓ, dont une période, de longueur $k - \ell$ est r.

Lorsque j décrit $\mathbb{N}$, les restes de 10^j modulo q ne peuvent pas être tous distincts, donc il existe $\ell < k \in \mathbb{N}$ tels que $10^k \equiv 10^\ell \mod q$.

Démonstration de rationnel $\implies$ développement décimal périodique

Soit $x = \frac{p}{q}$. Il s'agit de trouver des entiers $k > \ell$ tels que $10^k - 10^\ell$ soit un multiple de q. En effet, si $10^k - 10^\ell = mq$, et si $mp = (10^{k-\ell} - 1)s + r$ est la division euclidienne de mp par $10^{k-\ell} - 1$, alors

$$x = \frac{mp}{10^k - 10^\ell} = 10^{-\ell}(s + \frac{r}{10^{k-\ell} - 1})$$

a un développement décimal périodique à partir du rang au plus ℓ, dont une période, de longueur $k - \ell$ est r.

Lorsque j décrit $\mathbb{N}$, les restes de 10^j modulo q ne peuvent pas être tous distincts, donc il existe $\ell < k \in \mathbb{N}$ tels que $10^k \equiv 10^\ell \mod q$.

Si $q' = \frac{q}{q \wedge 10}$, la classe $\overline{10}$ de 10 modulo q' est un élément du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z})^*$. La différence $k - \ell$ est l'ordre de $\overline{10}$ dans ce groupe, c'est un diviseur de $\phi(q')$.

Démonstration de rationnel $\implies$ développement décimal périodique

Soit $x = \frac{p}{q}$. Il s'agit de trouver des entiers $k > \ell$ tels que $10^k - 10^\ell$ soit un multiple de q. En effet, si $10^k - 10^\ell = mq$, et si $mp = (10^{k-\ell} - 1)s + r$ est la division euclidienne de mp par $10^{k-\ell} - 1$, alors

$$x = \frac{mp}{10^k - 10^\ell} = 10^{-\ell}(s + \frac{r}{10^{k-\ell} - 1})$$

a un développement décimal périodique à partir du rang au plus ℓ, dont une période, de longueur $k - \ell$ est r.

Lorsque j décrit $\mathbb{N}$, les restes de 10^j modulo q ne peuvent pas être tous distincts, donc il existe $\ell < k \in \mathbb{N}$ tels que $10^k \equiv 10^\ell \mod q$.

Si $q' = \frac{q}{q \wedge 10}$, la classe $\overline{10}$ de 10 modulo q' est un élément du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z})^*$. La différence $k - \ell$ est l'ordre de $\overline{10}$ dans ce groupe, c'est un diviseur de $\phi(q')$.

Exemple. Si $q = 13$, $q' = 13$, $\phi(q') = 12$. On constate que l'ordre de $\overline{10}$ dans $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$ est 6, qui est bien la période de $\frac{5}{13}$.

Nombres irrationnels

Comme $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable et $\mathbb{Q}$ l'est, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable.

Comme $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable et $\mathbb{Q}$ l'est, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable.

Exercice (Densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)

Montrer que tout intervalle ouvert non vide $]a, b[$ *où* $a < b \in \mathbb{R}$ *contient des nombres irrationnels.*

▸ Solution

Comme $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable et $\mathbb{Q}$ l'est, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable.

Exercice (Densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)

Montrer que tout intervalle ouvert non vide $]a, b[$ où $a < b \in \mathbb{R}$ contient des nombres irrationnels.

▸ Solution

Exercice (Critère d'irrationalité)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors x est irrationnel si et seulement si il existe des suites d'entiers p_n et q_n telles que $q_n x - p_n \neq 0$ et $q_n x - p_n$ tend vers 0.

▸ Solution

Théorème (Euler 1737)

e est irrationnel.

Théorème (Euler 1737)

e est irrationnel.

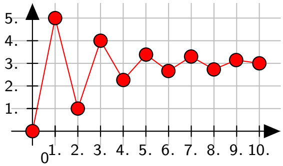
Démonstration (Fourier). On applique le critère d'irrationalité à e^{-1} avec $q_n = n!$ et $p_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Théorème (Euler 1737)

e est irrationnel.

Démonstration (Fourier). On applique le critère d'irrationalité à e^{-1} avec $q_n = n!$ et $p_n = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. Comme la suite $(\frac{1}{k!})$ est strictement décroissante, pour tout n,

$$0 < \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\right| < \frac{1}{(n+1)!}.$$

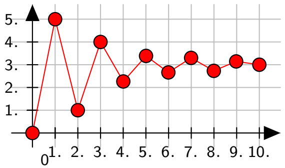


Théorème (Euler 1737)

e est irrationnel.

Démonstration (Fourier). On applique le critère d'irrationalité à e^{-1} avec $q_n = n!$ et $p_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. Comme la suite $(\frac{1}{k!})$ est strictement décroissante, pour tout n,

$$0 < \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right| < \frac{1}{(n+1)!}.$$



Par conséquent, $0 < |q_n e^{-1} - p_n| = n! \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right| < \frac{1}{n+1}$ est non nul et tend vers 0. Donc e^{-1} est irrationnel, e aussi.

Développement dans une base quelconque

Soit b un réel, $b > 1$. Développer un réel positif x en base b, c'est l'écrire comme une somme éventuellement infinie de puissances de b multipliées par des "chiffres", i.e. des entiers pris dans l'intervalle $[0, b[$.

Théorème

Soit b un réel, $b > 1$. Tout réel positif possède au moins un développement en base b.

Développement dans une base quelconque

Soit b un réel, $b > 1$. Développer un réel positif x en base b, c'est l'écrire comme une somme éventuellement infinie de puissances de b multipliées par des "chiffres", i.e. des entiers pris dans l'intervalle $[0, b[$.

Théorème

Soit b un réel, $b > 1$. Tout réel positif possède au moins un développement en base b.

En effet, pour tout $x > 0$, il existe un plus grand entier n tel que $b^n \leq x$. Notons le $n(x)$. Il existe un plus grand entier a tel que $a.b^{n(x)} \leq x$. Notons le $a(x)$. Nécessairement, $0 \leq a(x) < b$. Notons $f(x) = x - a(x)b^{n(x)}$. Par construction, $0 \leq f(x) < b^{n(x)}$, donc $n(f(x)) < n(x)$. En outre, on pose $f(0) = 0$.

Soit b un réel, $b > 1$. Développer un réel positif x en base b, c'est l'écrire comme une somme éventuellement infinie de puissances de b multipliées par des "chiffres", i.e. des entiers pris dans l'intervalle $[0, b[$.

Théorème

Soit b un réel, $b > 1$. Tout réel positif possède au moins un développement en base b.

En effet, pour tout $x > 0$, il existe un plus grand entier n tel que $b^n \leq x$. Notons le $n(x)$. Il existe un plus grand entier a tel que $a.b^{n(x)} \leq x$. Notons le $a(x)$. Nécessairement, $0 \leq a(x) < b$. Notons $f(x) = x - a(x)b^{n(x)}$. Par construction, $0 \leq f(x) < b^{n(x)}$, donc $n(f(x)) < n(x)$. En outre, on pose $f(0) = 0$.

Partant d'un $x_0 > 0$, notant $N = n(x)$, on construit la suite donnée par la relation de récurrence $x_{k+1} = f(x_k)$. Elle satisfait $n(x_k) \leq N - k$ et $0 \leq x_k \leq b^{N-k}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$x_0 = a_{n(x_0)} b^{n(x_0)} + \cdots + a_{n(x_k)} b^{n(x_k)} + x_{k+1}.$$

Comme la suite (x_k) tend vers 0, les sommes partielles $a_{n(x_0)} b^{n(x_0)} + \cdots + a_{n(x_k)} b^{n(x_k)}$ tendent vers x_0. C'est ce qu'on entend par développement en base b.

Soit b un réel, $b > 1$. Développer un réel positif x en base b, c'est l'écrire comme une somme éventuellement infinie de puissances de b multipliées par des "chiffres", i.e. des entiers pris dans l'intervalle $[0, b[$.

Théorème

Soit b un réel, $b > 1$. Tout réel positif possède au moins un développement en base b.

En effet, pour tout $x > 0$, il existe un plus grand entier n tel que $b^n \leq x$. Notons le $n(x)$. Il existe un plus grand entier a tel que $a.b^{n(x)} \leq x$. Notons le $a(x)$. Nécessairement, $0 \leq a(x) < b$. Notons $f(x) = x - a(x)b^{n(x)}$. Par construction, $0 \leq f(x) < b^{n(x)}$, donc $n(f(x)) < n(x)$. En outre, on pose $f(0) = 0$.

Partant d'un $x_0 > 0$, notant $N = n(x)$, on construit la suite donnée par la relation de récurrence $x_{k+1} = f(x_k)$. Elle satisfait $n(x_k) \leq N - k$ et $0 \leq x_k \leq b^{N-k}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$x_0 = a_{n(x_0)} b^{n(x_0)} + \cdots + a_{n(x_k)} b^{n(x_k)} + x_{k+1}.$$

Comme la suite (x_k) tend vers 0, les sommes partielles $a_{n(x_0)} b^{n(x_0)} + \cdots + a_{n(x_k)} b^{n(x_k)}$ tendent vers x_0. C'est ce qu'on entend par développement en base b.

Remarque. Lorsque b n'est pas entier, le développement n'est jamais unique.

Soit b un réel, $b > 1$. Développer un réel positif x en base b, c'est l'écrire comme une somme éventuellement infinie de puissances de b multipliées par des "chiffres", i.e. des entiers pris dans l'intervalle $[0, b[$.

Théorème

Soit b un réel, $b > 1$. Tout réel positif possède au moins un développement en base b.

En effet, pour tout $x > 0$, il existe un plus grand entier n tel que $b^n \leq x$. Notons le $n(x)$. Il existe un plus grand entier a tel que $a.b^{n(x)} \leq x$. Notons le $a(x)$. Nécessairement, $0 \leq a(x) < b$. Notons $f(x) = x - a(x)b^{n(x)}$. Par construction, $0 \leq f(x) < b^{n(x)}$, donc $n(f(x)) < n(x)$. En outre, on pose $f(0) = 0$.

Partant d'un $x_0 > 0$, notant $N = n(x)$, on construit la suite donnée par la relation de récurrence $x_{k+1} = f(x_k)$. Elle satisfait $n(x_k) \leq N - k$ et $0 \leq x_k \leq b^{N-k}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$x_0 = a_{n(x_0)} b^{n(x_0)} + \cdots + a_{n(x_k)} b^{n(x_k)} + x_{k+1}.$$

Comme la suite (x_k) tend vers 0, les sommes partielles $a_{n(x_0)} b^{n(x_0)} + \cdots + a_{n(x_k)} b^{n(x_k)}$ tendent vers x_0. C'est ce qu'on entend par développement en base b.

Remarque. Lorsque b n'est pas entier, le développement n'est jamais unique.
Dans le n^{0}39 du magazine Quadrature, voir un article sur le sujet, issu d'un travail de Guillaume Farinole, alors étudiant de licence, distingué par le Prix Fermat Junior.

L'existence de la borne supérieure, c'est le point de départ de l'analyse. Savez vous en déduire les théorèmes suivants ?

Théorème (Convergence monotone)

Dans $\mathbb{R}$, toute suite croissante et majorée converge.

Pour aller plus loin : analyse

L'existence de la borne supérieure, c'est le point de départ de l'analyse. Savez vous en déduire les théorèmes suivants ?

Théorème (Convergence monotone)

Dans $\mathbb{R}$, toute suite croissante et majorée converge.

Théorème (Valeurs intermédiaires)

Une fonction continue sur un intervalle qui ne s'annule nulle part garde un signe constant.

Pour aller plus loin : analyse

L'existence de la borne supérieure, c'est le point de départ de l'analyse. Savez vous en déduire les théorèmes suivants ?

Théorème (Convergence monotone)

Dans $\mathbb{R}$, toute suite croissante et majorée converge.

Théorème (Valeurs intermédiaires)

Une fonction continue sur un intervalle qui ne s'annule nulle part garde un signe constant.

Théorème (Bolzano-Weierstrass)

De toute suite bornée de réels, on peut extraire une suite monotone, et donc convergente.

Une vidéo réalisée par des étudiants de L1 explique une démonstration de ce théorème : https ://www.youtube.com/watch ?v=IFsqQ0AKUzM

L'existence de la borne supérieure, c'est le point de départ de l'analyse. Savez vous en déduire les théorèmes suivants ?

Théorème (Convergence monotone)

Dans $\mathbb{R}$, toute suite croissante et majorée converge.

Théorème (Valeurs intermédiaires)

Une fonction continue sur un intervalle qui ne s'annule nulle part garde un signe constant.

Théorème (Bolzano-Weierstrass)

De toute suite bornée de réels, on peut extraire une suite monotone, et donc convergente.

Une vidéo réalisée par des étudiants de L1 explique une démonstration de ce théorème : https ://www.youtube.com/watch ?v=IFsqQ0AKUzM

Théorème (Bolzano)

Une fonction continue sur un intervalle fermé borné atteint sa borne inférieure.

Il y a des équations du second degré sans solutions réelles. Les nombres complexes ont été inventés pour combler cette lacune.

Pour aller plus loin : algèbre

Il y a des équations du second degré sans solutions réelles. Les nombres complexes ont été inventés pour combler cette lacune.

Vous trouverez dans *eCampus/ Approfondissement disciplinaire - Nombres* 4 diaporamas (et 4 vidéos) qui racontent l'histoire romanesque de la naissance des nombres complexes dans l'Italie de la Renaissance.

Pour aller plus loin : algèbre

Il y a des équations du second degré sans solutions réelles. Les nombres complexes ont été inventés pour combler cette lacune.

Vous trouverez dans *eCampus/ Approfondissement disciplinaire - Nombres* 4 diaporamas (et 4 vidéos) qui racontent l'histoire romanesque de la naissance des nombres complexes dans l'Italie de la Renaissance.

Au milieu du XVIIème siècle, certains savants (B. Pascal, notamment) sont encore réticents à admettre les nombres irrationnels dans le concert des nombres. Pour les nombres complexes, il faut attendre le XVIIIème siècle.

Pour aller plus loin : algèbre

Il y a des équations du second degré sans solutions réelles. Les nombres complexes ont été inventés pour combler cette lacune.

Vous trouverez dans *eCampus/ Approfondissement disciplinaire - Nombres* 4 diaporamas (et 4 vidéos) qui racontent l'histoire romanesque de la naissance des nombres complexes dans l'Italie de la Renaissance.

Au milieu du XVIIème siècle, certains savants (B. Pascal, notamment) sont encore réticents à admettre les nombres irrationnels dans le concert des nombres. Pour les nombres complexes, il faut attendre le XVIIIème siècle.

Théorème (d'Alembert-Gauss)

Tout polynôme à coefficients complexes non constant possède au moins une racine complexe.

Contrairement aux apparences, il s'agit d'un résultat d'analyse bien davantage que d'algèbre. La démonstration proposée par d'Alembert en 1746, complétée par Gauss en 1799, reposant sur le théorème de la borne inférieure atteinte, qui n'avait pas encore été démontré rigoureusement, était incomplète.

Démonstration arithmétique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

On s'appuie sur une propriété des entiers modulo 2.
Propriété. Si $a \in \mathbb{Z}$, a^2 est pair $\iff$ a est pair.

Démonstration arithmétique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

On s'appuie sur une propriété des entiers modulo 2.
Propriété. Si $a \in \mathbb{Z}$, a^2 est pair $\iff$ a est pair.

Par l'absurde. Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. Soit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ sa forme fractionnaire irréductible. Alors $p^2 = 2q^2$ est pair, donc p est pair, soit $p = 2p'$ où $p' \in \mathbb{N}$. Il vient $q^2 = 2p'^2$, donc q est pair, ce qui contredit l'irréductibilité. On conclut que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Retour

Démonstration arithmétique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

On s'appuie sur une propriété des entiers modulo 2.
Propriété. Si $a \in \mathbb{Z}$, a^2 est pair $\iff$ a est pair.

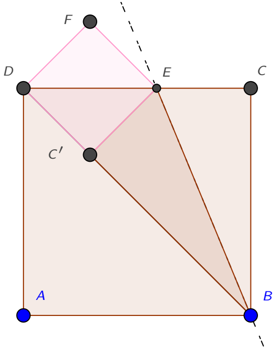
Par l'absurde. Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. Soit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ sa forme fractionnaire irréductible. Alors $p^2 = 2q^2$ est pair, donc p est pair, soit $p = 2p'$ où $p' \in \mathbb{N}$. Il vient $q^2 = 2p'^2$, donc q est pair, ce qui contredit l'irréductibilité. On conclut que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Retour

Démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ par pliage de papier.

Soit $ABCD$ un carré de papier, le plus petit carré à côtés q et diagonale p entiers. On plie pour amener le côté $[BC]$ sur la diagonale (BD). C est envoyé sur C'. Alors $C'EFD$ est un carré de côté entier $p-q<q$ et de diagonale entière $q-(p-q)=2q-p<p$, contradiction.

Retour



Parenthèse. On peut aller plus vite en remarquant que la pente de l'hypoténuse du triangle rectangle $A_k B_k Z$ est proche de $2x_k$.

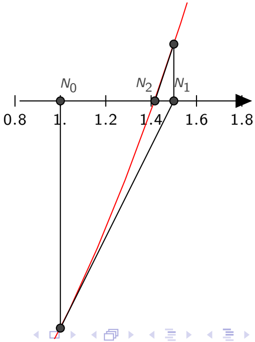
Exercice

Donner une valeur approchée de l'abscisse de Z en fonction de celle, x_k, de A_k.

Solution. La pente de la droite $(B_k Z)$ est $\frac{-x_k^2+2}{z-x_k} \sim 2x_k$, d'où

$$z \sim x_k + \frac{-x_k^2+2}{2x_k} = \frac{x_k}{2} + \frac{1}{x_k}.$$

On constate que $\frac{x_k}{2} + \frac{1}{x_k}$ est beaucoup plus proche de $\sqrt{2}$ que x_{k+1}. Itérer $x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ est beaucoup plus rapide que la décatomie, c'est la *méthode de Newton*.



Retour

Exercice

Démontrer que la distance de 1,999... à 2 est inférieure à tout rationnel strictement positif ϵ, $|2\text{-}1{,}9999....| < \epsilon$.

Solution. Si $\epsilon = \frac{p}{q}$, choisissons un entier n tel que $q < 10^n$. Alors $\epsilon > 10^{-n}$. Or 1,9999... >1,99...99 où on n'a gardé que n chiffres après la virgule,
$2-1{,}9999.... < 2-1{,}99...99 = 10^{-n} < \epsilon$.

Retour

Exercice

Démontrer que la distance de 1,999... à 2 est inférieure à tout rationnel strictement positif ϵ, $|2\text{-}1{,}9999....| < \epsilon$.

Solution. Si $\epsilon = \frac{p}{q}$, choisissons un entier n tel que $q < 10^n$. Alors $\epsilon > 10^{-n}$. Or 1,9999... $>$1,99...99 où on n'a gardé que n chiffres après la virgule, 2$-$1,9999....$<$ 2$-$1,99...99$=$ $10^{-n} < \epsilon$.

Retour

Théorème

Tout ensemble X non vide, minoré, de réels possède une borne inférieure.

Quitte à translater, on peut supposer que 0 minore X. On définit par récurrence une suite (a_n) d'entiers comme suit. Soit a_0 le plus grand entier qui minore X. Si a_n est défini, soit a_{n+1} le plus grand entier tel que $a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k 10^{-k}$ minore X. Par construction, $0 \leq a_{n+1} \leq 9$. On peut donc écrire ce nombre décimal sous la forme $a_0, a_1 \ldots a_n a_{n+1}$.

Exercice

Démontrer que la distance de 1,999... à 2 est inférieure à tout rationnel strictement positif ϵ, $|$2-1,9999....$| < \epsilon$.

Solution. Si $\epsilon = \frac{p}{q}$, choisissons un entier n tel que $q < 10^n$. Alors $\epsilon > 10^{-n}$. Or 1,9999... >1,99...99 où on n'a gardé que n chiffres après la virgule, 2−1,9999....< 2−1,99...99= $10^{-n} < \epsilon$.

Retour

Théorème

Tout ensemble X non vide, minoré, de réels possède une borne inférieure.

Quitte à translater, on peut supposer que 0 minore X. On définit par récurrence une suite (a_n) d'entiers comme suit. Soit a_0 le plus grand entier qui minore X. Si a_n est défini, soit a_{n+1} le plus grand entier tel que $a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k 10^{-k}$ minore X. Par construction, $0 \leq a_{n+1} \leq 9$. On peut donc écrire ce nombre décimal sous la forme $a_0, a_1 \ldots a_n a_{n+1}$.

Le développement décimal illimité $m = a_0, a_1 a_2 \ldots$ est un réel qui minore X. Si $m' > m$, soit ℓ le rang de la première décimale qui diffère entre m et m'. Alors $m' \geq a_0, a_1 \ldots a_{\ell-1}(a_\ell + 1) = a_0 + \sum_{k=1}^{\ell} a_k 10^{-k} + 10^{-\ell}$ ne peut pas minorer X. Cela entraîne que m est le plus grand des minorants de X, c'est sa borne inférieure.

Retour

Théorème (Axiome d'Archimède)

Soient $0 < x < y$ *deux réels strictement positifs. Il existe un entier naturel* n *tel que* $y \leq nx$.

Solution. Soit a la partie entière du développement décimal de y. Alors $y \leq a + 1$. Soit ℓ le rang du premier chiffre non nul du développement décimal de x. Alors $x \geq 10^{-\ell}$. Soit $n = (a+1).10^{\ell}$. C'est un entier naturel, et $nx \geq a + 1 \geq y$.

Retour

Théorème (Axiome d'Archimède)

Soient $0 < x < y$ deux réels strictement positifs. Il existe un entier naturel n tel que $y \leq nx$.

Solution. Soit a la partie entière du développement décimal de y. Alors $y \leq a+1$. Soit ℓ le rang du premier chiffre non nul du développement décimal de x. Alors $x \geq 10^{-\ell}$. Soit $n = (a+1).10^{\ell}$. C'est un entier naturel, et $nx \geq a+1 \geq y$.

Retour

Théorème

Dans tout intervalle ouvert non vide $]a, b[$, où $a < b \in \mathbb{R}$, il y a des rationnels.

Solution. Soit ℓ le rang du premier chiffre où les développements décimaux de a et b diffèrent (si a ou b est décimal, on considère le développement de a finissant par des 0 et celui de b finissant par des 9). Autrement dit, $a = a_0, a_1 \dots a_\ell \dots$ et $b = a_0, a_1 \dots a_{\ell-1} b_\ell \dots$, avec $b_\ell > a_\ell$. Soit c le nombre décimal $c = a_0, a_1 \dots a_{\ell-1} b_\ell$. Alors $a \leq c \leq b$. Le choix de développements retenu dans le cas décimal exclut que $c = a$ ou $c = b$, donc c est un rationnel appartenant à $]a, b[$.

Retour

Conversion développement décimal $\Longrightarrow$ fraction

$$\begin{aligned} x &= 3 + 142857.10^{-6} + 142857.10^{-12} + \cdots \\ &= 3 + 142857.10^{-6} y \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} y &= 1 + 10^{-6} + 10^{-12} + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - 10^{-6}} \\ &= \frac{10^6}{10^6 - 1} = \frac{10^6}{999999}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 3 + 142857.10^{-6} + 142857.10^{-12} + \cdots \\ &= 3 + 142857.10^{-6} y \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} y &= 1 + 10^{-6} + 10^{-12} + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - 10^{-6}} \\ &= \frac{10^6}{10^6 - 1} = \frac{10^6}{999999}. \end{aligned}$$

or

$$142857 = 3^3.7.11.13.37 \quad \text{et} \quad 999999 = 3^3.11.13.37,$$

d'où

$$x = 3 + \frac{142857}{999999} = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}.$$

Retour

Conversion fraction $\Longrightarrow$ développement décimal

On pose la division

$$
\begin{array}{cccccccc|l}
5 & 0 & & & & & & & 13 \\ \cline{9-9}
1 & 1 & 0 & & & & & & 0{,}384615 \\
 & & 6 & 0 & & & & & \\
 & & & 8 & 0 & & & & \\
 & & & & 2 & 0 & & & \\
 & & & & & 7 & 0 & & \\
 & & & & & & 5 & 0 &
\end{array}
$$

On constate qu'on retrouve le reste 5 au bout de 6 étapes. La suite des quotients va se répéter, donc la période du développement décimal de $\frac{5}{13}$ est 384615,

$$\frac{5}{13} = 0,\overline{384615}\,\overline{384615}\ldots.$$

Retour

Exercice (Densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)

Montrer que tout intervalle ouvert non vide $]a, b[$ où $a < b \in \mathbb{R}$ contient des nombres irrationnels.

Solution. Soit r un rationnel appartenant à l'intervalle $]a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2}[$. Alors $r + \sqrt{2}$ est un irrationnel appartenant à $]a, b[$.

Retour

Exercice (Densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)

Montrer que tout intervalle ouvert non vide $]a, b[$ où $a < b \in \mathbb{R}$ contient des nombres irrationnels.

Solution. Soit r un rationnel appartenant à l'intervalle $]a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2}[$. Alors $r + \sqrt{2}$ est un irrationnel appartenant à $]a, b[$.

Retour

Exercice (Critère d'irrationalité)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors x est irrationnel si et seulement si il existe des suites d'entiers p_n et q_n telles que $q_n x - p_n \neq 0$ et $q_n x - p_n$ tend vers 0.

Solution. Condition nécessaire. Supposons que $x = \frac{p}{q}$ est rationnel. Alors $|q_n x - p_n| = \frac{|q_n p - q p_n|}{q} \geq \frac{1}{q}$ ne tend pas vers 0.

Exercice (Densité de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)

Montrer que tout intervalle ouvert non vide $]a,b[$ où $a<b\in\mathbb{R}$ contient des nombres irrationnels.

Solution. Soit r un rationnel appartenant à l'intervalle $]a-\sqrt{2}, b-\sqrt{2}[$. Alors $r+\sqrt{2}$ est un irrationnel appartenant à $]a,b[$.

Retour

Exercice (Critère d'irrationalité)

Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors x est irrationnel si et seulement si il existe des suites d'entiers p_n et q_n telles que $q_n x - p_n \neq 0$ et $q_n x - p_n$ tend vers 0.

Solution. Condition nécessaire. Supposons que $x=\frac{p}{q}$ est rationnel. Alors $|q_n x - p_n| = \frac{|q_n p - q p_n|}{q} \geq \frac{1}{q}$ ne tend pas vers 0.

Condition suffisante. Découpons $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ en n intervalles égaux $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$. Parmi les $n+1$ nombres $0, x, 2x, \ldots, nx$ modulo 1, deux au moins se trouvent dans le même intervalle. Il existe donc $0\leq k<k'\leq n$ et des entiers relatifs m, m' tel que $|k'x-m'-(kx-m)|\leq\frac{1}{n}$. On pose $q_n = k'-k'$, $p_n = m'-m$, de sorte que $|q_n x - p_n|\leq\frac{1}{n}$. Si x est irrationnel, $q_n x - p_n \neq 0$. Retour