Il était une fois... les nombres complexes, quatrième partie

Pierre Pansu, Université Paris-Saclay

14 septembre 2020

$$x=\sqrt[3]{\frac{c-\sqrt{c^2-4(\frac{b}{3})^3}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{-c-\sqrt{c^2-4(\frac{b}{3})^3}}{2}}.$$

Dès 1539, Cardano fait remarquer à Tartaglia que si $c^2-4(\frac{b}{3})^3<0$, sa formule n'a pas de sens, alors que l'équation possède bel et bien au moins une solution.

$$x=\sqrt[3]{\frac{c-\sqrt{c^2-4(\frac{b}{3})^3}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{-c-\sqrt{c^2-4(\frac{b}{3})^3}}{2}}.$$

Dès 1539, Cardano fait remarquer à Tartaglia que si $c^2-4(\frac{b}{3})^3<0$, sa formule n'a pas de sens, alors que l'équation possède bel et bien au moins une solution.

Tartaglia reste perplexe. Cardano a l'intuition que la formule reste valable dans ce cas et n'hésite pas à écrire des exemples où apparaissent des racines carrées de nombres négatifs, qu'il appelle *nombres sophistiqués*.

$$x = \sqrt[3]{\frac{c - \sqrt{c^2 - 4(\frac{b}{3})^3}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{-c - \sqrt{c^2 - 4(\frac{b}{3})^3}}{2}}.$$

Dès 1539, Cardano fait remarquer à Tartaglia que si $c^2 - 4(\frac{b}{3})^3 < 0$, sa formule n'a pas de sens, alors que l'équation possède bel et bien au moins une solution.

Tartaglia reste perplexe. Cardano a l'intuition que la formule reste valable dans ce cas et n'hésite pas à écrire des exemples où apparaissent des racines carrées de nombres négatifs, qu'il appelle *nombres sophistiqués*.

C'est Rafael Bombelli qui, à Bologne, donne naissance aux nombres complexes en détaillant les règles de calcul sur les racines carrées des nombres négatifs, qu'il baptise *nombres impossibles*. Son ouvrage, *L'Algebra*, paraît à Venise en 1572, et sept ans plus tard à Bologne.

Épilogue

Les nombres complexes ne seront pas acceptés facilement. Par exemple, en 1637, Descartes les mentionne (il les appelle *imaginaires*, terme qui restera en usage jusqu'au XIXème siècle), mais les rejette parce qu'impossibles à construire géométriquement.

Épilogue

Les nombres complexes ne seront pas acceptés facilement. Par exemple, en 1637, Descartes les mentionne (il les appelle *imaginaires*, terme qui restera en usage jusqu'au XIXème siècle), mais les rejette parce qu'impossibles à construire géométriquement.

Néanmoins, Peter Rothe (1580-1617) pose dès 1608 la question de savoir si tout polynôme possède une racine complexe. La démonstration complète de ce *théorème fondamental de l'algèbre* est due Jean-Robert Argand (1768-1822) en 1814, après des tentatives de d'Alembert en 1746 et de Gauss en 1799. Elle ne donne pas de formule pour cette racine.

Épilogue

Les nombres complexes ne seront pas acceptés facilement. Par exemple, en 1637, Descartes les mentionne (il les appelle *imaginaires*, terme qui restera en usage jusqu'au XIXème siècle), mais les rejette parce qu'impossibles à construire géométriquement.

Néanmoins, Peter Rothe (1580-1617) pose dès 1608 la question de savoir si tout polynôme possède une racine complexe. La démonstration complète de ce *théorème fondamental de l'algèbre* est due Jean-Robert Argand (1768-1822) en 1814, après des tentatives de d'Alembert en 1746 et de Gauss en 1799. Elle ne donne pas de formule pour cette racine.

La quête de formules générales pour les solutions des équations de degré 5 ou plus tourne court. À la suite d'un résultat partiel de Paolo Ruffini (1765-1822), le norvégien Niels Henrik Abel (1802-1829) démontre en 1826 qu'une telle formule n'existe pas.

Ruffini

Abel

Les travaux d'Abel (bientôt complétés par Galois) auront une immense postérité : ils inaugurent la théorie des corps et celle des groupes.

Bibliographie

1. Fabio Toscano, *La Formule Secrète*, Belin, Paris, 2011.
2. Xavier Buff et al., *Mathématiques Tout en un pour la licence*, Dunod, Paris, 2017.*

(*) La solution de l'équation du quatrième degré par Ferrari se trouve page 275.
Ce livre est accessible aux étudiants de l'Université Paris-Saclay, en passant par le site de la Bibliothèque Universitaire (voir la section Bibliographie dans le cours eCampus).

Les illustrations sont tirées de Wikipedia.

QuiZ

Je vous propose un quiZ, allez le chercher dans la QuiZinière de Canopé, référence B7YR93.